Método de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales elípticas

(Parte I)

Contenido

- Ecuaciones en derivadas parciales
- Ecuaciones en derivadas parciales elípticas
- Ecuación de Laplace
- Aproximación de operadores diferenciales
- Fórmula de diferencias centradas para f' u f''
- Construcción de sistema de ecuaciones
  - Laplace con condiciones de dirichlet
  - Laplace con condiciones de Neumann (mixtas)
- Resolución del sistema de ecuaciones

Ecuaciones en derivadas parciales

- Involucran una función desconocida *u* de dos o más variables independientes
- Válida sobre un dominio geométrico => discretización
- Condiciones de borde e iniciales
- (Sección 10.3, capítulo 10, Mathews-Fink, apuntes de MC. Rivara)

Clasificación de EDPs clásicas

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial xy}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

para $x_0 \leqslant x \leqslant x_f , y_0 \leqslant y \leqslant y_f$ y con las condiciones de borde para un dominio rectangular

$$u(x,y_0)=b_{y_0}(x), \quad u(x,y_f)=b_{y_f}(x)$$
$$u(x_{0,}y)=b_{x_0}(y), \quad u(x_f,y)=b_{x_f}(y)$$

Estas EDPs pueden ser clasificadas en tres grupos:

EDP elíptica si: $B^2-4AC<0$

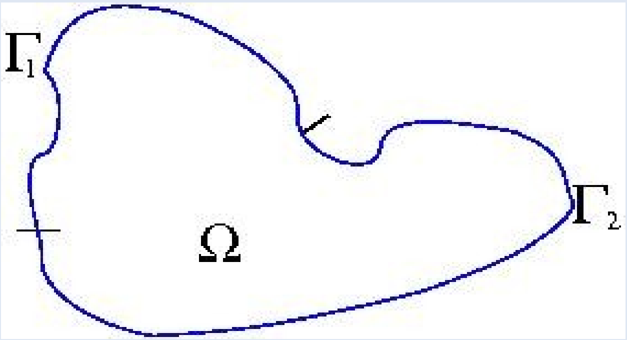
EDP parabólica si: $B^2-4AC=0$

EDP hiperbólica si: $B^2-4AC>0$

EDPs Elípticas

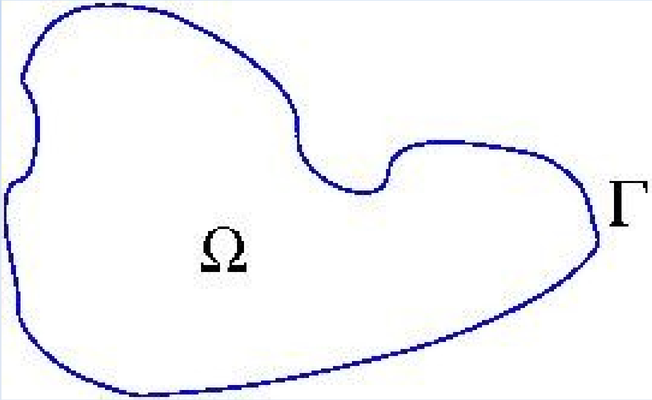
- Problemas de estado estacionario (no son función del tiempo)
  - Ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ en Ω
  - Ecuación de Poisson $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$ en Ω

- Condiciones de borde
  - Dirichlet $u=f_1$ en T_1
  - Neumann $\frac{\partial u}{\partial n}=f_2$ en T_2



Ejemplo: Ecuación de Laplace

- Si tenemos $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ con $u=f_1$ en ┬



  - Que deseamos encontrar?
  - Cómo resolverla? numéricamente
  - Qué conceptos debemos utilizar?

Ejemplo: Ecuación de Laplace

Ejemplo 1.1. Ecuación de Laplace — Distribución de la temperatura en un estado estacionario.

Considerando la ecuación de Laplace:

