# Auxiliar 3: Matemáticas Discretas para la Computación

Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Javiera Urrutia - Mauro Escobar
11 de abril de 2012

**P1.** Demuestre que

(i) Si $n$ es un entero positivo, 133 divide a $11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

(ii) Para $a, b$ números reales tales que $0 < b < a$,

$$a^n - b^n \leq na^{n-1}(a-b), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

**P2.** Pruebe que todo entero positivo $n$ puede ser escrito como la suma de distintas potencias de 2.

**P3.** El conjunto $B$ de los strings de paréntesis *balanceados* se define recursivamente como sigue:

- el string vacío $\epsilon$ está en $B$, y
- si $x, y \in B$, entonces $(x)$ y $xy$ pertenecen a $B$.

Definimos la función $N$ en el **conjunto de strings de paréntesis** de la siguiente forma:

$$N(\epsilon) = 0; \quad N(() = 1; \quad N()) = -1;$$

$$N(uv) = N(u) + N(v).$$

(i) Demuestre usando inducción estructural que si un string de paréntesis $w$ es balanceado, entonces $N(w) = 0$ y $N(u) \geq 0$ para todo prefijo $u$ de $q$, i.e. para todo $u$ tal que $w = uu'$.

(ii) Demuestre usando inducción estructural que si un string de paréntesis satisface que $N(w) = 0$ y $N(u) \geq 0$ para todo prefijo $u$ de $w$, entonces $w$ es balanceado.

**P4.** Una descomposición de Fibonacci de $n$ es un conjunto de números los cuales cumplen que

- aparecen en la secuencia de Fibonacci,
- no aparecen consecutivos en la secuencia de Fibonacci, y
- la suma de todos ellos es $n$.

Demuestre que todo $n \geq 1$ tiene una descomposición de Fibonacci.

**P5.** Sea $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ el dominio constructible de las listas de números naturales.

(i) Defina de manera inductiva el operador de sufijo extendido, $Suf^* : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ qye toma una lista $L$ y un número natural $n$ y entrega el sufijo de largo $n$ de L.

(i) Demuestre, usando las definiciones de concatenación y largo de una lista que siempre ocurre que

$$Suf^*(L_1 \circ L_2, |L_2|) = L_2.$$

**P6.** Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por las condiciones

$$\begin{aligned} f(0, y) &= y + 1 \\ f(x+1, 0) &= f(x, 1) \\ f(x+1, y+1) &= f(x, f(x+1, y)). \end{aligned}$$

Demuestre que $f$ está definida en todos los pares $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
**Hint:** Realice inducción sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con el orden definido por $(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2) \iff (x_1 \leq x_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)$.

**P7.** Demuestre que si se tiene un conjunto de $n$ rectas en el plano, tal que no hay dos paralelas ni tres concurrentes (tres que se intersectan en el mismo punto), entonces ellas dan lugar a $(n^2 + n + 2)/2$ regiones.

**P8.** Demuestre que para todo $i, j \geq 1$, cualquier tablero de dimensiones $2i \times 3j$ se puede cubrir con piezas en forma de `L`.

**P9.** Los números de Fibonacci están dados por la recurrencia $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n \geq 2$. Denotamos por $F_i$ al $i$-ésimo número de Fibonacci. Demuestre que $\forall n, k \geq 1$

$$F_k F_n + F_{k+1} F_{n+1} = F_{n+k+1}.$$

**P10.** Demuestre usando inducción que $\sqrt{2}$ no es racional.

**P11.** Demuestre que para todo $n \geq 1$, si consideramos el tablero de $2^n \times 2^n$ casilleros y eliminamos un casillero arbitrario del tablero, entonces puede ser cubierto con piezas que ocupan 3 casilleros y tienen forma de `L`.

**P12.** Demuestre que para todo $n$, si escogemos $n$ naturales consecutivos arbitrarios, entonces el producto de ellos es divisible por $n!$.

**P13.** Demuestre usando inducción que si $I_1, I_2, \ldots, I_n$ es una colección de intervalos abiertos sobre los números reales, $n \geq 2$, y para cada $1 \leq i, j \leq n$ se tiene que $I_i \cap I_j \neq \emptyset$, entonces $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n \neq \emptyset$. (Recuerde que un intervalo abierto de números reales es un conjunto de números reales $x$ tal que $a < x < b$, donde $a$ y $b$ son números reales con $a < b$).