Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departameto de Ciencias de la Computación

CC3501 - Computación Gráfica, Visualización y Modelación para Ingenieros
Prof. María Cecilia Rivara

Diferencias Finitas - EDP

Auxiliar 2

Universidad de Chile
Facultad de Cs. Física y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación
CC3501 - Computación Gráfica, Visualización y Modelación para Ingenieros

Contenido

Diferencias Finitas I

Dado un dominio discreto, se aplican operadores de diferencias

Operador	Aproximación	Discreto
$f'(x)$	$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$	$\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}$
$f''(x)$	$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$	$\frac{f_{i+1}+f_{i-1}-2f_i}{h^2}$
$f'''(x)$	$\frac{f(x+2h)-f(x+h)-2f(x-h)-f(x-2h)}{2h^3}$	$\frac{f_{i+2}-f_{i+1}+2f_{i-1}-f_{i-2}}{2h^3}$

Ecuación de Laplace

Se tiene la ecuación de Laplace continua

$$\nabla^2\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0 \quad (1)$$

Utilizando Diferencias Finitas, se obtiene su versión discreta.

$$\frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j}}{h_x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j}}{h_y^2} \quad (2)$$

Diferencias Finitas II

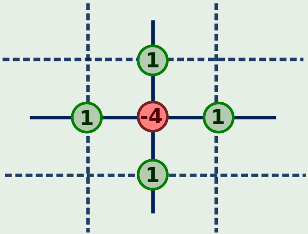
Ecuación de Laplace

Utilizando Diferencias Finitas con $h_x = h_y = h$.

$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 0 \tag{3}$$

Diagrama de coeficientes

Se utiliza un diagrama para detallar las dependencias de la ecuación



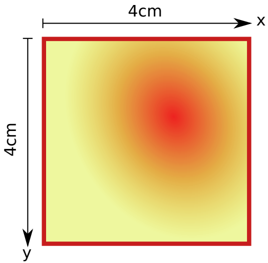
Algoritmo

- **Discretizar el problema.**
  - Discretizar ecuaciones: diferencias finitas.
  - Discretizar dominio: matriz que aproxima el dominio.
  - Definir y contabilizar incógnitas.
- **Plantear ecuaciones punto por punto**
  - Se tienen N ecuaciones y N incógnitas
  - Crear un sistema de ecuaciones lineales de NxN.
- **Resolver el problema**
  - Encontrar vector solución del sistema lineal
  - Traspasar vector al dominio 2D
- **Visualización científica**

Ejemplo

Problema

Utilizando Matlab implemente una función que permita obtener la temperatura en cada punto de la placa mediante la resolución de la ecuación de Laplace con condiciones de borde tipo Dirichlet utilizando el método de diferencias finitas.

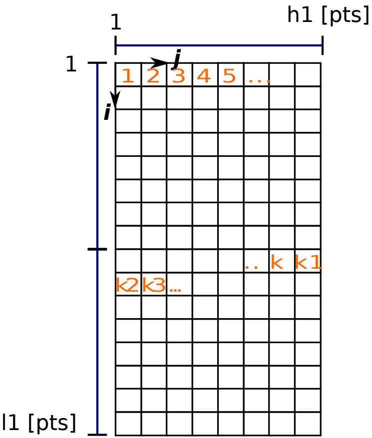


$$u(0,x) = e^x - cos(y)$$
$$u(4,x) = e^x cos(4) - e^4 cos(x)$$
$$u(0,y) = cos(y) - e^y$$
$$u(y,4) = e^4 cos(y) - e^x cos(4)$$

Discretizar y enumerar incógnitas

Se debe discretizar el dominio y definir las incógnitas presentes. Se enumeran para posteriormente plantear las ecuaciones.

- Definir longitudes y zonas.
- Establecer condiciones de borde.
- Crear matriz con dominio discreto.
- Llenar matriz: cada punto que pertenece al dominio (incógnita) se enumera de forma consecutiva.
- Obtener el total de incógnitas.



Actividad [5 min]

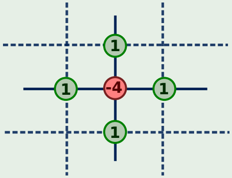
Crear una rutina que discretize el dominio del problema y cree la matriz con las incógnitas enumeradas. Utilice la función `spy(Matrix)` para comprobar el resultado.

Tipos de incógnita I

Al plantear la ecuación de Laplace para cada incógnita se comprueba que se presentan algunos casos típicos. Se producen al aplicar condiciones de borde para aquellos puntos requeridos pero que escapan del dominio discretizado.

Punto interior

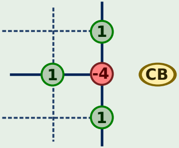
$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 0 \tag{4}$$



Tipos de incógnita II

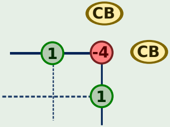
Punto Borde

$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} - 4\varphi_{i,j} = -CB \quad (5)$$



Punto Esquina

$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1} - 4\varphi_{i,j} = -CB1 - CB2 \quad (6)$$



Plantear ecuaciones

- Cada punto de la grilla tiene su propia ecuación, formando un sistema lineal de la forma

Incognita	**Punto**	**Ecuación**
1	(1,1)	$\varphi_{2,1} + \varphi_{1,2} - 4\varphi_{1,1} = c1$
...	...	...
k	(i,j)	$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 0$
...	...	...

- Se expresa como un sistema matricial. Sólo basta especificar los coeficientes de cada ecuación.

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Plantear sistema de ecuaciones

Actividad [20 min]

Implemente una rutina que recorra punto por punto el dominio discreto y dependiendo del tipo de incógnita agregue el coeficiente adecuado al sistema matricial.

- Inicializar matriz A y vector B. Use matrices dispersas.
- Iniciar un recorrido por toda el dominio.
- Para cada ecuación/incógnita separe los posibles casos.
- Agregue los coeficientes para cada ecuación.

```
%% Borde superior
elseif(i==1)
%disp('BS')
A(k,G(i,j+1))=1;
A(k,G(i,j-1))=1;
A(k,G(i+1,j))=1;
B(k)=B(k)-cb_top(j);
```

Resolver Sistema

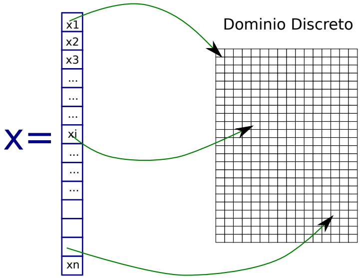
Sistema de ecuaciones lineales

Dado un sistema de la forma $A * \vec{x} = \vec{b}$ se utiliza eliminación gaussiana para resolverlo en Matlab.

```
>> x=A\b
```

Actividad [10 min]

Implemente la rutina que copia cada valor del vector de resultados en su correspondiente posición de la matriz del dominio discretizado. Visualice de forma gráfica este resultado.



Resultados

Funciones útiles: `surf`, `pcolor`, `contour`, `quiver`.