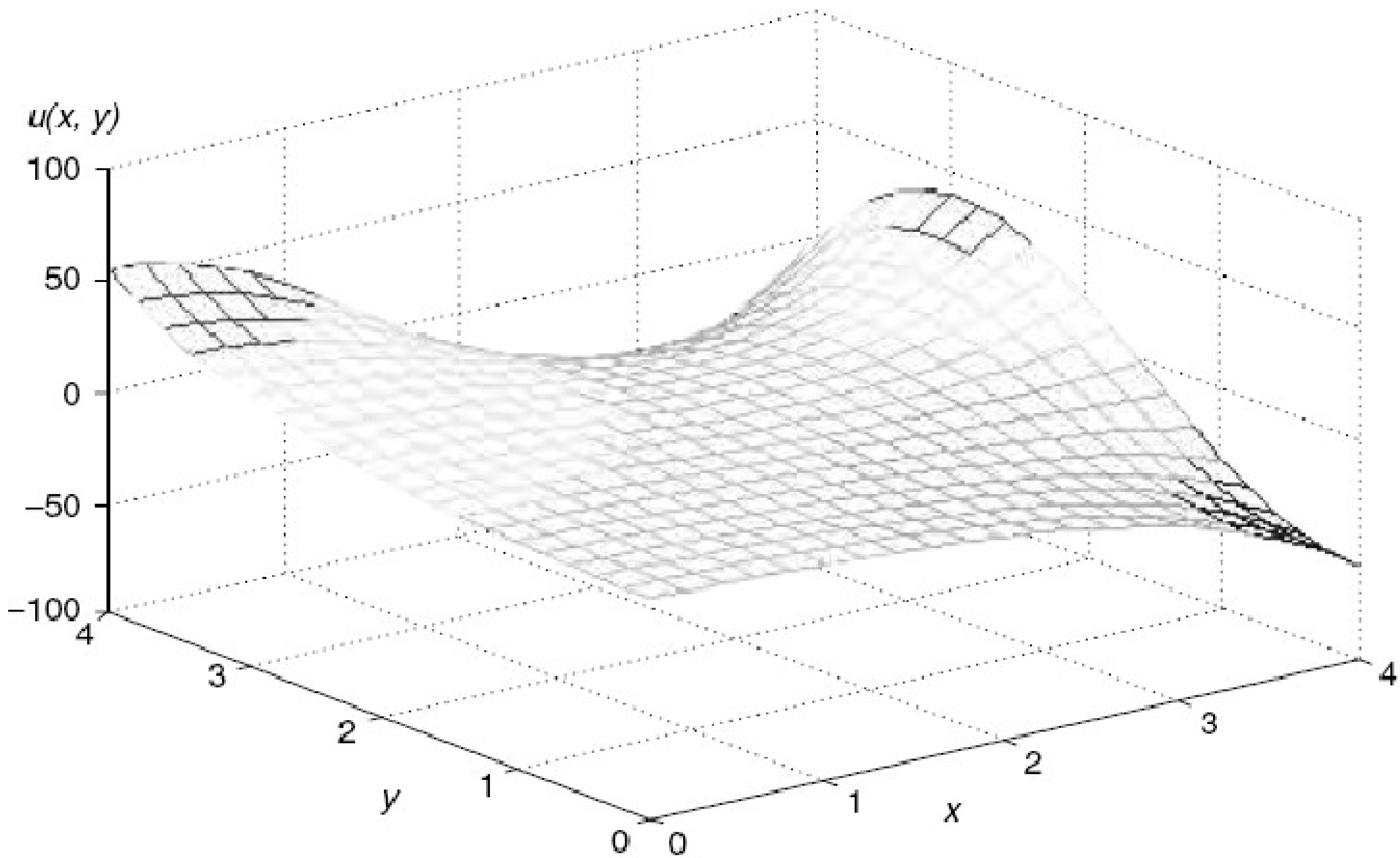
$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 4$$

con las condiciones de frontera

$$u(0,y) = e^y - \cos y, \qquad u(4,y) = e^y \cos 4 - e^4 \cos y$$

$$u(x,0) = \cos x - e^x, \qquad u(x,4) = e^4 \cos x - e^x \cos 4$$

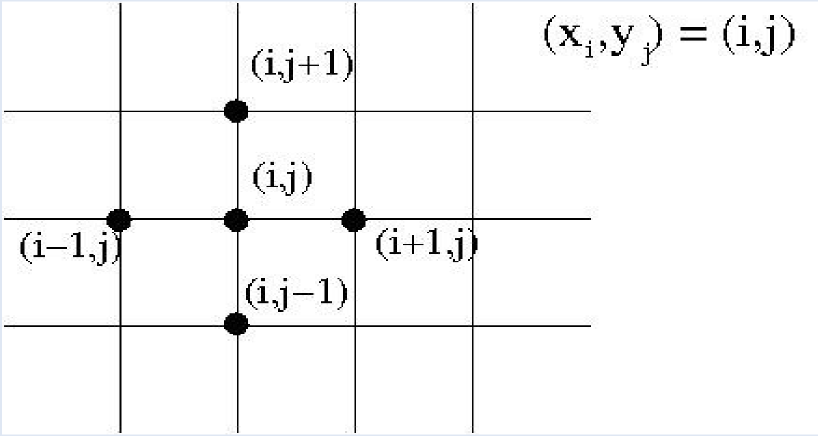
Solución aproximada



La distribución de la temperatura sobre la placa

Cómo la resolvemos? Usaremos diferencias finitas

- Técnica numérica
  - Discretizar el dominio
  - Aproximar los operadores diferenciales por operadores de diferencias
  - $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h^2}$$



  - Laplaciano:

$$\nabla^2 u_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

Cómo se deduce?

