
Método de diferencias finitas para EDPs elípticas

Prof. M.C. Rivara 2011

EDP ecuación a derivadas parciales

- involucra función desconocida u de más de una variables independientes y algunas de sus derivadas parciales
 - válida sobre un dominio geométrico $\Rightarrow$ se requiere discretización
 - condiciones de borde y condiciones iniciales
- Estudiar sección 10.3, capítulo 10, Mathews-Fink

EDP general sobre rectángulo

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.0.1)$$

para $x_0 \leq x \leq x_f$, $y_0 \leq y \leq y_f$ y con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(x, y_0) &= b_{y0}(x), & u(x, y_f) &= b_{yf}(x), \\ u(x_0, y) &= b_{x0}(y), & u(x_f, y) &= b_{xf}(y) \end{aligned} \quad (1.0.2)$$

Estas EDP pueden ser clasificadas en tres grupos:

EDP Elíptica:	Si $B^2 - 4AC < 0$
EDP Parabólica:	Si $B^2 - 4AC = 0$
EDP Hiperbólica:	Si $B^2 - 4AC > 0$

EDPs elípticas

EDPs elípticas (EDP + cond borde)

► Problemas de estado estacionario x, y, z
(no son función del tiempo)

• ec Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ en Ω

• ec. Poisson $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$ en Ω

► Condiciones de borde

• Dirichlet $u = f_1$ en Γ_1

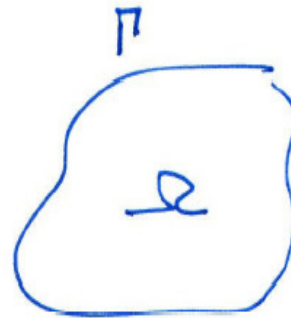
• Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ en Γ_2



ec. de Poisson

Ejemplo (Poisson) $u(x, y)$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\nabla^2 u} = f$$



$$u = f, \text{ en } \Gamma$$

Qué deseamos encontrar?
Por qué resolvemos numéricamente?
Qué conceptos utilizamos?

} → aproxim.
 $\tilde{u}$ de u

Ejemplo ec. Laplace

Ejemplo 1.1. Ecuación de Laplace — Distribución de la temperatura en un estado estacionario.

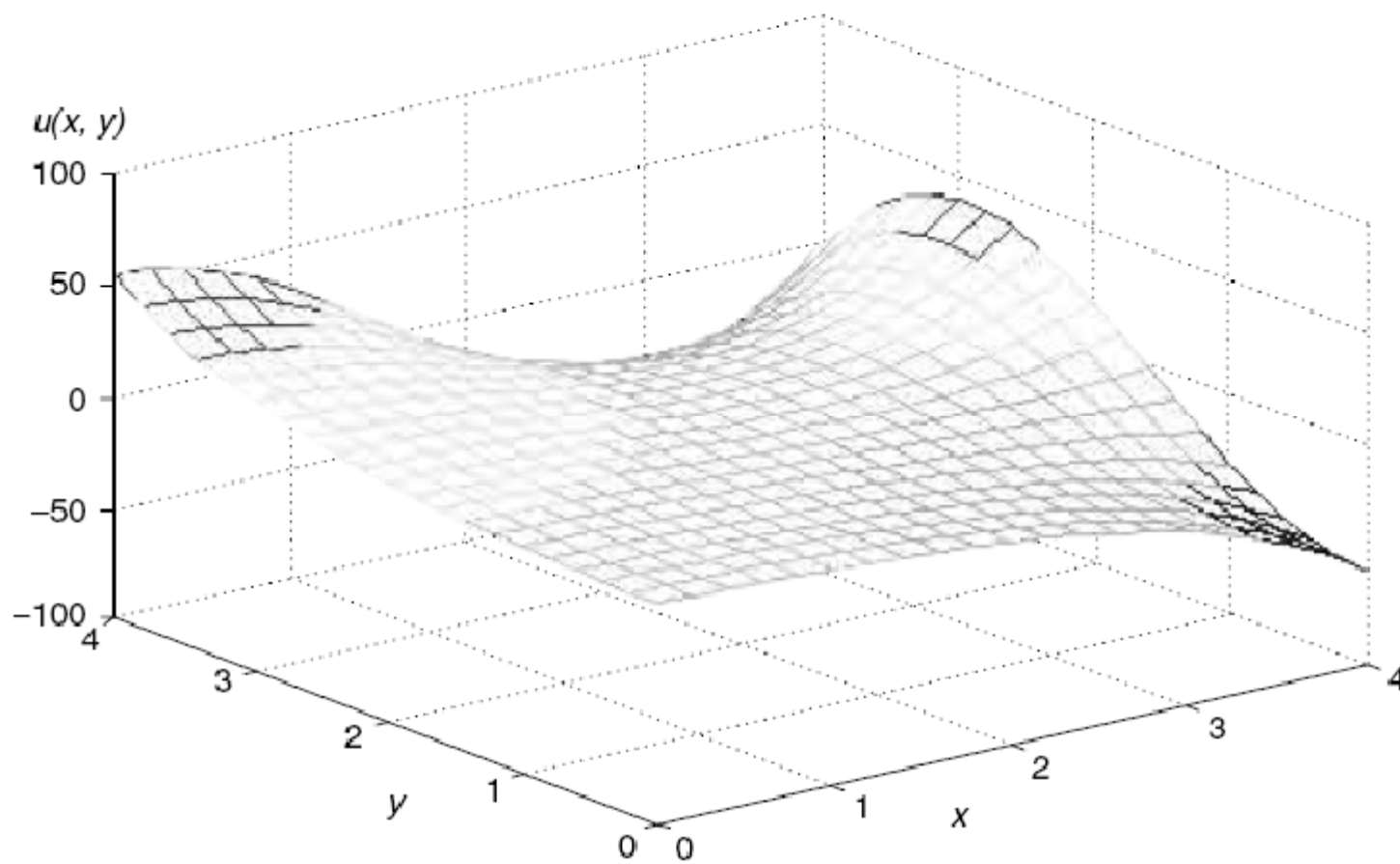
Considerando la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$$

