Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería de Minas
MI3010 Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva

Pauta Problema 2, Control 2

(a))(1,2 pto)Ambos modelos permiten simplificar el cálculo de los perfiles de temperatura en función de ciertas condiciones.

Método de capacitancia de Masa (0,6 pto):
Supone que la energía se distribuye uniformemente a través del cuerpo en todo momento, de manera que no existe un gradiente de energía, pudiendo modelar al sistema como una unidad simple, o masa uniforme con igual temperatura en todo punto. Lo anterior se traduce en que la transferencia de calor por conducción (dentro del cuerpo) es mucho mayor que la convección en el exterior, por lo que los cambios de temperatura en la frontera se extenderán a lo largo de todo el cuerpo, obteniendo una temperatura uniforme en el sistema. Este método se puede aplicar con un 5% de error cuando el número de Biot (Bi) es menor a 0,1.
Se usa generalmente para modelar sistemas eléctricos, como alambres delgados.

Método de sólido semi infinito (0,6 pto):
Supone que la transferencia de calor ocurre solo en la frontera de interacción del cuerpo con el ambiente, de manera que los cambios solo se provocan en la frontera y no se extienden a lo largo del cuerpo, de manera que lejos de la frontera la temperatura permanece constante e igual a la temperatura inicial del cuerpo. Lo anterior puede ocurrir cuando el tiempo de transferencia es reducido o el sistema es muy grande. Este modelo puede aplicarse con un 5% de error cuando el número de Fourier es menor a 0,1.
Se usa, por ejemplo, cuando la superficie de un material con baja difusividad térmica se expone con un fluido a T constante o con un metal de alta conductividad térmica.

(b) (1,2 pto) Se debe determinar el perfil de temperaturas para un cable con las siguientes características:

- Radio r
- Resistividad eléctrica o
- 2 aislantes concéntricos con espesores δ_1 y δ_2, junto con conductividades térmicas k_1 y k_2.

Se tiene entonces:

Calor como consecuencia de la transmisión de corriente (0,3 pto):

$$q(W) = R \cdot I^2 = \frac{o \cdot L}{\pi \cdot r^2} \cdot I^2$$

Calor transferido entre las capas de aislante hasta el ambiente, en coordenadas cilíndricas (0,3 pto):

$$q(W) = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \Delta T}{\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{k_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_{21}}{r+\delta_1}\right)}{k_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)\cdot h}}$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{o \cdot L}{\pi \cdot r^2} \cdot I^2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \Delta T}{\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{k_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_{21}}{r+\delta_1}\right)}{k_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)\cdot h}}$$

$$\frac{o}{\pi \cdot r^2} \cdot I^2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta T}{\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{k_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_{21}}{r+\delta_1}\right)}{k_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)\cdot h}}$$

Pero $\Delta T = T_{int} - T_{ext}$, por lo tanto:

$$\frac{o}{\pi \cdot r^2} \cdot I^2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot (T_{int} - T_{ext})}{\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{k_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_{2_1}}{r+\delta_1}\right)}{k_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)\cdot h}}$$

$$\frac{o \cdot I^2}{\pi \cdot r^2}\left[\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{k_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_{2_1}}{r+\delta_1}\right)}{k_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)\cdot h}\right] = 2 \cdot \pi \cdot (T_{int} - T_{ext})$$

$$\frac{o \cdot I^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot r^2}\left[\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{k_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_{2_1}}{r+\delta_1}\right)}{k_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)\cdot h}\right] = T_{int} - T_{ext}$$

$$\Longrightarrow T_{int} = T_{ext} + \frac{o \cdot I^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot r^2}\left[\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{k_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_{2_1}}{r+\delta_1}\right)}{k_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)\cdot h}\right]$$

Perfil de temperaturas al interior del cable (0,6 pto).

(c) (1,2 pto) En este caso, solo hace falta reemplazar los datos en la ecuación obtenida en (b).