- Usar aproximaciones de derivadas
  - Límite del cuociente incremental:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)\approx\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}=\frac{f_{i+1}-f_i}{h}$$

  - Aproximación buena solo para h pequeños
- (Detalles en sección 6.1, Mathews-Fink)

Cómo se deduce? (...)

- Fórmula de diferencias centradas:
- Teorema Fórmula centrada de orden O(h²). Supongamos que $f \in C^3[a,b]$ y que $x-h, x, x+h \in [a,b]$ entonces:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

- Es más, existe un número $c = c(x) \in [a,b]$ tal que

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + E_{trunc}(f,h)$$

- siendo $E_{trunc}(f,h) = \frac{-h^2 f^{(3)}(c)}{6} = O(h^2)$

Cómo se deduce? (...)

- Demostración:
  - Usamos fórmula de Taylor de orden 2 de f alrededor de x para f(x-h) y f(x+h)

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!}+\frac{f^{(3)}(c_1)h^3}{3!}$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!}-\frac{f^{(3)}(c_2)h^3}{3!}$$

  - Restamos y obtenemos

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{(f^{(3)}(c_1)+f^{(3)}(c_2))h^3}{3!}$$

  - Como $f^{(3)}(x)$ es continua, usamos el teorema del valor intermedio

$$\frac{f^{(3)}(c_1)+f^{(3)}(c_2)}{2}=f^{(3)}(c)$$

Cómo se deduce? (...)

- Y ordenando términos obtenemos:

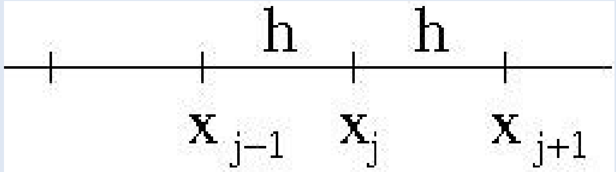
$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\mathrm{h}}+\frac{f^{(3)}(c)h^2}{3!}$$

- (Primer término es la fórmula centrada y el segundo el error de truncamiento)

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\mathrm{h}}+O(h^2)$$

- A continuación usaremos la siguiente notación:

$$f'(x_j)\approx\frac{f_{j+1}-f_{j-1}}{2\mathrm{h}}$$



Fórmulas de derivación númerica

- Fórmulas de diferencias centradas O(h²)
  - $$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$
  - $$f^{(2)}(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$ Se usa para discretizar el Laplaciano
  - $$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}$$
  - $$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

Cómo se deduce f''?

A modo de ejemplo, vamos a deducir la fórmula de orden $O(h^2)$ para $f''(x)$ que se muestra en la Tabla 6.3. Escribimos los desarrollos en serie de Taylor:

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} + \frac{h^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{24} + \cdots$$

y

$$(2) \qquad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} - \frac{h^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{24} - \cdots$$

Sumando los desarrollos (1) y (2) eliminamos los términos que contienen las derivadas impares $f'(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, $\ldots$:

$$(3) \qquad f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \frac{2h^2 f''(x)}{2} + \frac{2h^4 f^{(4)}(x)}{24} + \cdots$$

(Sección 6.2- Libro de Mathews-Fink)

Cómo se deduce f''?

