Método de diferencias finitas: discusión y EDPs parabólicas

María Cecilia Rivara

2011/2

Contenido

1. Discusión dificultades MDF para problemas elípticos complejos
2. Problemas evolutivos
3. Clasificación MDF: explícitos / implícitos, estables / inestables
4. MDF para EDPs parabólicas
   - método diferencias progresivas (explícito e inestable bajo ciertas condiciones
   - método Crank Nicholson (implícito y estable)

MDF para problemas elípticos complejos (1)

- El método numérico a utilizar y la discretización elegida SON CLAVES para obtener una solución numérica buena y con precisión aceptable.
- Si la discretización requerida es muy fina puede ser problemático visualizar con software tipo Matlab. Se recomienda:
  - seleccionar parte de los datos para visualizar (campos vectoriales por ejemplo)
  - hacer zoom para visualizar detalles.

MDF para problemas elípticos complejos (2)

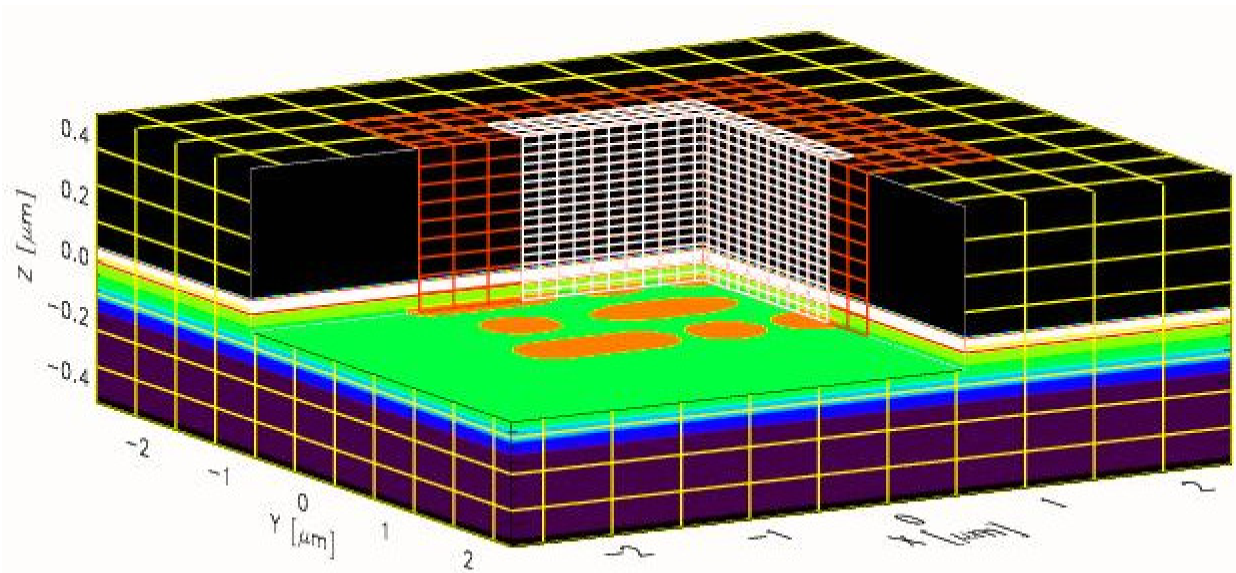
- Dificultades con geometrías con bordes curvos
  - definición de operadores de diferencias para bordes curvos (solución: brazos variables)
  - mala aproximación de condiciones de borde

MDF para problemas elípticos complejos (3)

- Si la discretización requerida es muy fina y el problema es muy grande, se necesita grilla / malla no uniforme para obtener solución numérica. Díficil de manejar con MDF.

Deseable mallas adaptivas!