El cable tiene las siguientes características:

- Intensidad de corriente:
  I = 25 A
- Diámetro:
  d = 1 mm
- Aislantes:
  δ_1 = 1 mm k_1 = 0,35 W/m°C
  δ_2= 0,5 mm k_2 = 0,07 W/m°C
- Coeficiente de transferencia de calor:
  h = 5,2 W/m^2°C
- Temperatura exterior:
  T_{ext}= 20 °C
- Resistividad eléctrica cable:
  o= $1{,}96 \cdot 10^{-8}\ \Omega\, m$

Citando la fórmula de (b):

$$T_{int} = T_{ext} + \frac{o \cdot I^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot r^2}\left[\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{k_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_{2_1}}{r+\delta_1}\right)}{k_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)\cdot h}\right]$$

El cálculo de resistencias es:

$$\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{k_1} = \frac{\ln\left(\frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}m + 1 \cdot 10^{-3}m}{0{,}5 \cdot 10^{-3}m}\right)}{0{,}35\,\frac{W}{m \cdot °C}} = 3{,}14\ \frac{m \cdot °C}{W}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_{2_1}}{r+\delta_1}\right)}{k_2} = \frac{\ln\left(\frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}m + 1 \cdot 10^{-3}m + 0{,}5 \cdot 10^{-3}m}{0{,}5 \cdot 10^{-3}m + 1 \cdot 10^{-3}m}\right)}{0{,}07\,\frac{W}{m \cdot °C}} = 4{,}11\ \frac{m \cdot °C}{W}$$

$$\frac{1}{(r + \delta_1 + \delta_2) \cdot h} = \frac{1}{(0{,}5 \cdot 10^{-3} m + 1 \cdot 10^{-3} m + 0{,}5 \cdot 10^{-3} m) \cdot 5{,}2 \frac{W}{m^2 \cdot °C}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(r + \delta_1 + \delta_2) \cdot h} = 96{,}15 \frac{m \cdot °C}{W}$$

Así , la suma de resistencias es (0,5 pto):

$$\sum R_i = (3{,}14 + 4{,}11 + 96{,}15) \frac{m \cdot °C}{W}$$
$$\sum R_i = 103{,}4 \frac{m \cdot °C}{W}$$

Entonces:

$$T_{int} = T_{ext} + \frac{o \cdot I^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot r^2} \cdot \sum R_i$$

$$T_{int} = T_{ext} + \frac{o \cdot I^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot r^2} \cdot 103{,}4 \frac{m \cdot °C}{W}$$

$$T_{int} = 20°C + \frac{1{,}96 \cdot 10^{-8} \Omega\, m \cdot (25\, A)^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-3} m)^2} \cdot 103{,}4 \frac{m \cdot °C}{W}$$

$$T_{int} = 20°C + \frac{1{,}225 \cdot 10^{-5} \frac{W}{A^2} \cdot m \cdot A^2}{4{,}935 \cdot 10^{-6} m^2} \cdot 103{,}4 \frac{m \cdot °C}{W}$$

$$T_{int} = 20°C + 256{,}67\, °C$$

$$T_{int} = 276{,}67\ °C$$

Por lo tanto la temperatura interior del cable es de 276,67°C (0,5 pto).
Considerando que un cable puede resistir temperaturas superiores, pero que los aislantes pueden incinerarse con temperaturas por sobre los 100°C, entonces se concluye que el cable en cuestión puede incinerarse, y por tanto, generar un cortocircuito.

(d) (1,2 pto) Para el cable descrito en (c), pero sin considerar la aislación, se debe evaluar su enfriamiento en agua y en aire.