con las condiciones de frontera

$$u(0, y) = e^y - \cos y, \quad u(4, y) = e^y \cos 4 - e^4 \cos y$$

$$u(x, 0) = \cos x - e^x, \quad u(x, 4) = e^4 \cos x - e^x \cos 4$$

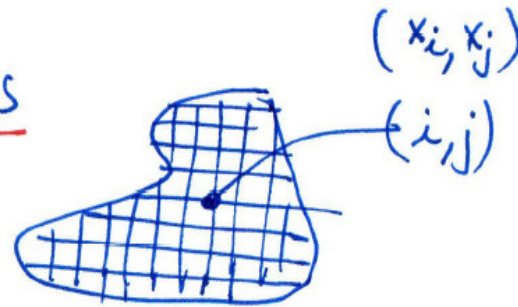


La distribución de la temperatura sobre la placa

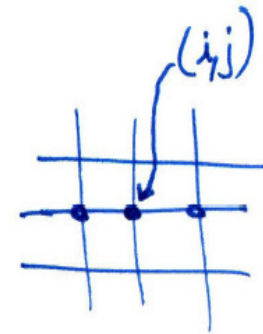
Método diferencias finitas

Método de diferencias finitas
técnica numérica

- Discretizar el dominio
- Aproximar operadores diferenciales
por operadores de diferencias



$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(i,j)} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}$$



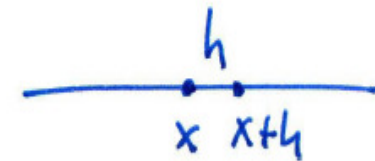
- Laplaciano

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

Derivación numérica

Aproximaciones de derivadas

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

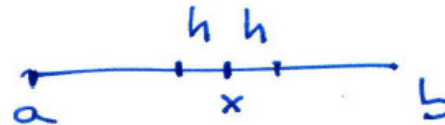


$$f'(x) \Big|_{x_i} \approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

aproximación de orden h, $O(h)$

Derivación ec. diferencias

Teorema $f \in C^3[a,b]$



$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f'''(c)h^2}{3!}$$

Diferencia
centrada

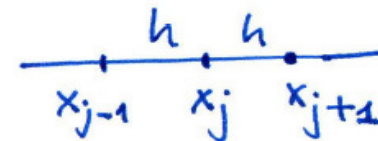
error de orden h^2
 $O(h^2)$

Dem $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} + \frac{f'''(c_1)h^3}{3!}$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} - \frac{f'''(c_2)h^3}{3!}$$

Restamos, despejamos f' y usamos T. Valor Interm.

Notación $f'(x_j) \approx \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h}$



Ecs. diferencias

Tabla 6.3 Fórmulas de diferencias centradas de orden $O(h^2)$.

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

Se usa para discretizar el laplaciano

Fórmula de diferencias finitas

Aproximación de $f''(x_j)$ (derivación)

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} + \frac{h^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{24} + \dots$$

y

$$(2) \quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} - \frac{h^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{24} - \dots$$

Sumando los desarrollos (1) y (2) eliminamos los términos que contienen las derivadas impares $f'(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, ...:

$$(3) \quad f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \frac{2h^2 f''(x)}{2} + \frac{2h^4 f^{(4)}(x)}{24} + \dots$$

Ahora despejamos $f''(x)$ de la expresión (3) y obtenemos

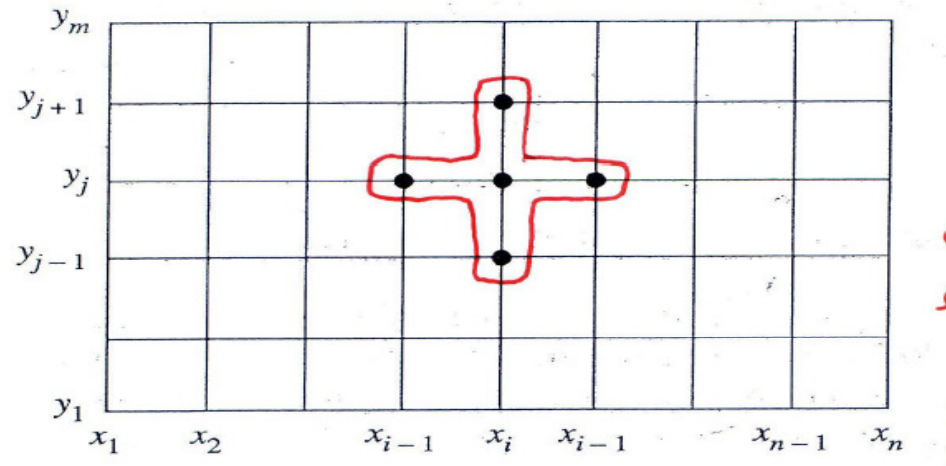
$$(4) \quad f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{2h^2 f^{(4)}(x)}{4!} - \frac{2h^4 f^{(6)}(x)}{6!} - \dots - \frac{2h^{2k-2} f^{(2k)}(x)}{(2k)!} - \dots$$

Si truncamos el desarrollo en serie (4) en la cuarta derivada, entonces existe un valor c en $[x-h, x+h]$ tal que

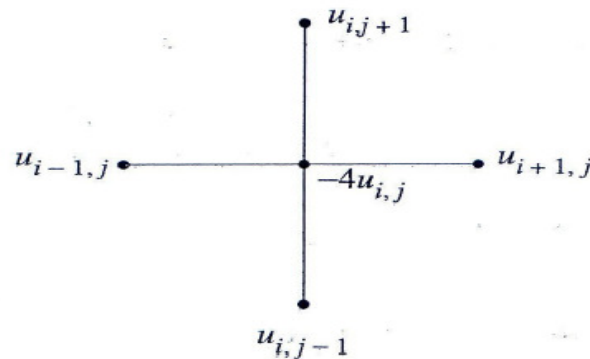
$$(5) \quad f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2 f^{(4)}(c)}{12},$$