Ahora despejamos $f''(x)$ de la expresión (3) y obtenemos

(4)
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{2h^2 f^{(4)}(x)}{4!} - \frac{2h^4 f^{(6)}(x)}{6!} - \cdots - \frac{2h^{2k-2} f^{(2k)}(x)}{(2k)!} - \cdots$$

Si truncamos el desarrollo en serie (4) en la cuarta derivada, entonces existe un valor c en $[x-h, x+h]$ tal que

(5)
$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2 f^{(4)}(c)}{12},$$

El primer término corresponde al valor de f'' buscado:

$$f^{(2)}(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

(Sección 6.2- Libro de Mathews-Fink)

Ecuación de diferencias para el Laplaciano

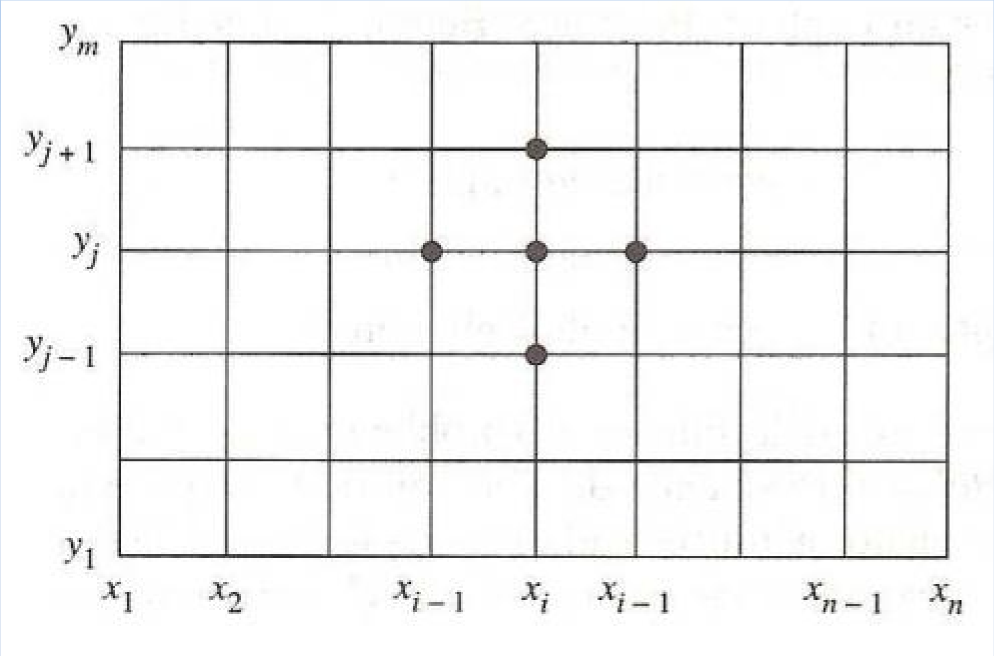
- Reemplazando

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{h^2}$$

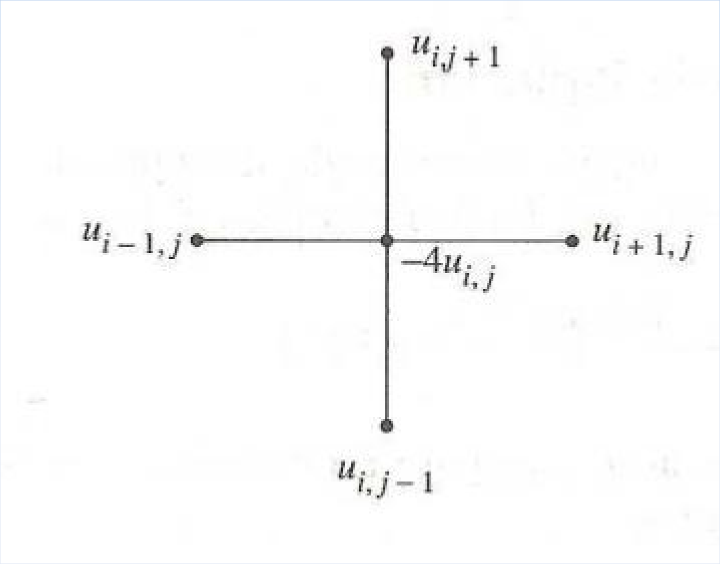
- Obtenemos la fórmula para la aproximación de la ec. de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} - 4u_{ij} + u_{ij-1} + u_{ij+1}}{h^2} = 0$$

Representación operador de diferencias



Discretización del rectángulo



Esquema de ecuación de diferencias para el Laplaciano

Método de diferencias finitas (2D): pasos a seguir

- Discretizar región con grilla regular de paso h en direcciones x e y
- Escribir ecuaciones de diferencias para cada punto de la grilla
  - Se obtiene un sistema lineal de ecuaciones $A\tilde{u}=b$
  - El sistema se resuelve numéricamente
    - Método directo, por ej: Gauss
    - Método iterativo