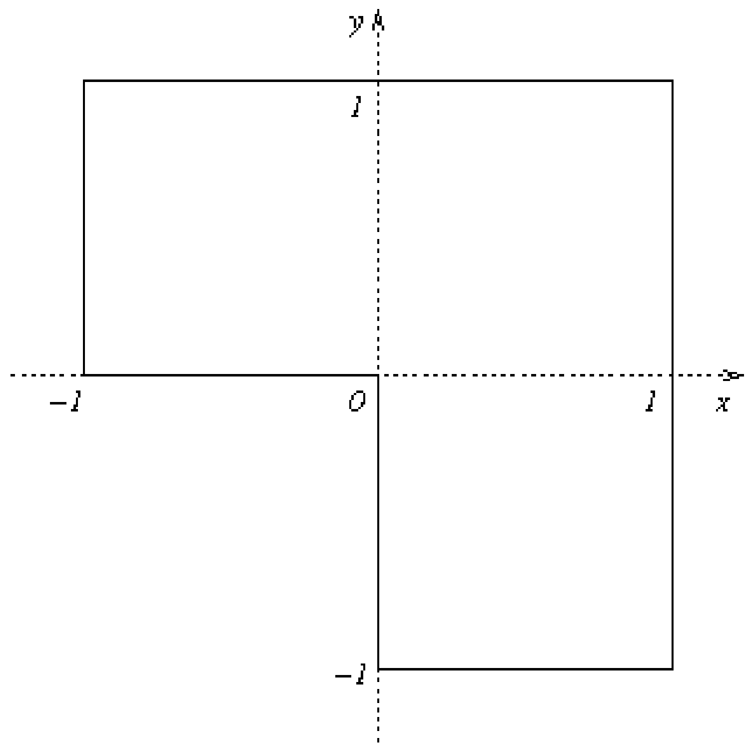
Malla no uniforme para MDF



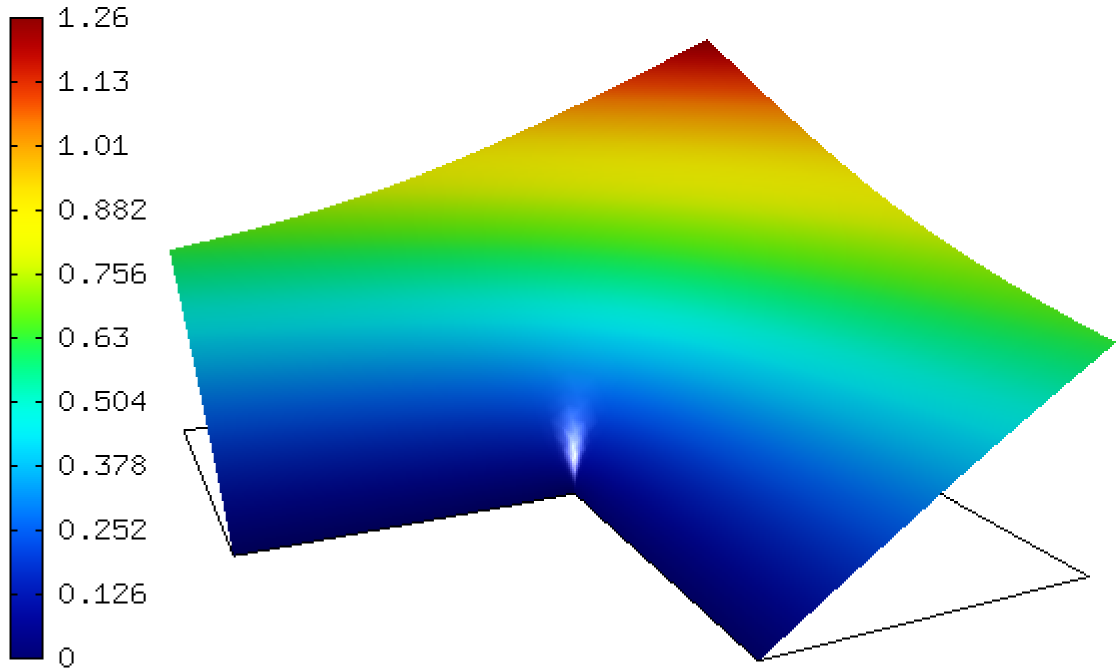
Método de Elementos Finitos (método alternativo)

- Más general y versátil. Más complejo matemática y computacionalmente.
- Usado ampliamente en software comercial para ingeniería.
- Módulo costoso en sistemas CAD

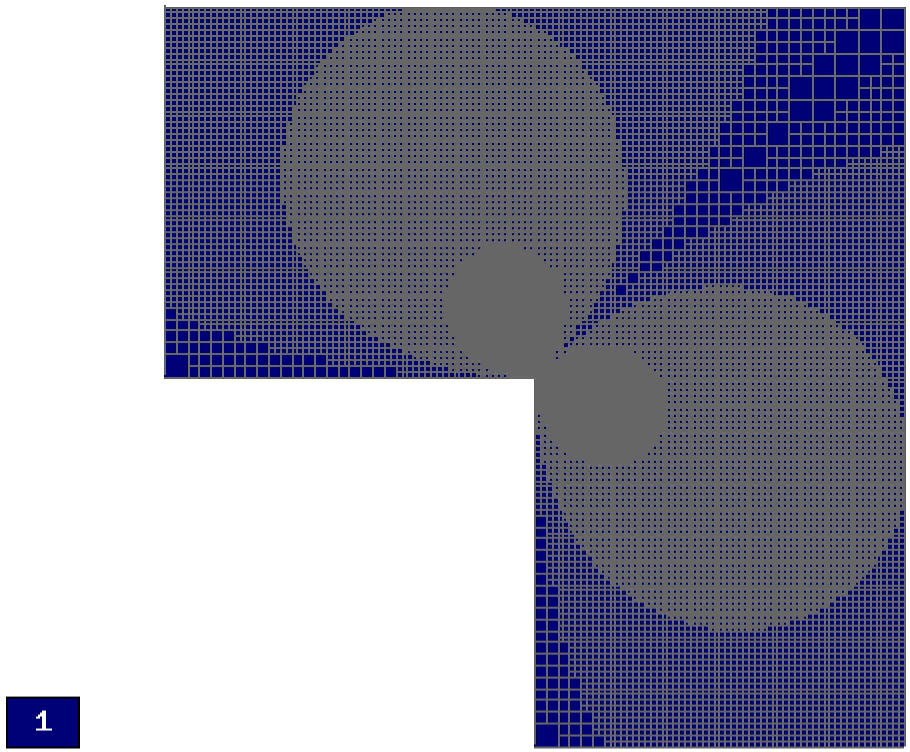
Ec. Laplace L-shaped region (benchmark)