Representaciones operador de diferencias

Discretización de rectángulo



Laplaciano
aplicado
en (x_i, y_j)



Esquema ecuación
diferencias
para Laplaciano

Método de diferencias finitas MDF (2D)

- Se discretiza región con grilla regular de paso h en direcciones x, y
- Se escribe ec. de diferencias para cada punto de la grilla
- Se obtiene sistema lineal de ecs $A \tilde{u} = b$
- Se resuelve sistema numéricamente
 - método directo tipo Gauss
 - método iterativo

Observaciones MDF

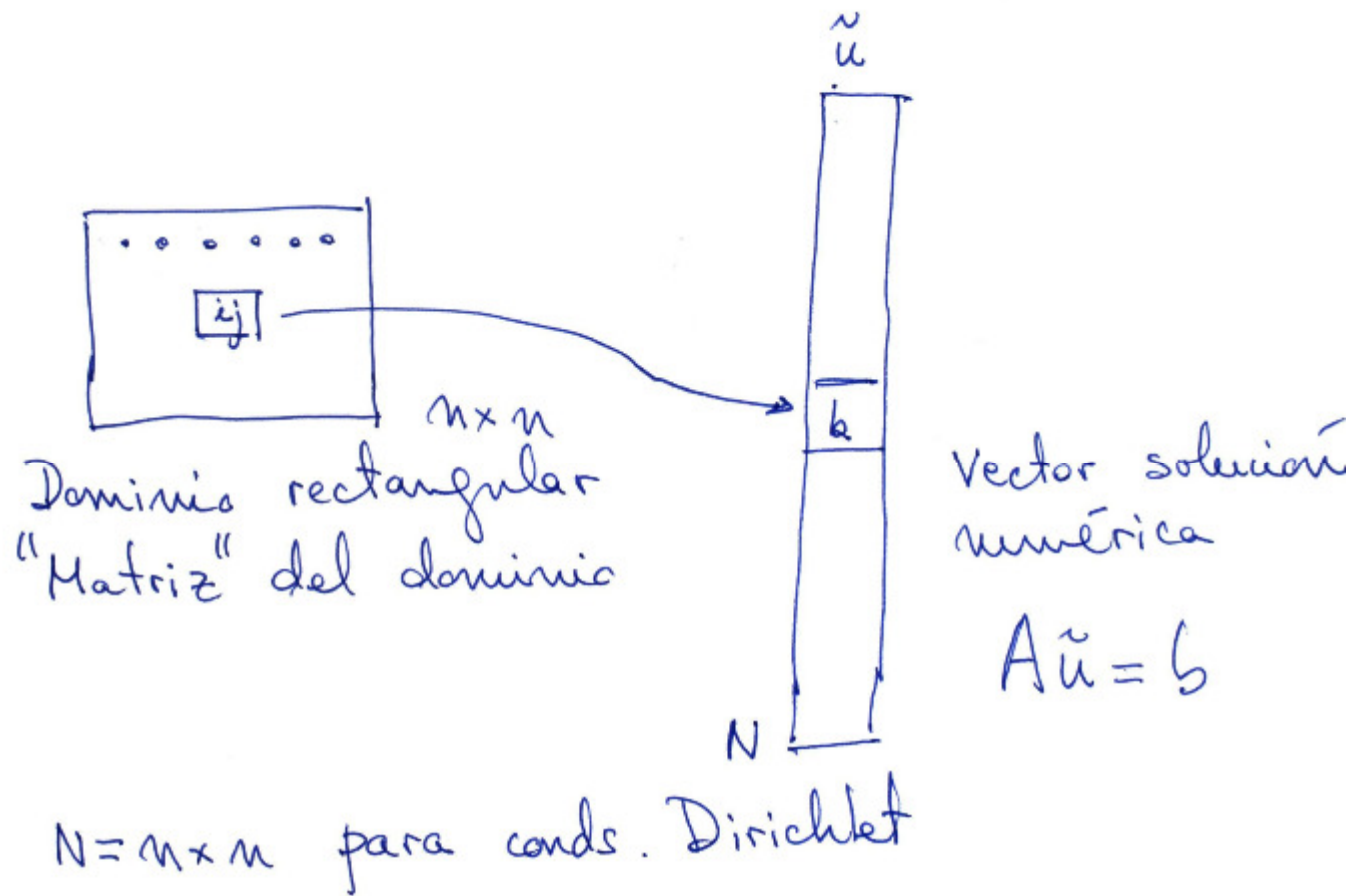
- Se adapta bien a geometrías que son uniones de rectángulos
- Es intuitivo, fácil de explicar y entender
- No maneja bien dominios complejos ni condiciones de borde sobre bodes curvos
- Existen otros métodos numéricos más generales, pero más complejos: método de elementos finitos MEF

Conds borde EDP elíptica

- Dirichlet $\Rightarrow$ función conocida en el borde del dominio
- Newmann $\Rightarrow$ es necesario escribir ecuación especial sobre puntos del borde.