Ventajas/Limitaciones del método de diferencias finitas

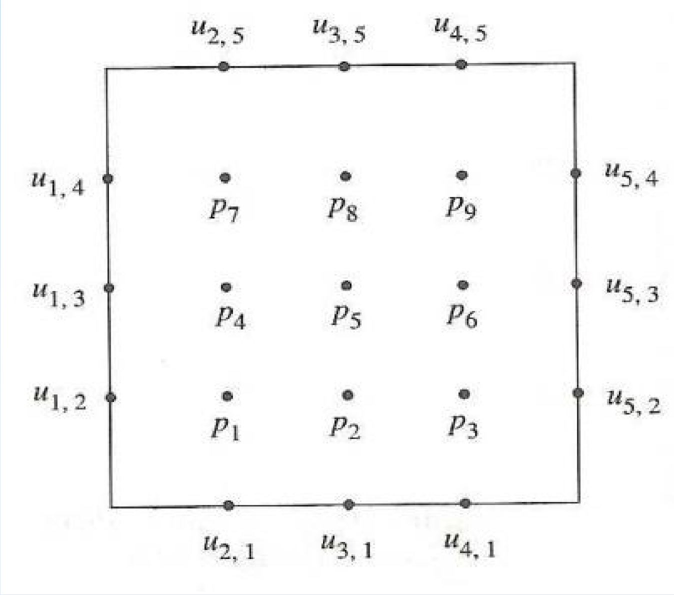
- Se adapta bien a geometrías rectangulares o que son uniones de rectángulos
- Es intuitivo, fácil de explicar y entender
- No permite modelar bien geometrías complejas ni condiciones de borde sobre bordes curvos
  - Usar otros más generales pero a la vez más complejos
  - Ejemplo: métodos de elementos finitos o volúmenes finitos

Construcción del sistema lineal (Condiciones de borde Dirichlet)

- Supongamos que tenemos un problema de Dirichlet, es decir conocemos los valores en la frontera de u(x,y) en la frontera de la región R
  - $u(x_{1,} y_j) = u_{1,j} \quad para \quad 2 \leqslant j \leqslant m-1 \quad (a \quad la \quad izquierda)$
  - $u(x_i, y_1) = u_{i,1} \quad para \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1 \quad (abajo)$
  - $u(x_n, y_j) = u_{n,j} \quad para \quad 2 \leqslant j \leqslant m-1 \quad (a \quad la \quad derecha)$
  - $u(x_i, y_m) = u_{i,m} \quad para \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1 \quad (arriba)$

Ejemplo con grilla 5x5

- Etiquetamos los puntos interiores como se muestra a continuación:

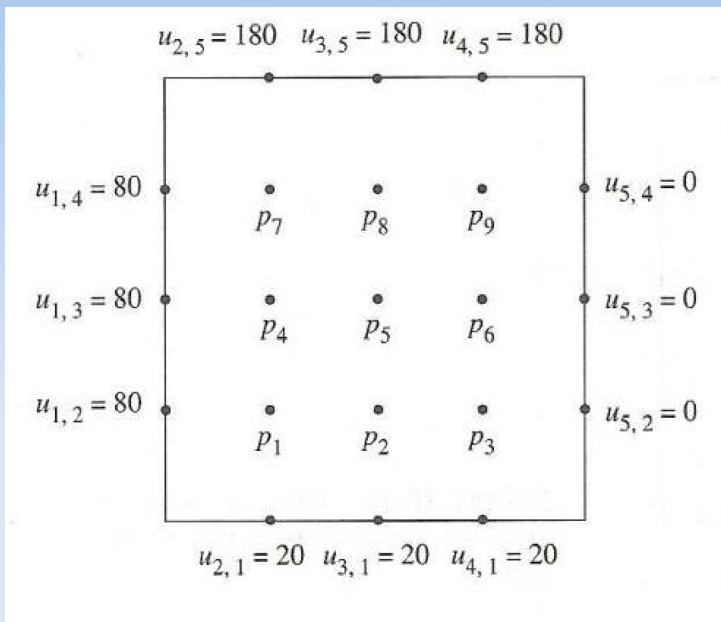


$$
\begin{array}{rcl}
-4p_1 + p_2 + p_4 & = & -u_{2,1} - u_{1,2} \\
p_1 - 4p_2 + p_3 + p_5 & = & -u_{3,1} \\
p_2 - 4p_3 + p_6 & = & -u_{4,1} - u_{5,2} \\
p_1 - 4p_4 + p_5 + p_7 & = & -u_{1,3} \\
p_2 + p_4 - 4p_5 + p_6 + p_8 & = & 0 \\
p_3 + p_5 - 4p_6 + p_9 & = & -u_{5,3} \\
p_4 - 4p_7 + p_8 & = & -u_{2,5} - u_{1,4} \\
p_5 + p_7 - 4p_8 + p_9 & = & -u_{3,5} \\
p_6 + p_8 - 4p_9 & = & -u_{4,5} - u_{5,4}.
\end{array}
$$

Ejemplo grilla 5x5 (...)