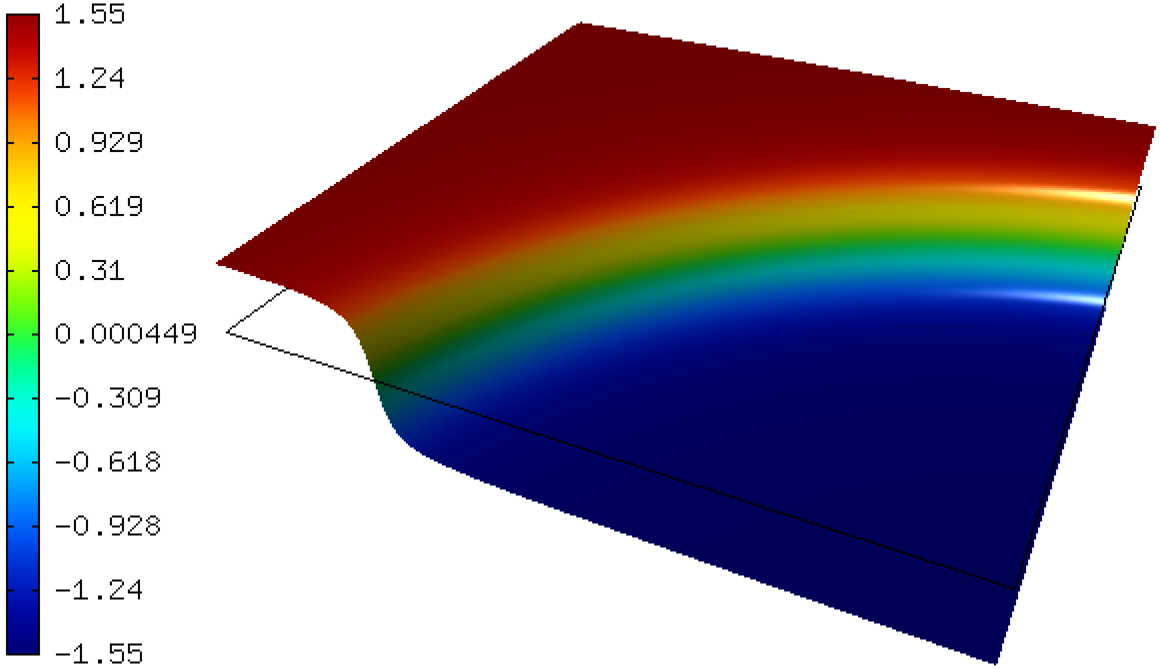
Solución casi singular en borde reentrante



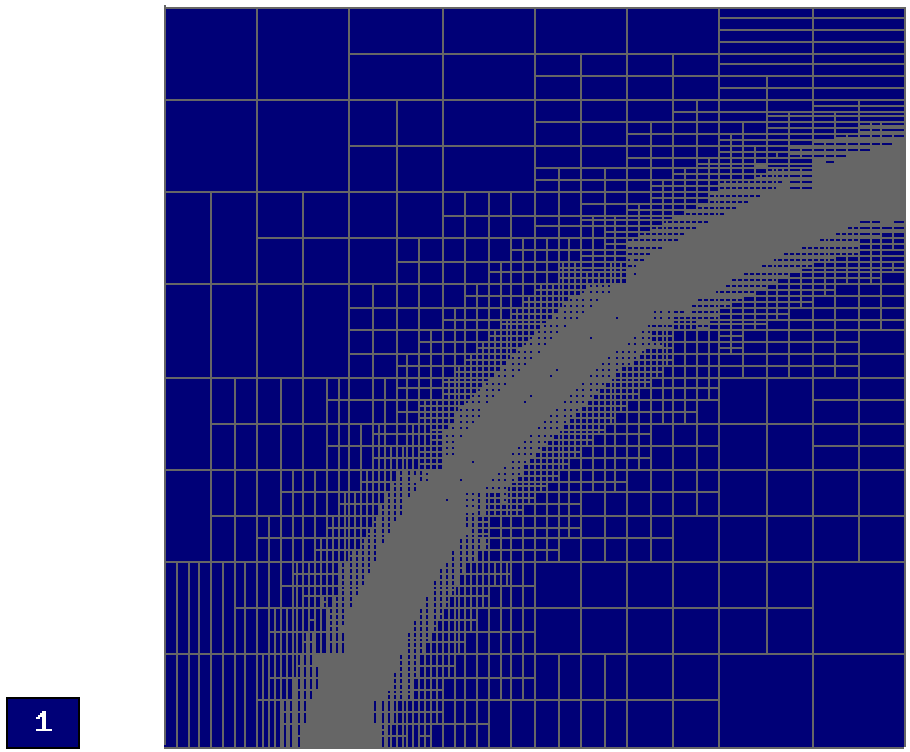
Una malla elementos finitos



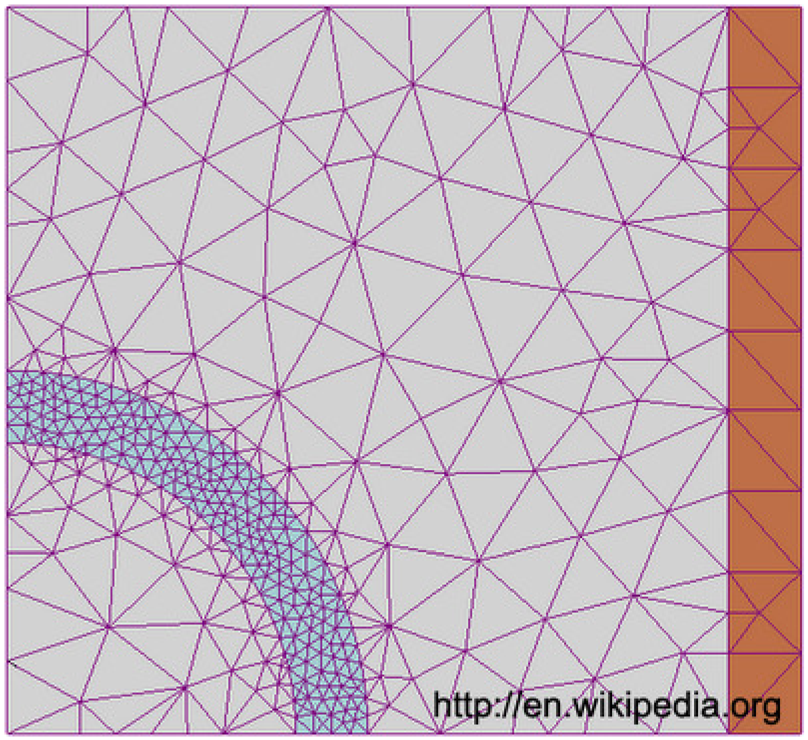
Poisson: solución con cambio rápido en el interior