Dificultades implementación MDF con método tipo Gauss

- Necesidad de mapear dos numeraciones



Ejemplo con grilla de 5 x 5

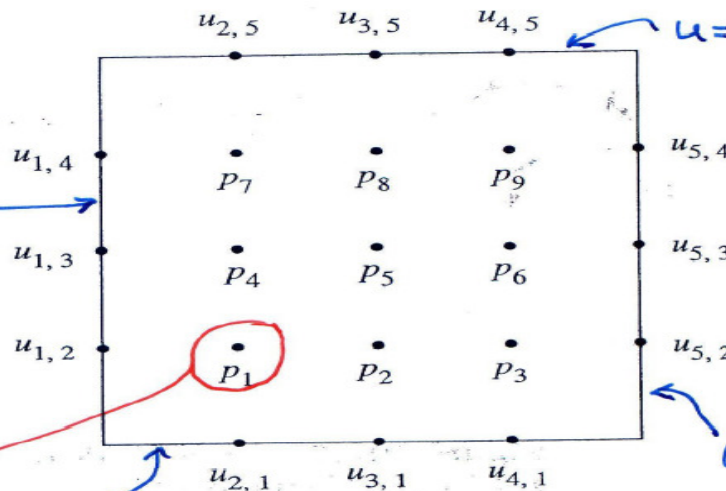
Ecuación Laplace
con cond. Dirichlet

$u = u_{ij}$

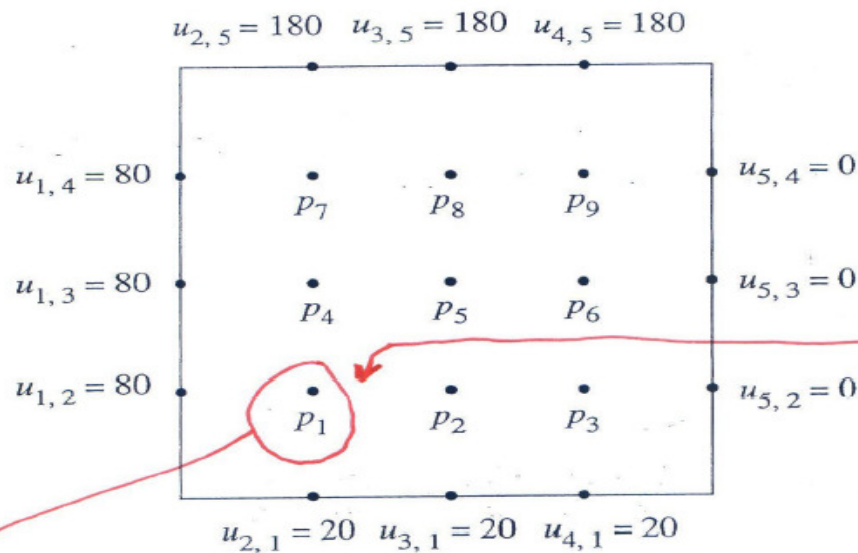
$u = u_{i1}$

$u = u_{i5}$

$u = u_{5j}$



$$\begin{aligned}
 -4p_1 + p_2 + p_4 &= -u_{2,1} - u_{1,2} \\
 p_1 - 4p_2 + p_3 + p_5 &= -u_{3,1} \\
 p_2 - 4p_3 + p_6 &= -u_{4,1} - u_{5,2} \\
 p_1 - 4p_4 + p_5 + p_7 &= -u_{1,3} \\
 p_2 + p_4 - 4p_5 + p_6 + p_8 &= 0 \\
 p_3 + p_5 - 4p_6 + p_9 &= -u_{5,3} \\
 p_4 - 4p_7 + p_8 &= -u_{2,5} - u_{1,4} \\
 p_5 + p_7 - 4p_8 + p_9 &= -u_{3,5} \\
 p_6 + p_8 - 4p_9 &= -u_{4,5} - u_{5,4}
 \end{aligned}$$



Orden de los puntos
 $\Downarrow$

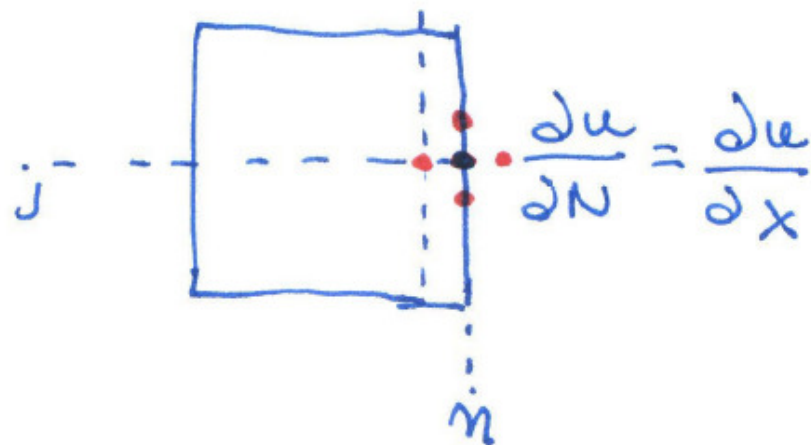
Matriz pentadiagonal

$$\begin{aligned}
 -4p_1 + p_2 + p_4 &= -100 \\
 p_1 - 4p_2 + p_3 + p_5 &= -20 \\
 p_2 - 4p_3 + p_6 &= -20 \\
 p_1 - 4p_4 + p_5 + p_7 &= -80 \\
 p_2 + p_4 - 4p_5 + p_6 + p_8 &= 0 \\
 p_3 + p_5 - 4p_6 + p_9 &= 0 \\
 p_4 - 4p_7 + p_8 &= -260 \\
 p_5 + p_7 - 4p_8 + p_9 &= -180 \\
 p_6 + p_8 - 4p_9 &= -180.
 \end{aligned}$$

Método de Gauss $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 P &= [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ p_7 \ p_8 \ p_9]^T \\
 &= [55.7143 \ 43.2143 \ 27.1429 \ 79.6429 \ 70.0000 \\
 &\quad 45.3571 \ 112.857 \ 111.786 \ 84.2857]^T.
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0$$



