
Diferencias Finitas para problemas hiperbólicos

María Cecilia Rivara
2012

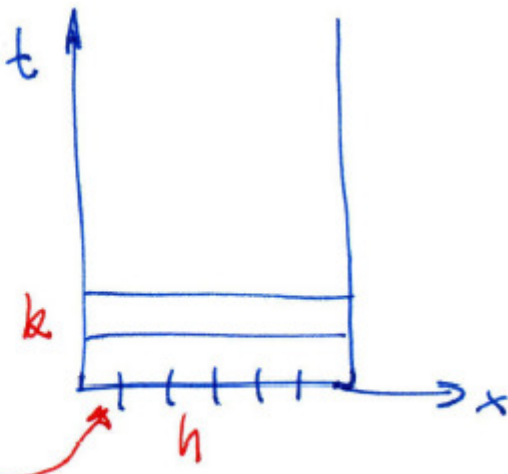
EDPS hiperbólicas

Ecuación de ondas cuerda elástica

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{longitud } a$$

c. borde $\begin{cases} u(0, t) = 0 & u(a, t) = 0 \end{cases} \quad t$

cond. $\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \text{inic.} \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$



Las fórmulas de diferencias centradas para aproximar $u_{tt}(x, t)$ y $u_{xx}(x, t)$ son

$$(3) \quad u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} + O(k^2)$$

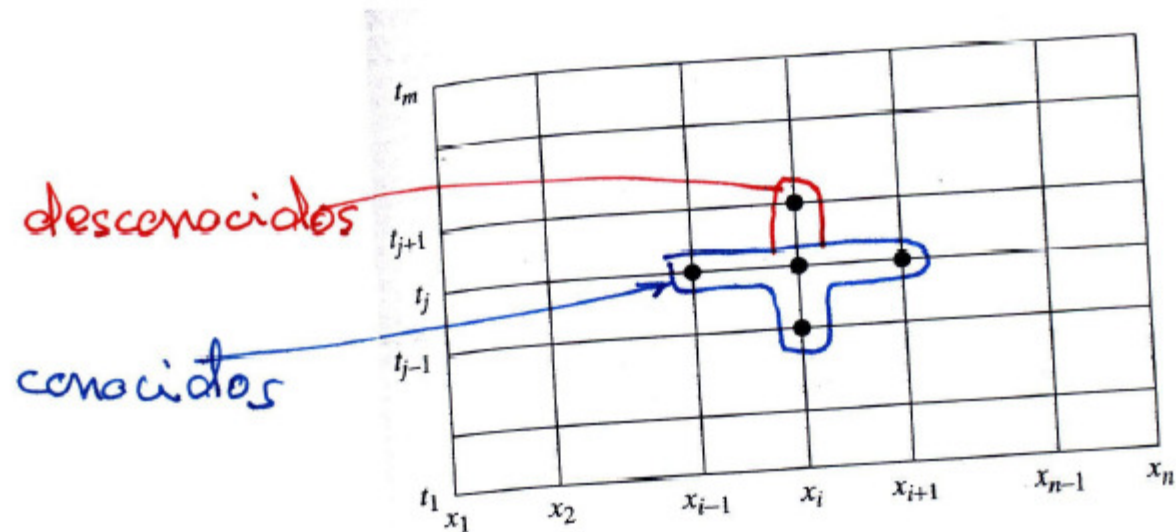
y

$$(4) \quad u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + O(h^2).$$

$$\Rightarrow \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad \text{EC. DIFERENCIAS}$$

Definiendo $r = ck/h$
y reordenando

$$\rightarrow u_{ij+1} = (2 - 2r^2) u_{ij} + r^2 (u_{i+1j} + u_{i-1j}) - u_{ij-1}$$
$$i = 2, 3, \dots, n-1$$



Fórmula **explícita**

- Requiere de los valores en **dos** filas anteriores
- Método es estable si **$r \leq 1$**
- Existen métodos totalmente estables que son más complejos

Necesitamos conocer u en la segunda fila para pasar a la tercera. ¿Cómo?