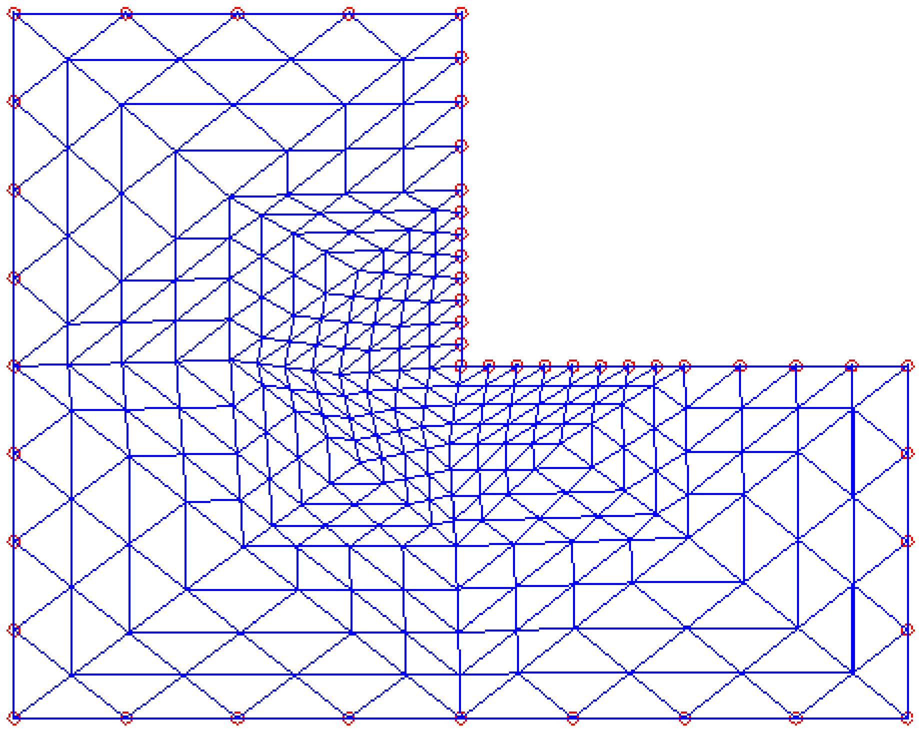
Malla de elementos finitos



Malla de elementos finitos



Malla de elementos finitos



MDF para problemas evolutivos

- EDPs parabólicas e hiperbólicas
- Se necesita discretizar en el tiempo y en el espacio
- Se avanza en *t* y se resuelve conjunto de ecs. diferencias finitas en el espacio ("equivalente a un problema estacionario") para cada tiempo

Clasificación de métodos de diferencias finitas

- Implícitos y explícitos:
  - Métodos implícitos: requieren resolver sistemas lineales (no lineales) de ecuaciones.
  - métodos explícitos: se puede “avanzar” en el tiempo punto a punto (sin resolver sistemas de ecs.)
- Métodos estables e inestables
  - Método estable: errores no se amplifican al avanzar en el tiempo
  - Método inestable da resultados incorrectas si es mal utilizado

Cuidado!

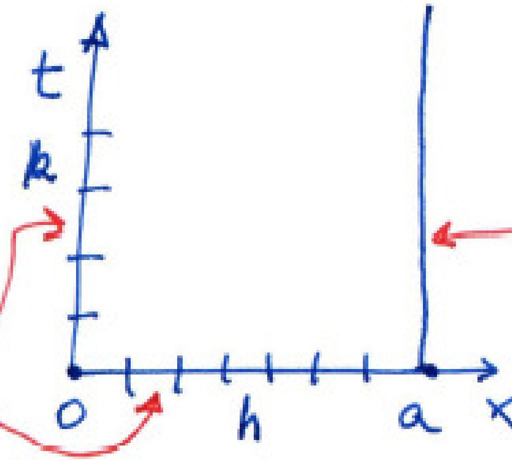
EDPs parabólicas

- Problemas evolutivos. Variables x, y, z, t
- Se discretiza en t y en variables espaciales
- Se avanza en t y se resuelven las ecs. de diferencias en el espacio

Ejemplo ecuación parabólica

ecuación del calor unidimensional

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$



cond. inicial:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) & t=0 \end{cases}$$