Desconocido

$$u_{n+1,j} + u_{n-1,j} + u_{n,j+1} + u_{n,j-1} - 4u_{n,j} = 0$$

$$\frac{u_{n+1,j} - u_{n-1,j}}{2h} \approx u_x(x_n, y_j) = 0$$

$$2u_{n-1,j} + u_{n,j+1} + u_{n,j-1} - 4u_{n,j} = 0$$

Cond. Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sobre rectángulo

$$(14) \quad 2u_{i,2} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1} - 4u_{i,1} = 0 \quad (\text{lado inferior}),$$

$$(15) \quad 2u_{i,m-1} + u_{i-1,m} + u_{i+1,m} - 4u_{i,m} = 0 \quad (\text{lado superior}),$$

$$(16) \quad 2u_{2,j} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1} - 4u_{1,j} = 0 \quad (\text{lado izquierdo}),$$

$$(17) \quad 2u_{n-1,j} + u_{n,j-1} + u_{n,j+1} - 4u_{n,j} = 0 \quad (\text{lado derecho}).$$

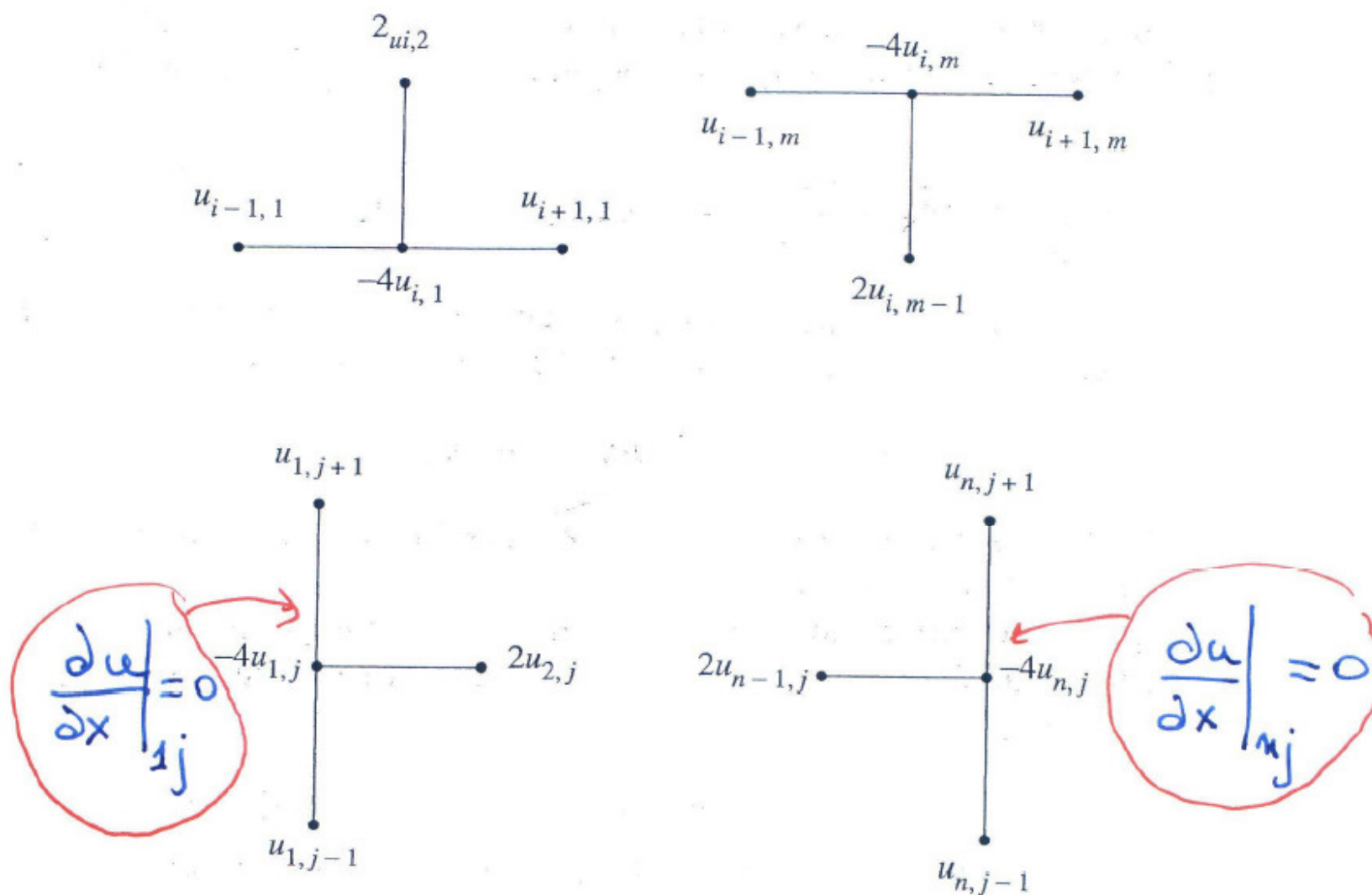


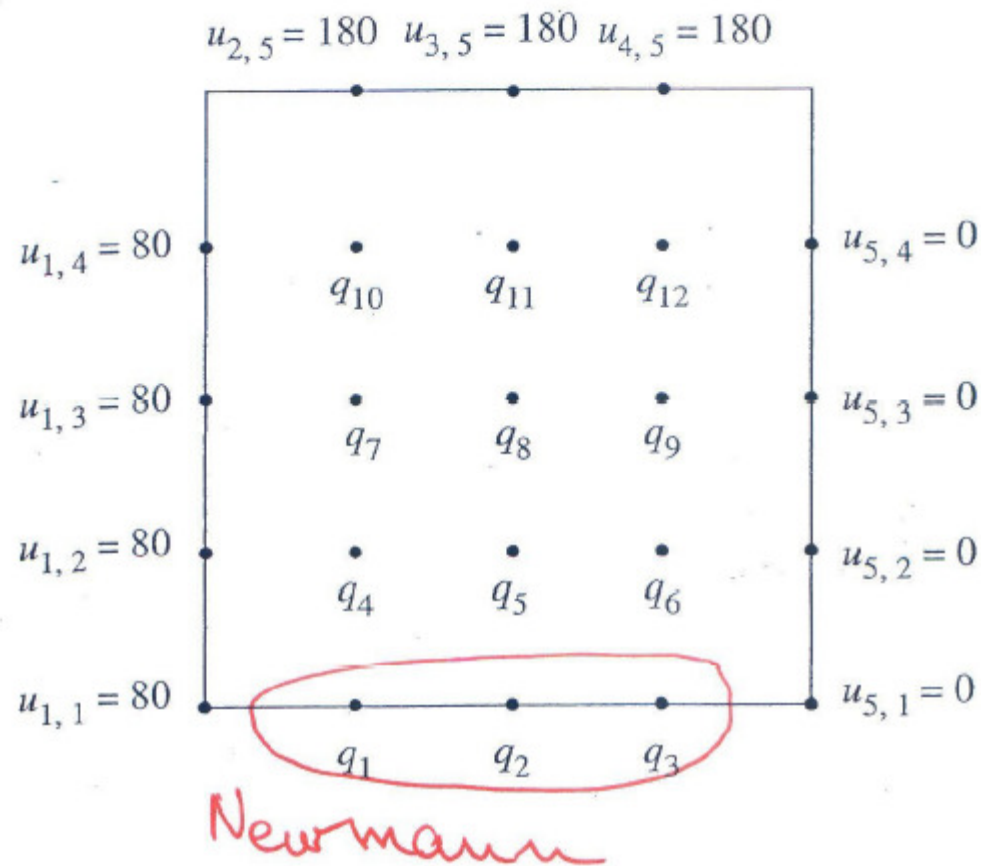
Figura 10.18 Los esquemas para la condición de contorno de Neumann.

Ejemplo con conds. borde mixtas

Ejemplo 10.6. Vamos a calcular una solución aproximada de la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en el rectángulo $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$, donde $u(x, y)$ denota la temperatura en el punto (x, y) y las condiciones de contorno son las que se muestran en la Figura 10.19:

$u(x, 4) = 180$	para $0 < x < 4$,	Dir
$u_y(x, 0) = 0$	para $0 < x < 4$,	Newmann
$u(0, y) = 80$	para $0 \leq y < 4$,	Dir
$u(4, y) = 0$	para $0 \leq y < 4$,	Dir

Malla de 5 x 5, 12 incógnitas



$$\begin{array}{rcl}
-4q_1 + q_2 + 2q_4 & & = -80 \\
q_1 - 4q_2 + q_3 + 2q_5 & & = 0 \\
q_2 - 4q_3 + 2q_6 & & = 0 \\
q_1 - 4q_4 + q_5 + q_7 & & = -80 \\
q_2 + q_4 - 4q_5 + q_6 + q_8 & & = 0 \\
q_3 + q_5 - 4q_6 + q_9 & & = 0 \\
q_4 - 4q_7 + q_8 + q_{10} & & = -80 \\
q_5 + q_7 - 4q_8 + q_9 + q_{11} & & = 0 \\
q_6 + q_8 - 4q_9 + q_{12} & & = 0 \\
q_7 - 4q_{10} + q_{11} & & = -260 \\
q_8 + q_{10} - 4q_{11} + q_{12} & & = -180 \\