- Problema: determinar la solución aproximada de la ecuación de Laplace en el rectángulo $R=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 4, 0\leqslant y\leqslant 4\}$ donde u(x,y) denota la temperatura en un punto (x,y), los valores de frontera son:
  - $u(x,0) = 20 \qquad 0 < x < 4$
  - $u(x,4) = 180 \qquad 0 < x < 4$
  - $u(0,y) = 80 \qquad 0 < y < 4$
  - $u(4,y) = 0 \qquad 0 < y < 4$

Ejemplo con grilla 5x5 (...)



$$
\begin{aligned}
-4p_1 + p_2 + p_4 &= -100 \\
p_1 - 4p_2 + p_3 + p_5 &= -20 \\
p_2 - 4p_3 + p_6 &= -20 \\
p_1 - 4p_4 + p_5 + p_7 &= -80 \\
p_2 + p_4 - 4p_5 + p_6 + p_8 &= 0 \\
p_3 + p_5 - 4p_6 + p_9 &= 0 \\
p_4 - 4p_7 + p_8 &= -260 \\
p_5 + p_7 - 4p_8 + p_9 &= -180 \\
p_6 + p_8 - 4p_9 &= -180.
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, con Método de Gauss ...

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \quad p_7 \quad p_8 \quad p_9]' \\
&= [55.7143 \;\; 43.2143 \;\; 27.1429 \;\; 79.6429 \;\; 70.0000 \\
&\quad 45.3571 \;\; 112.857 \;\; 111.786 \;\; 84.2857]'.
\end{aligned}
$$

Construcción de sistema lineal
(Condiciones de borde de Neumann)

- Corresponde a cuando se especifican valores de la derivada direccional de u(x,y) en la dirección perpendicular al contorno R
- Ejemplo: supongamos que $\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}=0$
  - En el contexto de los problemas de temperatura, significa contorno aislado, no hay flujo de calor a través de él
  - Para $R=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b\}$, la condición de contorno de la derivada para x = a es:

$$\frac{\partial u(x_n,y_j)}{\partial x}=u_x(x_n,y_j)=0$$

Construcción de sistema lineal
(Condiciones de borde de Neumann) ...

- La ecuación de diferencias de Laplace para (x_n, y_j)

$$u_{n+1\mathrm{j}} + u_{n-1\mathrm{j}} - 4u_{nj} + u_{nj+1} + u_{nj-1} = 0$$

- Donde el valor $u_{n+1\mathrm{j}}$ es desconocido pues está fuera del dominio R. Sin embargo, podemos usar la fórmula de la derivación numérica:

- $\dfrac{u_{n+1\mathrm{j}} - u_{n-1\mathrm{j}}}{2\mathrm{h}} \approx u_x(x_n, y_j) = 0$ $\qquad u_{n+1\mathrm{j}} \approx u_{n-1\mathrm{j}}$
-