cond de borde o contorno

$$\begin{cases} u(0,t) = g_1(t) \\ u(a,t) = g_2(t) \end{cases}$$

alambre de largo $\underline{a}$

Método explícito de diferencias progresivas

Una ecuación de diferencias ec. calor

$$u_t := c^2 u_{xx}$$

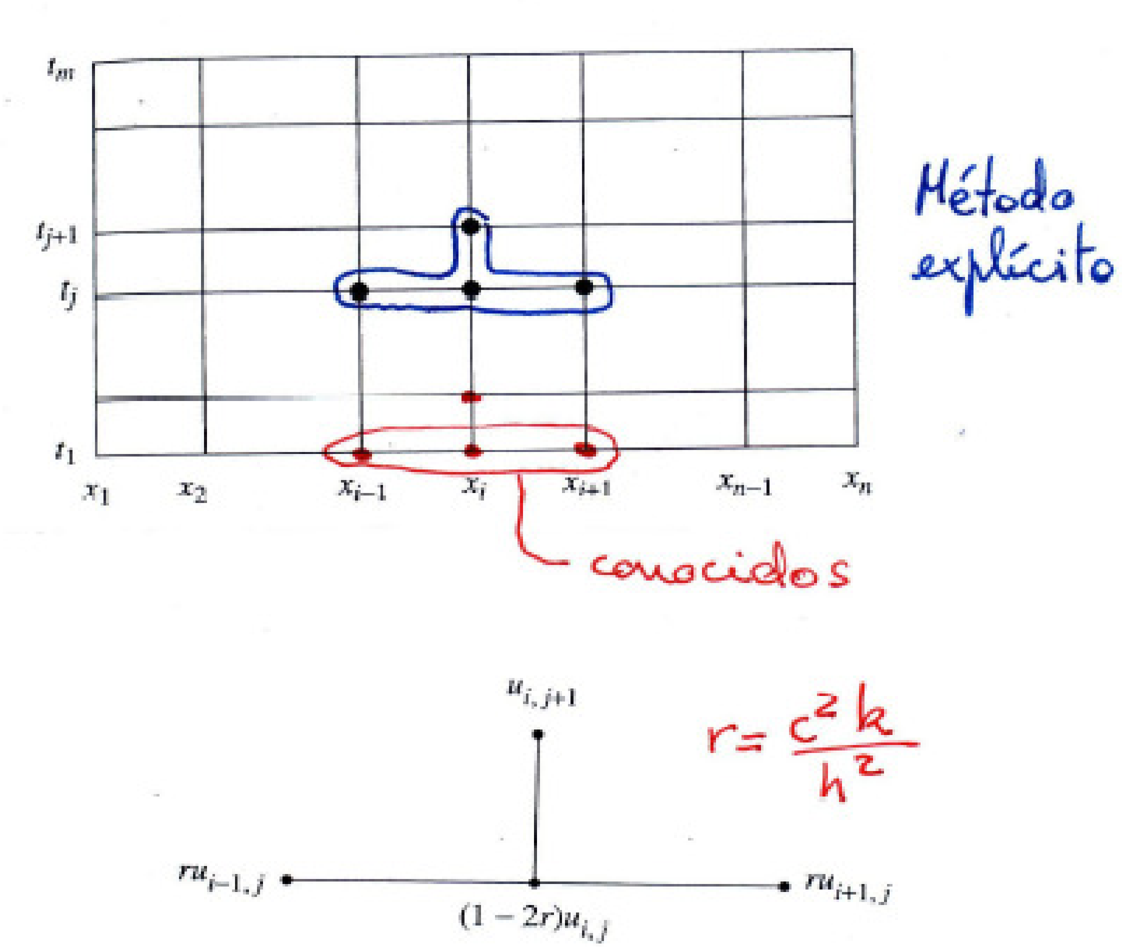
despejamos

$$\underbrace{\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{k}}_{O(k)} = \underbrace{c^2 \frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2}}_{O(h^2)}$$

$$(A)\left\{ u_{ij+1} = (1-2r)u_{ij} + r(u_{i-1j} + u_{i+1j})\right.$$

$$\boxed{r = c^2 k/h^2}$$ Cuidado!

Diagramas ec. de diferencias



Estabilidad

Método es estable si los errores introducidos en una fila (para un tiempo) se amortigua en las filas siguientes

Método explícito NO SIEMPRE ESTABLE

Cuidado! Fórmula (A) es estable si y solo si $\boxed{0 \leq r \leq 1/2}$

$\Rightarrow$ { requerimiento en k

$$k \leq h^2/(2c^2)$$

Si no se cumple los errores propagados en filas siguientes pueden amplificarse

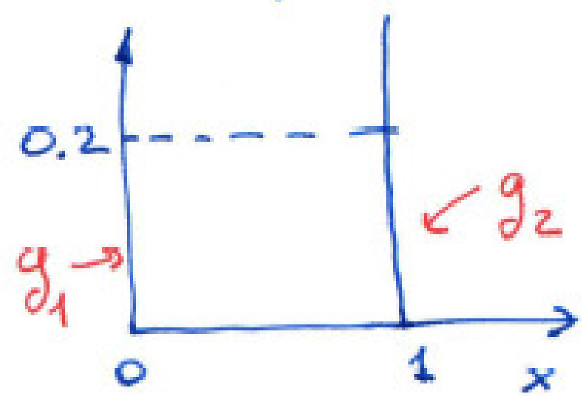
Ejemplo:

ec. calor, alambre de longitud 1, $c \equiv 1$

$u_t = u_{xx}$ cálculo hasta $t = 0.20$

c. inic $\left\{ u(x,0) = f(x) = 4x - 4x^2 \right.$ $t = 0,\ 0 \le x \le 1$

c. borde $\begin{cases} u(0,t) = g_1(t) = 0 \\ u(1,t) = g_2(t) = 0 \end{cases}$



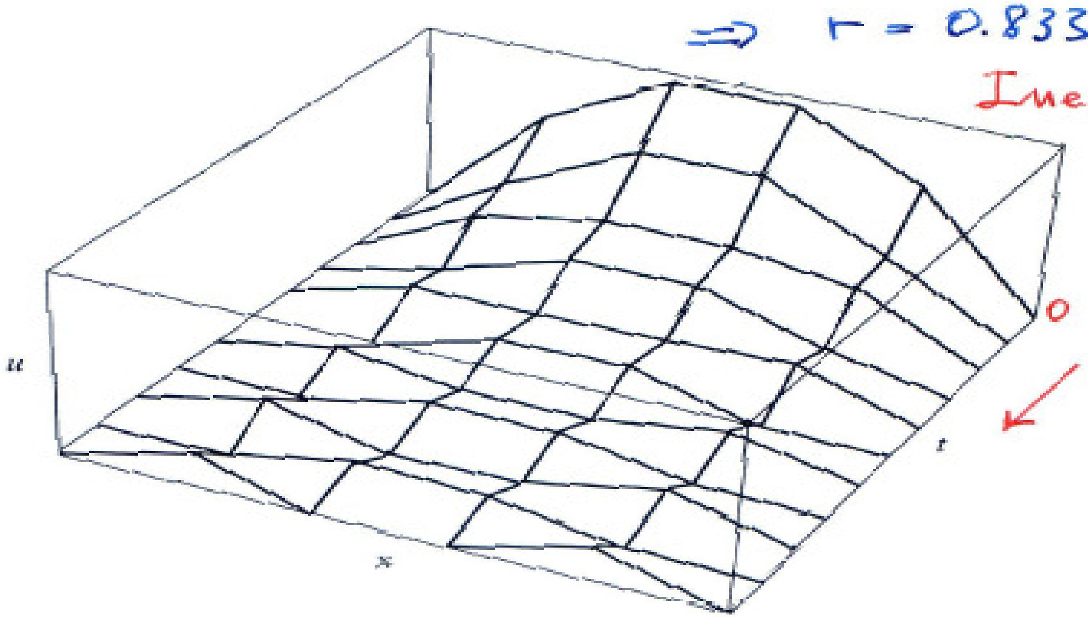
Comportamiento inestable

	$x_1 = 0.00$	$x_2 = 0.20$	$x_3 = 0.40$	$x_4 = 0.60$	$x_5 = 0.80$	$x_6 = 1.00$
$t_1 = 0.000000$	0.000000	0.640000	0.960000	0.960000	0.640000	0.000000
$t_2 = 0.033333$	0.000000	0.373333	0.693333	0.693333	0.373333	0.000000
$t_3 = 0.066667$	0.000000	0.328889	0.426667	0.426667	0.328889	0.000000
$t_4 = 0.100000$	0.000000	0.136296	0.345185	0.345185	0.136296	0.000000
$t_5 = 0.133333$	0.000000	0.196790	0.171111	0.171111	0.196790	0.000000
$t_6 = 0.166667$	0.000000	0.011399	0.192510	0.192510	0.011399	0.000000
$t_7 = 0.200000$	0.000000	0.152826	0.041584	0.041584	0.152826	0.000000
$t_8 = 0.233333$	0.000000	−0.067230	0.134286	0.134286	−0.067230	0.000000
$t_9 = 0.266667$	0.000000	0.156725	−0.033644	−0.033644	0.156725	0.000000
$t_{10} = 0.300000$	0.000000	−0.132520	0.124997	0.124997	−0.132520	0.000000
$t_{11} = 0.333333$	0.000000	0.192511	−0.089601	−0.089601	0.192511	0.000000

$h = 0.2 \quad k = 1/30 = 0.033333$

$\Rightarrow \quad r = 0.833333$

Inestable!



Comportamiento estable

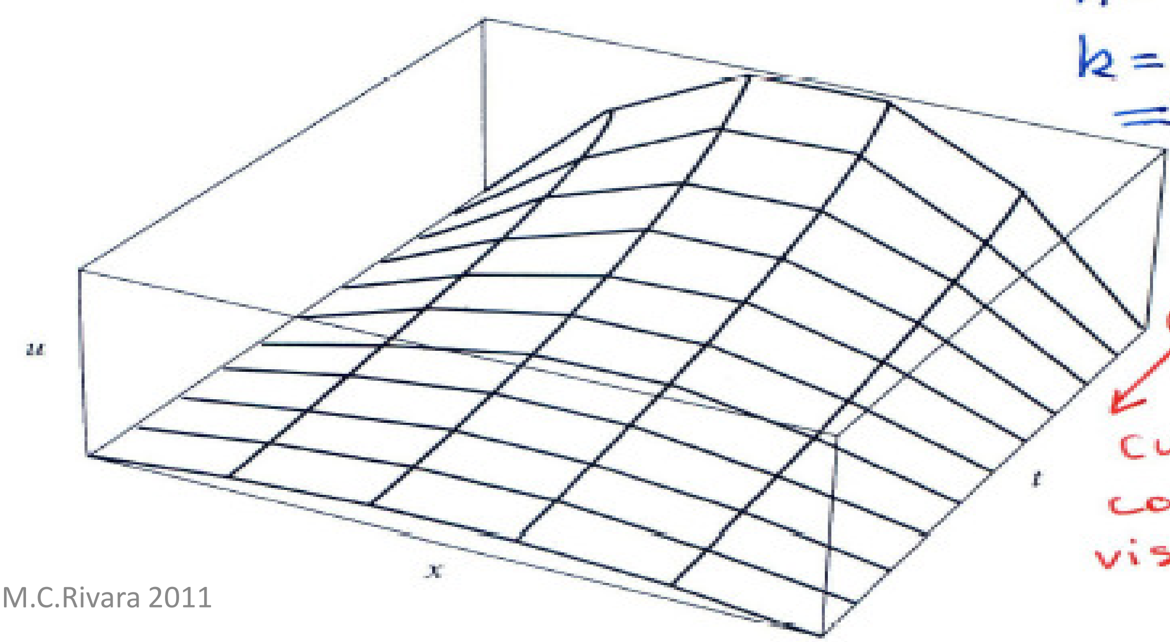
	$x_1 = 0.00$	$x_2 = 0.20$	$x_3 = 0.40$	$x_4 = 0.60$	$x_5 = 0.80$	$x_6 = 1.00$
$t_1 = 0.00$	0.000000	0.640000	0.960000	0.960000	0.640000	0.000000
$t_2 = 0.02$	0.000000	0.480000	0.800000	0.800000	0.480000	0.000000
$t_3 = 0.04$	0.000000	0.400000	0.640000	0.640000	0.400000	0.000000
$t_4 = 0.06$	0.000000	0.320000	0.520000	0.520000	0.320000	0.000000
$t_5 = 0.08$	0.000000	0.260000	0.420000	0.420000	0.260000	0.000000
$t_6 = 0.10$	0.000000	0.210000	0.340000	0.340000	0.210000	0.000000
$t_7 = 0.12$	0.000000	0.170000	0.275000	0.275000	0.170000	0.000000
$t_8 = 0.14$	0.000000	0.137500	0.222500	0.222500	0.137500	0.000000
$t_9 = 0.16$	0.000000	0.111250	0.180000	0.180000	0.111250	0.000000
$t_{10} = 0.18$	0.000000	0.090000	0.145625	0.145625	0.090000	0.000000
$t_{11} = 0.20$	0.000000	0.072812	0.117813	0.117813	0.072812	0.000000

$h = 0.2$

$k = 0.02$

$\Rightarrow r = 0.5$

Estable!