q_9 + q_{11} - 4q_{12} & & = -180.
\end{array}$$

Método de Gauss

$$\begin{aligned}
Q &= [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}]' \\
&= [71.8218 \ 56.8543 \ 32.2342 \ 75.2165 \ 61.6806 \ 36.0412 \\
&\quad 87.3636 \ 78.6103 \ 50.2502 \ 115.628 \ 115.147 \ 86.3492]'.
\end{aligned}$$

Método iterativo de sobrerrelajación (ec. Laplace)

$$(22) \quad \begin{aligned} u_{i,j} &= u_{i,j} + \omega \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{4} \right) \\ &= u_{i,j} + \omega r_{i,j}, \end{aligned}$$

en la que el parámetro ω verifica $1 \leq \omega < 2$. En el método de sobrerrelajación sucesiva, cada paso de la iteración consiste en hacer un barrido de la malla con la fórmula recursiva (22) hasta que se tenga $|r_{i,j}| < \varepsilon$. Para elegir el valor óptimo del parámetro ω hay que estudiar los autovalores de la matriz que caracteriza el método iterativo que estamos usando para resolver un sistema lineal; en nuestro caso, dicho valor óptimo viene dado por la fórmula

$$(23) \quad \omega = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \right)^2}}.$$

Método iterativo ec. Laplace

$$(18) \quad u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

y supongamos que conocemos los valores de $u(x, y)$ en el contorno:

$$(19) \quad \begin{array}{llll} u(x_1, y_j) = u_{1,j} & \text{para } 2 \leq j \leq m-1 & \text{(a la izquierda),} \\ u(x_i, y_1) = u_{i,1} & \text{para } 2 \leq i \leq n-1 & \text{(abajo),} \\ u(x_n, y_j) = u_{n,j} & \text{para } 2 \leq j \leq m-1 & \text{(a la derecha),} \\ u(x_i, y_m) = u_{i,m} & \text{para } 2 \leq i \leq n-1 & \text{(arriba).} \end{array}$$

Ahora escribimos la ecuación (18) de forma adecuada para iterar:

$$(20) \quad u_{i,j} = u_{i,j} + r_{i,j},$$

siendo

$$(21) \quad r_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{4},$$

para $2 \leq i \leq n-1$ y $2 \leq j \leq m-1$.