- Y obtenemos la fórmula que relaciona u_{nj} con sus valores adyacentes

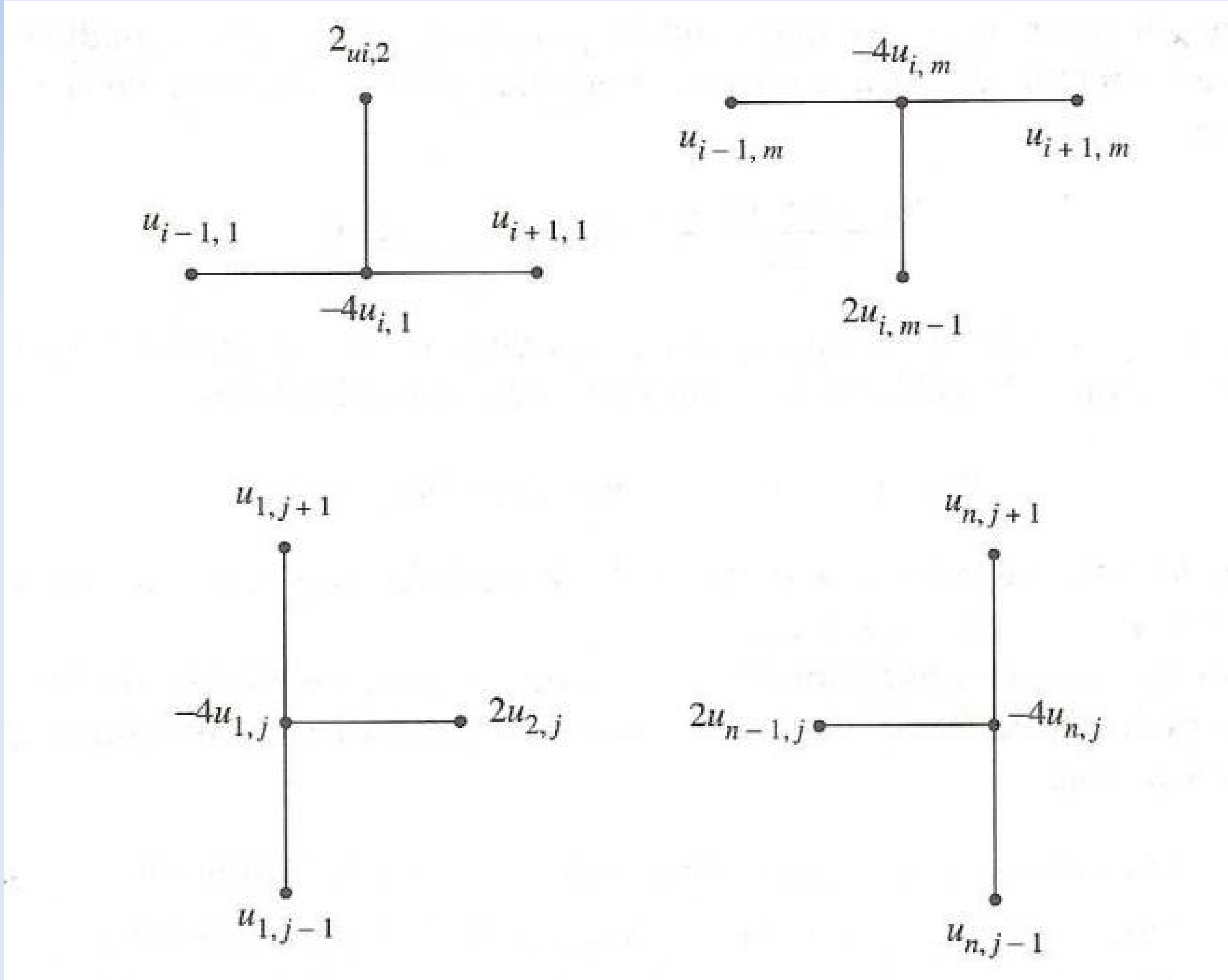
$$2u_{n-1\mathrm{j}} - 4u_{nj} + u_{nj+1} + u_{nj-1} = 0$$

Construcción de sistema lineal
(Condiciones de borde de Neumann) ...

- Las condiciones de Neumann para los puntos de los demás lados se obtiene de manera similar. Los cuatro casos son:

(14)	$2u_{i,2} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1} - 4u_{i,1} = 0$	(lado inferior),
(15)	$2u_{i,m-1} + u_{i-1,m} + u_{i+1,m} - 4u_{i,m} = 0$	(lado superior),
(16)	$2u_{2,j} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1} - 4u_{1,j} = 0$	(lado izquierdo),
(17)	$2u_{n-1,j} + u_{n,j-1} + u_{n,j+1} - 4u_{n,j} = 0$	(lado derecho).