A) Solución simple: des Taylor

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + u_t(x_i, 0)k + O(k^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{i,2} = f_i + k g_i}$$

B) Mejor solución: asumir f dos veces derivable

$$u_{xx}(x_i, 0) = f''(x) = c^2 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{i,2} = (1-r^2)f_i + k g_i + \frac{r^2}{2}(f_{i+1} + f_{i-1})}$$

Ejemplo: cuerda vibrante

$$(19) \quad u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t) \quad \text{para } 0 < x < 1 \text{ y } 0 < t < 0.5,$$

con las condiciones de contorno

$$(20) \quad \begin{aligned} u(0, t) &= 0 \quad \text{y} \quad u(1, t) = 0 && \text{para } 0 \leq t \leq 0.5, \\ u(x, 0) &= f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) && \text{para } 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x, 0) &= g(x) = 0 && \text{para } 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Por conveniencia tomamos $h = 0.1$ y $k = 0.05$. Puesto que $c = 2$, entonces $r = ck/h = 2(0.05)/0.1 = 1$. Como $g(x) = 0$ y $r = 1$, la fórmula (13) para calcular los valores de la segunda fila queda

$$(21) \quad u_{i,2} = \frac{f_{i-1} + f_{i+1}}{2} \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, 9.$$

Sustituyendo $r = 1$ en la ecuación (7) obtenemos la ecuación en diferencias, ya simplificada,

$$(22) \quad u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}.$$

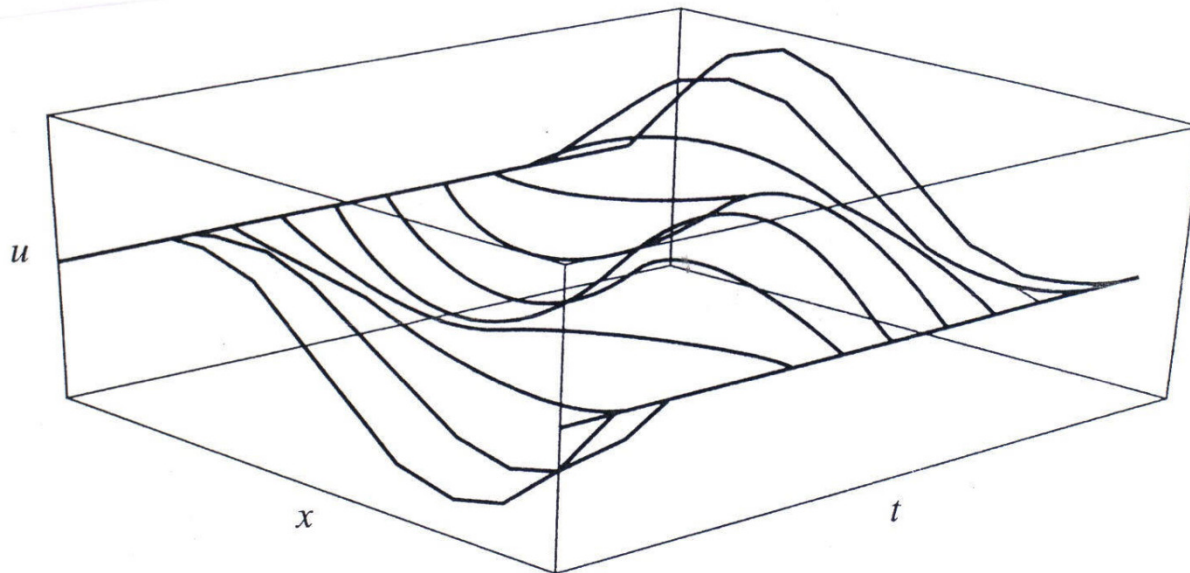


Figura 10.6 La cuerda vibrante de la ecuación (19) con las condiciones de contorno dadas en (20).

Estudiar Mathews - Fink