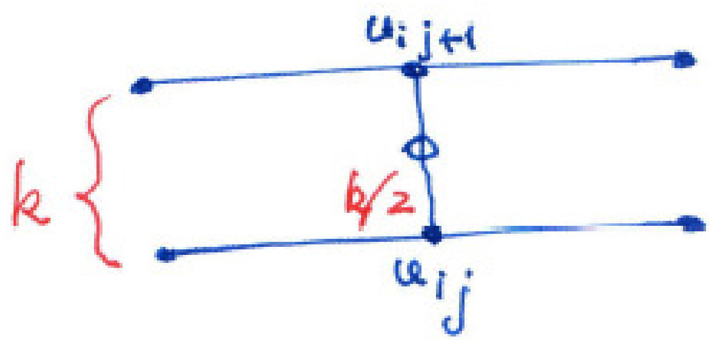
0

cuidado
con
visualización

Método de Crank-Nicholson (1)

Método implícito y estable

- Se usa aproximación en punto intermedio situado entre dos filas de la grilla
  - $u_t\left(x, x+\frac{k}{2}\right) = \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} + O(k^2)$



Método de Crank-Nicholson (2)

- $$u_{xx}(x, t+k/2) = \left(u_{xx}(x, t) + u_{xx}(x, t+k)\right]/2$$

$$= \frac{1}{2h^2}\Big[u(x-h, t+k) - 2u(x, t+k) + u(x+h, t+k)$$
$$+ u(x-h, t) - 2u(x, t) + u(x+h, t)\Big]$$
$$+ O(h^2)$$

Ecuación de diferencias Crank-Nicholson

Usando aproximaciones de diferencia en la ec. del calor $\Rightarrow$

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{k} = c^2 \, \frac{u_{i-1\,j+1} - 2u_{ij+1} + u_{i+1\,j+1} + u_{i-1\,j} - 2u_{ij} + u_{i+1\,j}}{2h^2}$$

$r = c^2 k / h^2$ despejamos valores por calcular en fila $j+1$

DIFERENCIAS

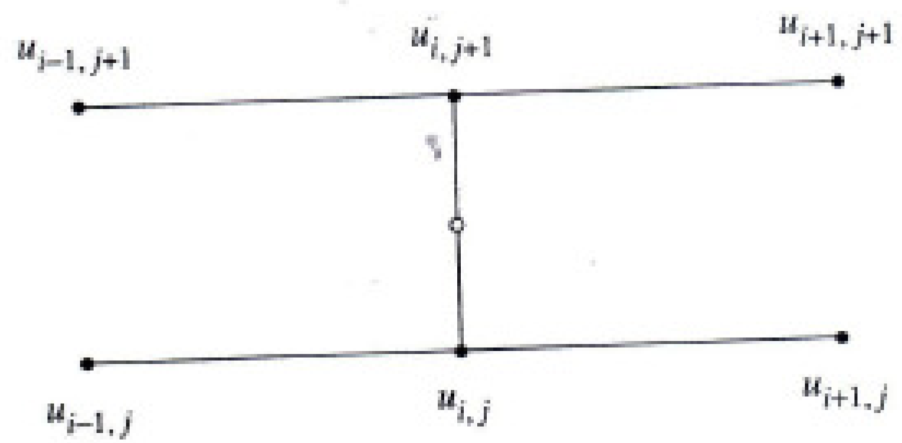
EC. IMPLICITA

3 incógnitas

$$\boxed{\begin{aligned} -r u_{i-1\,j+1} + (2-2r) u_{ij+1} - r u_{i+1\,j+1} &= \\ &= (2-2r) u_{ij} + r(u_{i-1\,j} + u_{i+1\,j}) \end{aligned}}$$

Diagrama de diferencias finitas

Se escribe ecuación en punto intermedio en función de puntos de la grilla



- Sistema lineal tridiagonal $Ax = B$
- se resuelve para cada fila j

Ecuaciones Crank-Nicholson, r=1

Caso especial $r = 1$

$$\Longrightarrow \quad \Delta t = k = h^2/c^2$$

ecuación de diferencias se simplifica a

$$-u_{i-1\,j+1} + 4u_{ij+1} - u_{i+1\,j+1} = u_{i-1\,j} + u_{i+1\,j}$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ec. } 1 & u_{1j} = u_{1\,j+1} = c_1 \\ \text{ec. } n & u_{nj} = u_{n\,j+1} = c_2 \end{array}\right\} \text{condiciones de contorno}$$

Sistema Crank-Nicholson, r=1

Sistema tridiagonal $AX=B$ para
Crank-Nicholson, $r=1$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & O & \\ & & \ddots & & & & \\ & & -1 & 4 & -1 & & \\ & & & & \ddots & & \\ & O & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{i,j+1} \\ \vdots \\ u_{n-2,j+1} \\ u_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 + u_{3,j} \\ u_{2,j} + u_{4,j} \\ \vdots \\ u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \\ \vdots \\ u_{n-3,j} + u_{n-1,j} \\ u_{n-2,j} + 2c_2 \end{bmatrix}$$

Se resuelve por
- métodos directos o
- métodos iterativos

Ejemplo

Ejemplo 10.4. Vamos a usar el método de Crank-Nicholson para resolver la ecuación