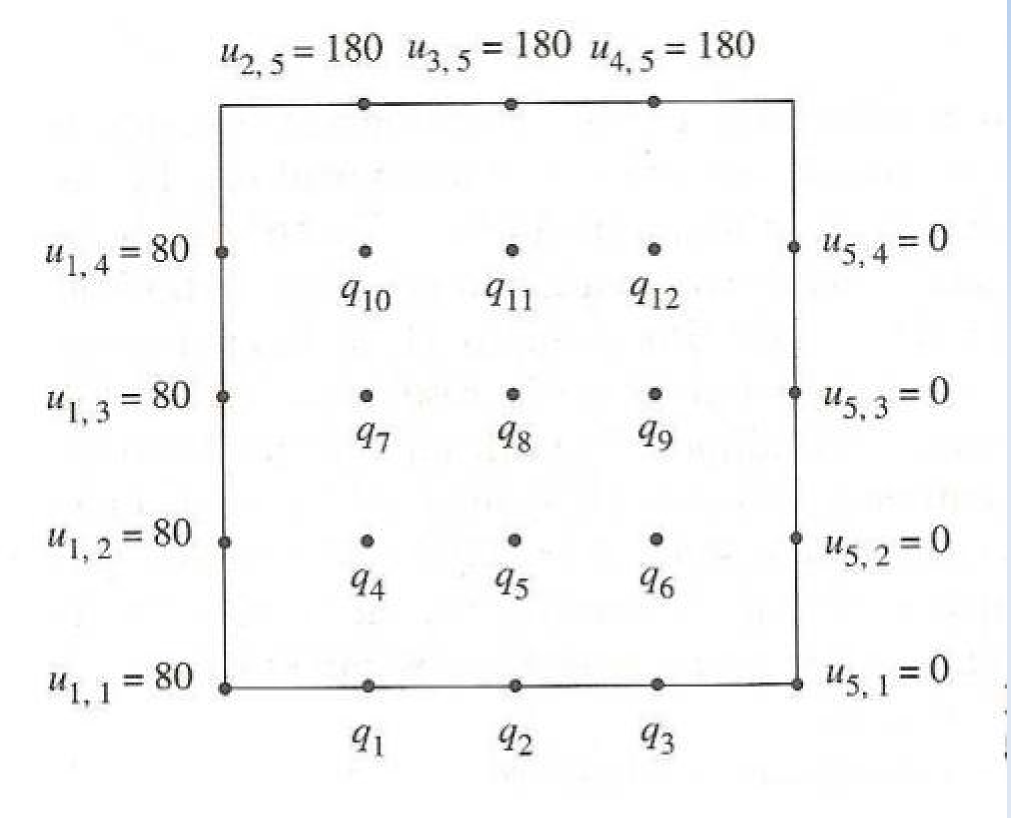
Construcción de sistema lineal
(Condiciones de borde de Neumann) ...



Ejemplo con condiciones de borde mixtas

- Problema: determinar la solución aproximada de la ecuación de Laplace en el rectángulo $R=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 4, 0\leqslant y\leqslant 4\}$ donde u(x,y) denota la temperatura en un punto (x,y), los valores de frontera son:
  - $u(x,4) = 180$ $0 < x < 4$ (Dirichlet)
  - $u_y(x,0) = 0$ $0 < x < 4$ (Neumann)
  - $u(0,y) = 80$ $0 < y < 4$ (Dirichlet)
  - $u(4,y) = 0$ $0 < y < 4$ (Dirichlet)

Grilla de 5x5 (12 incógnitas)



Grilla de 5x5 (12 incógnitas)

$$
\begin{array}{rcl}
-4q_1 + q_2 + 2q_4 &=& -80 \\
q_1 - 4q_2 + q_3 + 2q_5 &=& 0 \\
q_2 - 4q_3 + 2q_6 &=& 0 \\
q_1 - 4q_4 + q_5 + q_7 &=& -80 \\
q_2 + q_4 - 4q_5 + q_6 + q_8 &=& 0 \\
q_3 + q_5 - 4q_6 + q_9 &=& 0 \\
q_4 - 4q_7 + q_8 + q_{10} &=& -80 \\
q_5 + q_7 - 4q_8 + q_9 + q_{11} &=& 0 \\
q_6 + q_8 - 4q_9 + q_{12} &=& 0 \\
q_7 - 4q_{10} + q_{11} &=& -260 \\
q_8 + q_{10} - 4q_{11} + q_{12} &=& -180 \\
q_9 + q_{11} - 4q_{12} &=& -180.
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
Q &= [q_1 \;\; q_2 \;\; q_3 \;\; q_4 \;\; q_5 \;\; q_6 \;\; q_7 \;\; q_8 \;\; q_9 \;\; q_{10} \;\; q_{11} \;\; q_{12}]' \\
&= [71.8218 \;\; 56.8543 \;\; 32.2342 \;\; 75.2165 \;\; 61.6806 \;\; 36.0412 \\
&\quad\; 87.3636 \;\; 78.6103 \;\; 50.2502 \;\; 115.628 \;\; 115.147 \;\; 86.3492]'.
\end{aligned}
$$

Resumen

- Método de diferencias finitas
- Problemas que se modelan usando la ecuación de Laplace
  - Condiciones de borde Dirichlet, Neumann y mixtas
- Construcción del sistema de ecuaciones
  - Cuidado con la numeración de los puntos para lograr un sistema pentadiagonal (solución más eficiente)