Conds. borde para método iterativo

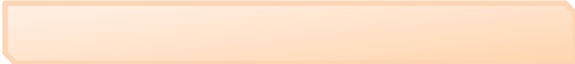
Cond. Neumann

$$(24) \quad u_{i,1} = u_{i,1} + \omega \left(\frac{2u_{i,2} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1} - 4u_{i,1}}{4} \right) \quad (\text{lado inferior}),$$

$$(25) \quad u_{i,m} = u_{i,m} + \omega \left(\frac{2u_{i,m-1} + u_{i-1,m} + u_{i+1,m} - 4u_{i,m}}{4} \right) \quad (\text{lado superior}),$$

$$(26) \quad u_{i,j} = u_{i,j} + \omega \left(\frac{2u_{2,j} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1} - 4u_{1,j}}{4} \right) \quad (\text{lado izquierdo}),$$

$$(27) \quad u_{n,j} = u_{n,j} + \omega \left(\frac{2u_{n-1,j} + u_{n,j-1} + u_{n,j+1} - 4u_{n,j}}{4} \right) \quad (\text{lado derecho}).$$



Visualización

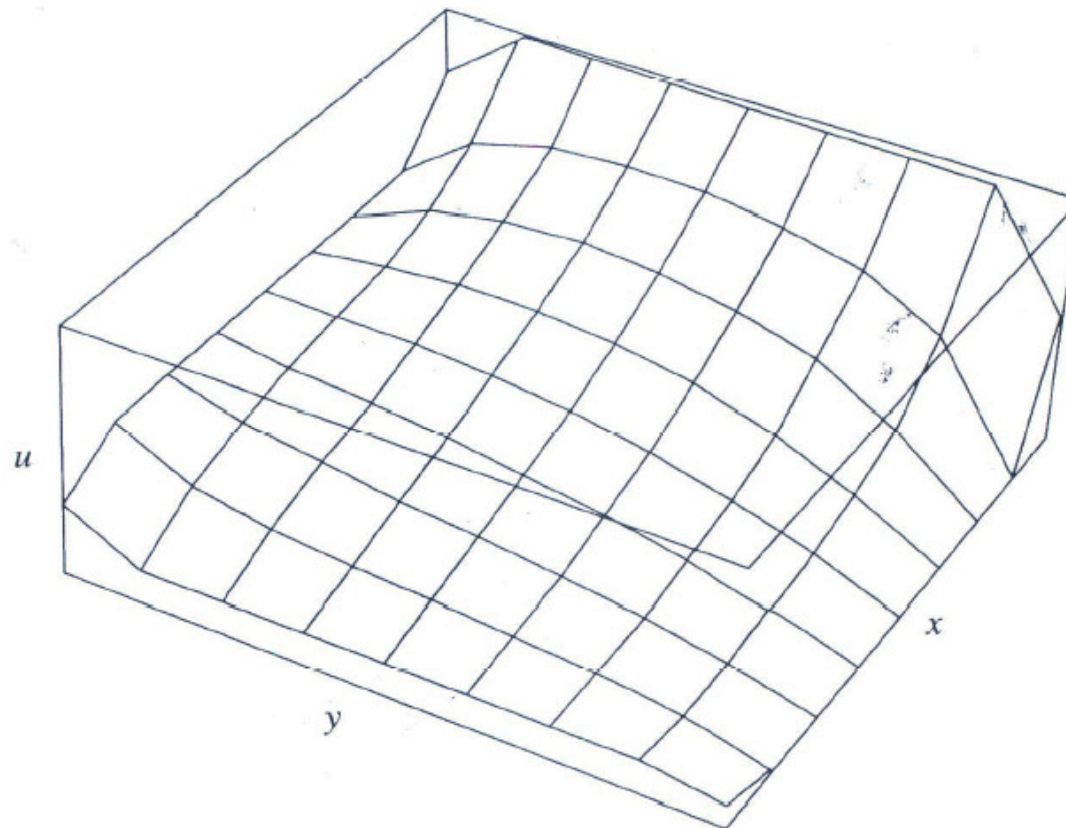
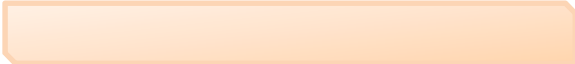


Figura 10.20 Solución $u = u(x, y)$ de un problema de Dirichlet.



Ejemplo uso método iterativo

Tabla 10.7 Solución aproximada de la ecuación de Laplace con condiciones de contorno mixtas.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
y_9	130.000	180.000	180.000	180.000	180.000	180.000	180.000	180.000	90.0000
y_8	80.000	126.457	142.311	146.837	145.468	138.762	123.583	89.1008	0.0000
y_7	80.000	103.518	115.951	119.568	116.270	105.999	86.4683	52.8201	0.0000
y_6	80.000	91.6621	98.4053	99.2137	94.0461	82.4936	63.4715	35.7113	0.0000
y_5	80.000	84.7247	86.7936	84.8347	78.2063	66.4578	49.2124	26.5538	0.0000
y_4	80.000	80.4424	79.2089	75.1245	67.4860	55.9185	40.3665	21.2915	0.0000
y_3	80.000	77.8354	74.4742	68.9677	60.6944	49.3635	35.0435	18.2459	0.0000
y_2	80.000	76.4244	71.8842	65.5772	56.9600	45.7972	32.1981	16.6485	0.0000
y_1	80.000	75.9774	71.0605	64.4964	55.7707	44.6670	31.3032	16.1500	0.0000