(18) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad \text{para } 0 < x < 1 \text{ y } 0 < t < 0.1,$$

con las condiciones iniciales

(19) $$u(x,0) = f(x) = \text{sen}(\pi x) + \text{sen}(3\pi x) \quad \text{para } t = 0 \text{ y } 0 \leq x \leq 1,$$

y las condiciones de contorno

$$u(0,t) = g_1(t) \equiv 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ y } 0 \leq t \leq 0.1,$$
$$u(1,t) = g_2(t) \equiv 0 \quad \text{para } x = 1 \text{ y } 0 \leq t \leq 0.1.$$

Solución Crank-Nicholson 11x11

$\Delta x = h = 0.1$ $\quad\quad$ $\Delta t = k = 0.01 \Rightarrow r = 1$

$n = 11$ valores en dirección x

$m = 11$ filas de cálculo

Las aproximaciones obtenidas con el método de Crank-Nicholson son buenas aproximaciones de los valores exactos

$$u(x,t) = \text{sen}(\pi x)e^{-\pi^2 t} + \text{sen}(3\pi x)e^{-9\pi^2 t}$$

que, en la última fila, son

t_{11}	0.115285	0.219204	0.301570	0.354385	0.372569	0.354385	0.301570	0.219204	0.115285

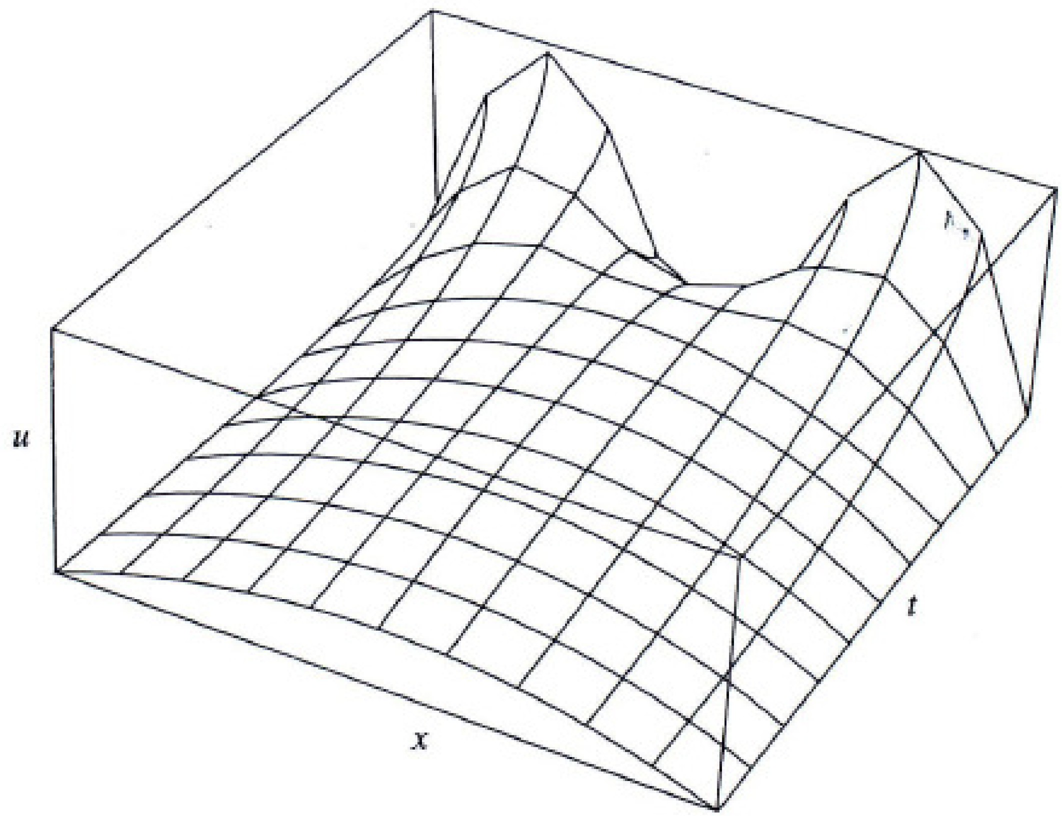


Figura 10.13 $u = u(x_i, t_j)$ obtenidos con el método de Crank-Nicholson.

Tabla 10.5 Los valores $u(x_i, t_i)$ obtenidos con el método de Crank-Nicholson para $t_j = (j-1)/100$.

	$x_2 = 0.1$	$x_3 = 0.2$	$x_4 = 0.3$	$x_5 = 0.4$	$x_6 = 0.5$	$x_7 = 0.6$	$x_8 = 0.7$	$x_9 = 0.8$	$x_{10} = 0.9$
t_1	1.118034	1.538842	1.118034	0.363271	0.000000	0.363271	1.118034	1.538842	1.118034
t_2	0.616905	0.928778	0.862137	0.617659	0.490465	0.617659	0.862137	0.928778	0.616905
t_3	0.394184	0.647957	0.718601	0.680009	0.648834	0.680009	0.718601	0.647957	0.394184
t_4	0.288660	0.506682	0.625285	0.666493	0.673251	0.666493	0.625285	0.506682	0.288660
t_5	0.233112	0.425766	0.556006	0.625082	0.645788	0.625082	0.556006	0.425766	0.233112
t_6	0.199450	0.372035	0.499571	0.575402	0.600242	0.575402	0.499571	0.372035	0.199450
t_7	0.175881	0.331490	0.451058	0.525306	0.550354	0.525306	0.451058	0.331490	0.175881
t_8	0.157405	0.298131	0.408178	0.477784	0.501545	0.477784	0.408178	0.298131	0.157405
t_9	0.141858	0.269300	0.369759	0.433821	0.455802	0.433821	0.369759	0.269300	0.141858
t_{10}	0.128262	0.243749	0.335117	0.393597	0.413709	0.393597	0.335117	0.243749	0.128262
t_{11}	0.116144	0.220827	0.303787	0.356974	0.375286	0.356974	0.303787	0.220827	0.116144

Referencia

- libro Mathews-Fink
- aquí encontrará también programas en Matlab