Se cuenta con los siguientes datos:

- Diámetro:
  d = 1 mm
- Coeficiente de transferencia de calor (aire):
  h = 5,2 $W/m^2°C$
- Coeficiente de transferencia de calor (agua):
  h = 85,5 $W/m^2°C$
- Temperatura exterior:
  T_{ext}= 20 °C
- Temperatura interior:
  T_{int}= 80 °C
- Calor específico cobre:
  $C_p(Cu) = 390 \frac{J}{kg \cdot °C}$
- Conductividad térmica cobre:
  $k_{Cu} = 385 \frac{W}{m°C}$
- Densidad cobre:
  $\rho_{Cu} = 8900 \frac{kg}{m^3}$

En primer lugar, calculamos la longitud característica para el cable:

$$L_c = \frac{Area}{Perimetro} = \frac{\pi \cdot \frac{D^2}{4}}{\pi \cdot D} = \frac{D}{4} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\, m$$

A continuación, se debe evaluar si es posible aplicar el método de capacitancia de masa, para lo cual se calcula el número de Biot (Bi) para ambos casos:

$$Bi_{agua} = \frac{h \cdot L_c}{k} = \frac{85{,}5 \frac{W}{m^2 \cdot °C} \cdot 2{,}5 \ \cdot 10^{-4} m}{385 \frac{W}{m \cdot °C}}$$

$$Bi_{agua} = 5{,}56 \ \cdot 10^{-5} \ \leq 0{,}1$$

$$Bi_{aire} = \frac{h \cdot L_c}{k} = \frac{5{,}2 \frac{W}{m^2 \cdot °C} \cdot 2{,}5 \ \cdot 10^{-4} m}{385 \frac{W}{m \cdot °C}}$$

$$Bi_{aire} = 3{,}38 \ \cdot 10^{-6} \ \leq 0{,}1$$

Según lo anterior, se puede emplear el método de capacitancia de masa en ambos casos (0,2 pto).

Para transferencia convectiva de calor, según capacitancia de masa, se tiene:

$$\rho \, V \, C_p \frac{dT(t)}{dt} = h \, A \left(T_\infty - \, T(t)\right)$$

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT(t)}{(T(t) - \, T_\infty)} = -\int_0^1 \frac{h \, A}{\rho \, V \, C_p} dt$$

De lo anterior se obtiene:

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho V C_p} \cdot t} = e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-Bi \cdot Fo}$$

Con $\tau = \frac{\rho \cdot L_c \cdot C_p}{h}$

Así, para el agua se tiene:

$$\tau = \frac{\rho \ \cdot L_c \cdot C_p}{h} = \frac{8900 \frac{kg}{m^3} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4} m \cdot 390 \frac{J}{kg \cdot °C}}{85{,}5 \frac{W}{m^2 \cdot °C}} = 10{,}15 \ s$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{10{,}15}}$$

De esta manera, para alcanzar una temperatura de aproximadamente 25°C, se requiere de casi 9 segundos(0,2 pto).

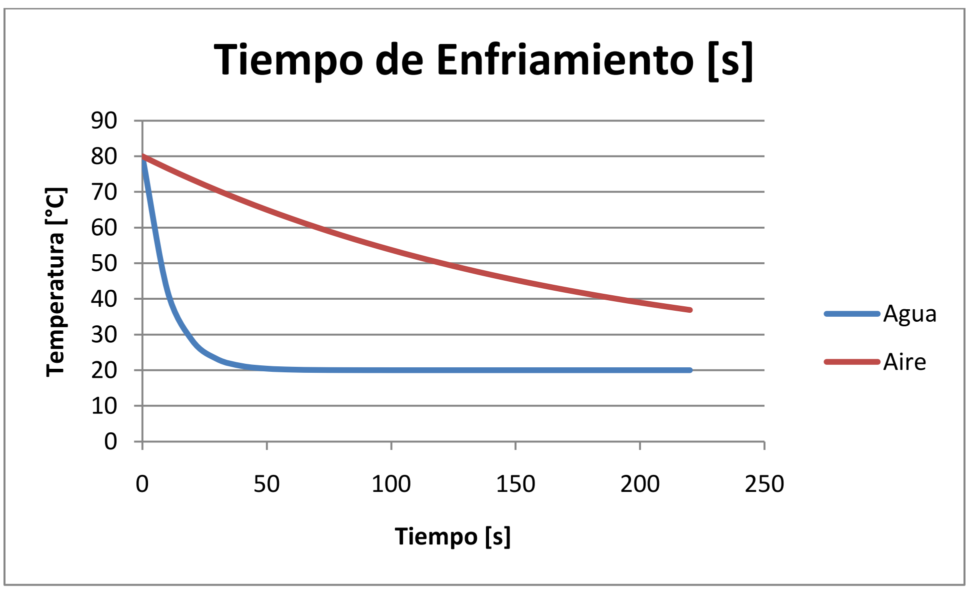
Así, para el aire se tiene:

$$\tau = \frac{\rho \ \cdot L_c \cdot C_p}{h} = \frac{8900 \frac{kg}{m^3} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4} m \cdot 390 \frac{J}{kg \cdot °C}}{5{,}2 \frac{W}{m^2 \cdot °C}} = 173{,}55\ s$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{173{,}55}}$$

Para el caso del aire, alcanzar una temperatura de 25°C requiere de 152 segundos aproximadamente(0,2 pto).

Gráficamente, se tiene(0,6 pto):



(e) (1,2 pto) Para CO_2 fluyendo por una placa plana se cuenta con los siguientes datos:

- Temperatura: 28°C = 301 K
- Velocidad: 2,7 m/s
- Dimensiones placa: 0,8 x 0,8 m^2
- Temperatura superficial placa: 600 K
- Densidad CO_2: 1,6 kg/m^3
- Calor especifico: $C_p(CO_2) = 1000 \frac{J}{kg \cdot K}$

En primer lugar, debe obtenerse las propiedades del fluido a las condiciones entregadas, usando los gráficos entregados:

La temperatura promedio es $T_{prom} = \frac{301K + 600\ K}{2} = 450{,}5\ K$

A esta temperatura, se tiene (0,2 pto):

$$\mu_{CO_2} = 2{,}5\ \cdot 10^{-5}\ \frac{N \cdot s}{m^2}$$

$$k_{CO_2} = 0{,}04 \frac{W}{m \cdot K}$$

Con lo anterior, el número de Prandtl es (0,2 pto):

$$Pr = \frac{\mu \cdot C_p}{k} = \frac{2{,}5\ \cdot 10^{-5}\ \frac{N \cdot s}{m^2} \cdot 1000 \frac{J}{kg \cdot K}}{0{,}04 \frac{W}{m \cdot K}}$$

$$Pr = 0{,}625$$

Como $Pr \geq 0{,}6$ en flujo laminar (0,2 pto), entonces se puede utilizar:

$$h(x) = 0{,}332\ \cdot k \cdot Pr^{1/3} \cdot \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu \cdot x}}$$

$$h(prom) = 0{,}664\ \cdot k \cdot Pr^{1/3} \cdot \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu \cdot L}}$$

Donde la viscosidad cinemática es $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

Así, el coeficiente de transferencia de calor promedio (0,2 pto):

$$h(prom) = 0{,}664 \cdot k \cdot Pr^{1/3} \cdot \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu \cdot L}}$$

$$h(prom) = 0{,}664 \cdot 0{,}04 \frac{W}{m \cdot K} \cdot (0{,}625)^{1/3} \cdot \sqrt{\frac{2{,}7 \frac{m}{s} \cdot 1{,}6 \frac{kg}{m^3}}{2{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{N \cdot s}{m^2} \cdot 0{,}8\, m}}$$

$$h(prom) = 10{,}55 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

Y, el coeficiente de transferencia de calor (0,2 pto):

$$h(x) = \frac{h(prom)}{2}$$

$$h(x) = \frac{10{,}55 \frac{W}{m^2 \cdot K}}{2}$$

$$h(x) = 5{,}275 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

Las pérdidas de calor en la placa son (0,2 pto):

$$q = h(prom) \cdot A \cdot (T_s - T_{CO_2})$$

$$q = 10{,}55 \frac{W}{m^2 \cdot K} \cdot (0{,}8\, m)^2 \cdot 299\, K$$

$$q = 2018{,}85\, W$$