Ejemplo

CAP. 10 ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

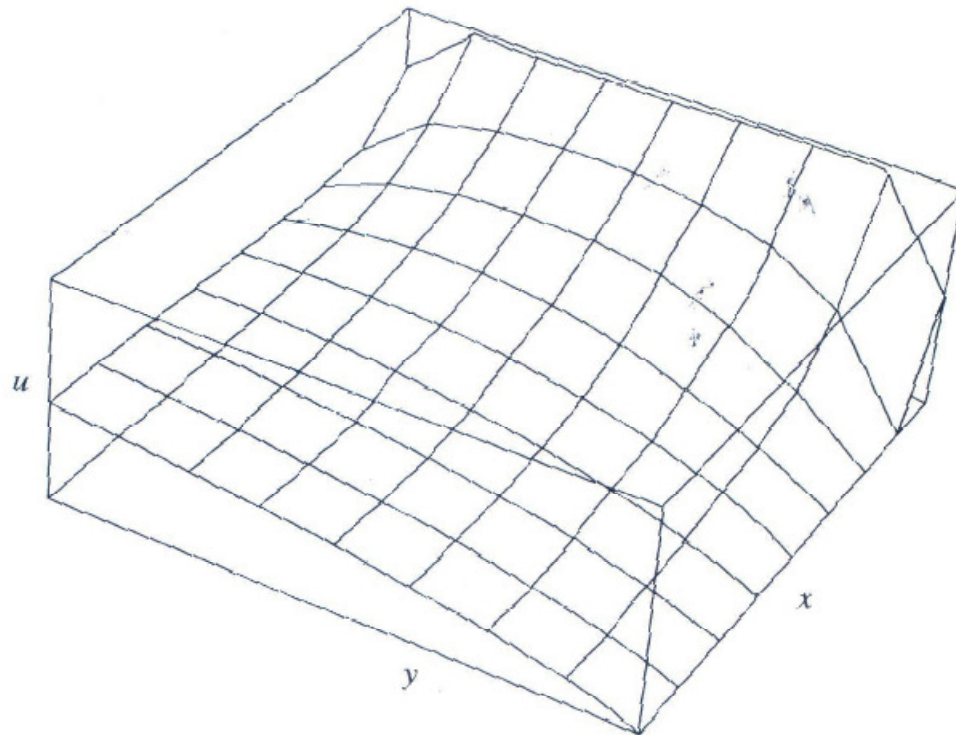


Figura 10.21 Solución $u = u(x, y)$ de un problema mixto.

EDPs elípticas más generales

Las ecuaciones de Poisson y Helmholtz

Consideremos la ecuación de Poisson

$$(28) \quad \nabla^2 u = g(x, y).$$

Usando la notación $g_{i,j} = g(x_i, y_j)$, la extensión de la fórmula (20) para resolver la ecuación (28) sobre una malla rectangular es

$$(29) \quad u_{i,j} = u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} - h^2 g_{i,j}}{4}.$$

Ec. Helmotz

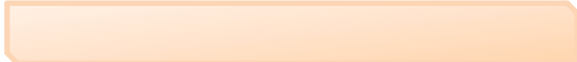
Consideremos la ecuación de Helmholtz

$$(30) \quad \nabla^2 u + f(x, y)u = g(x, y).$$

Usando la notación $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$, la extensión de la fórmula (20) para resolver la ecuación (30) sobre una malla rectangular es

$$(31) \quad u_{i,j} = u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - (4 - h^2 f_{i,j})u_{i,j} - h^2 g_{i,j}}{4 - h^2 f_{i,j}}.$$

Estas fórmulas se analizarán con más detalle en los ejercicios.



```

function [u,x,y] = poisson(f,g,bx0,bxf,by0,bf,D,Mx,My,tol,MaxIter)
% solve  $u_{xx} + u_{yy} + g(x,y)u = f(x,y)$ 
% over the region  $D = [x0,xf,y0,yf] = \{(x,y) | x0 \leq x \leq xf, y0 \leq y \leq yf\}$ 
% with the boundary Conditions:
%  $u(x0,y) = bx0(y), u(xf,y) = bxf(y)$ 
%  $u(x,y0) = by0(x), u(x,yf) = bf(x)$ 
% Mx = # of subintervals along x axis
% My = # of subintervals along y axis
% tol : error tolerance
% MaxIter: the maximum # of iterations
x0 = D(1); xf = D(2); y0 = D(3); yf = D(4);
dx = (xf - x0)/Mx; x = x0 + [0:Mx]*dx;
dy = (yf - y0)/My; y = y0 + [0:My]*dy;
Mx1 = Mx + 1; My1 = My + 1;
% Boundary conditions
for n = 1:My1, u(n,[1 Mx1])=[bx0(y(n)) bxf(y(n))]; end %left/right side
for n = 1:Mx1, u([1 My1],n) = [by0(x(n)); bf(x(n))]; end %bottom/top
% initialize as the average of boundary values
sum_of_bv = sum(sum([u(2:My,[1 Mx1]) u([1 My1],2:Mx)']));
u(2:My,2:Mx) = sum_of_bv/(2*(Mx + My - 2));
for i = 1:My
    for j = 1:Mx
        F(i,j) = f(x(j),y(i)); G(i,j) = g(x(j),y(i));
    end
end
dx2 = dx*dx; dy2 = dy*dy; dxy2 = 2*(dx2 + dy2);
rx = dx2/dxy2; ry = dy2/dxy2; rxy = rx*dy2;
for itr = 1:MaxIter
    for j = 2:Mx
        for i = 2:My
            u(i,j) = ry*(u(i,j+1)+u(i,j-1)) + rx*(u(i+1,j)+u(i-1,j))...
                + rxy*(G(i,j)*u(i,j) - F(i,j)); %Eq.(9.1.5a)
        end
    end
    if itr > 1 & max(max(abs(u - u0))) < tol, break; end
    u0 = u;
end

```

```

% solve_poisson in Example 1.1
f = inline('0','x','y'); g = inline('0','x','y');
x0 = 0; xf = 4; Mx = 20; y0 = 0; yf = 4; My = 20;
bx0 = inline('exp(y) - cos(y)','y'); % (E1.1.2a)
bxf = inline('exp(y)*cos(4) - exp(4)*cos(y)','y'); % (E1.1.2b)
by0 = inline('cos(x) - exp(x)','x'); % (E1.1.3a)
bf = inline('exp(4)*cos(x) - exp(x)*cos(4)','x'); % (E1.1.3b)
D = [x0 xf y0 yf]; MaxIter = 500; tol = 1e-4;
[U,x,y] = poisson(f,g,bx0,bxf,by0,bf,D,Mx,My,tol,MaxIter);
clf, mesh(x,y,U), axis([0 4 0 4 -100 100])

```