Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería de Minas
MI3010 - Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva
Semestre - Primavera 2010

Profesor Leandro Voisin

Auxiliar Yerko Yavar D.
Ayudantes Viviana Pavez
Exequiel Marambio

Pauta Pregunta Nº2, Control 1

Viernes 24 de Septiembre de 2010

(a) • **(1.0 Pts) Consideraciones del Problema:**

(0.1 Pts) Considerando un flujo laminar (enunciado) es posible aplicar las ecuaciones de Navier-Stokes al problema, y además se tiene que el flujo es irrotacional:

$$\nabla \times \vec{v} = 0$$

(0.1 Pts) De la simetría del problema, un flujo unidireccional, tal que solo existen componentes de velocidad en $\hat{z}$:

$$v_\theta = v_r = 0$$

(0.1 Pts) Estacionario, es decir, el flujo no cambia respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

(0.1 Pts) Incompresible, o sea, de densidad constante (liquido):

$$\rho = cte$$

(0.3 Pts) De la ecuación de continuidad (coordenadas cilíndricas):

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Aplicando las consideraciones anteriores, obtenemos que el flujo es uniforme en $\hat{z}$:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \;\Rightarrow\; v_z = f(r, \theta)$$

Y, apelando a la simetría del problema, asumimos que el perfil se cumple para todo $\hat{\theta}$, luego:

$$\frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0 \;\Rightarrow\; v_z = f(r)$$

(0.3 Pts) Y, de las condiciones del problema, notamos que no existen presiones externas P, ni componentes de la gravedad en $\hat{r}$, ni en $\hat{\theta}$, luego:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \;\wedge\; g_r = g_\theta = 0$$

Y, en $\hat{z}$, podemos considerar como presión externa la presión atmosférica P_{atm}, pero como es la misma a la entrada y a la salida del capilar, entonces:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Así, solo existe efecto de la gravedad en $\hat{z}$:

$$g_z = g$$

- **(1.0 Pts) Obtención perfil de velocidades v_z en funcion de r y constantes:**

  (0.2 Pts) Dado lo anterior, notamos que las ecuaciones de Navier-Stokes en $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ son nulas, y que en $\hat{z}$ se reducen a:

  $$\mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \rho g = 0$$

  (0.4 Pts) Reordenando e integrando con respecto a r, se obtiene:

  $$r\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\rho g}{2\mu}r^2 + C_1$$

  Donde, C_1 es una constante de integración.

  (0.4 Pts) Volviendo a reordenar e integrando por segunda vez con respecto a r, se obtiene:

  $$v_z(r) = -\frac{\rho g}{4\mu}r^2 + C_1\ln(r) + C_2$$

  Donde, C_2 es una segunda constante de integración.

- **(1.0 Pts) Condiciones de borde, constantes y perfil final:**

  (0.3 Pts) Nos piden el perfil de velocidad en el film que desciende (fuera del capilar), entonces las condiciones de borde son:

  $$v_z(r = R) = 0$$

  $$\frac{\partial v_z}{\partial r}(r = aR) = 0$$

  Donde la primera, corresponde al contacto sólido-liquido y la segunda corresponde a la Ley de Newton de viscosidad donde la velocidad es máxima.

  (0.5 Pts) Imponiendo estas condiciones, encontramos que:

  $$C_1 = \frac{\rho g}{2\mu}(aR)^2$$

  $$C_2 = \frac{\rho g}{4\mu}R^2 - \frac{\rho g}{2\mu}(aR)^2\ln(R)$$

  (0.2 Pts) Finalmente, el perfil queda:

  $$v_z(r) = \frac{\rho g}{4\mu}[R^2 - r^2] + \frac{\rho g(aR)^2}{2\mu}[\ln(r) - \ln(R)]$$

  $$r \in [R\ ;\ aR]$$

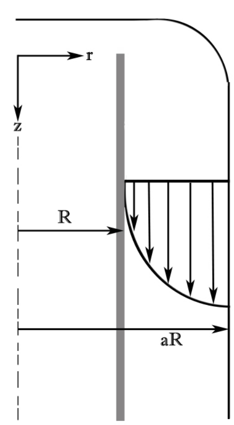

Figura 1: Perfil de velocidades obtenido para el film exterior al capilar.

(b)

- **(1.0 Pts) Planteamiento de la ecuación de energía y consideraciones del problema:**

(0.7 Pts) Consideremos la ecuación general de energía en cañerías:

$$\frac{W_s}{m} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{1}{2}(\bar{v_2}^2 - \bar{v_1}^2) + g(z_2 - z_1) + \sum_i E_{f_i}$$

Como no hay trabajo externo, entonces:

$$W_s = 0$$

Consideramos un largo L del capilar (ultima cañería) despreciable en comparación con la altura h buscada, es decir:

$$L \ll h$$

Consideramos una altura h pequeña en comparación con la atmosfera, luego $P_2 = P_1 = P_{atm}$, entonces:

$$P_2 - P_1 = 0$$

Consideramos que el flujo parte del reposo, entonces:

$$\bar{v_1} = \bar{v}_{inicial} = 0[m/s]$$

Luego, la ecuación se reduce a:

$$0 = \frac{1}{2}\bar{v_2}^2 + g(z_2 - z_1) + \sum_i E_{f_i}$$

y la altura h buscada queda determinada por:

$$h = z_1 - z_2 = \frac{\frac{1}{2}\bar{v_2}^2 + \sum_i E_{f_i}}{g} \tag{1}$$

Donde, **para efectos de este problema**, $\bar{v_2} = \bar{v}_{final} = |v_z(r = 0{,}03[m])|$, es decir, la velocidad en la dirección $\hat{z}$ **dentro del capilar** (cañería), será la evaluada en el perfil obtenido anteriormente, correspondiente al film fuera del capilar en $r = 0{,}03[m]$.

*****Notar que esto es ilógico, pues en este caso $r \notin [R\ ;\ aR]$, y en efecto, lo correcto debiese ser obtener el perfil de velocidades para el interior del capilar (cañería) mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, luego aplicar las respectivas condiciones de borde del nuevo problema y evaluar el nuevo perfil en el respectivo r, pero **para efectos de este problema obviaremos esto**.

Entonces, evaluando $v_z(r)$ obtenido en **(a)** en $r = 0{,}03[m]$, $R = 0{,}031[m]$, $\rho = 1000[Kg/m^3]$ y $\mu = 10^{-3}[Pa \cdot s]$, obtenemos:

$$|v_z(r = 0{,}03[m])| = \bar{v}_{final} = 37{,}4[m/s]$$

Y, considerando un caudal Q constante en todo el sistema, obtendremos las velocidades en las distintas cañerías. Entonces, el caudal considerado será:

$$Q = \bar{v}_{final} \cdot A_{r=0{,}03[m]} = 0{,}106[m^3/s]$$

Donde, $A_{r=0{,}03[m]} = \pi(0{,}03)^2[m^2]$ es el área de la cañería de radio $r = 0{,}03[m]$ (capilar).

(0.3 Pts) Así, finalmente obtenemos las velocidades al interior de las distintas cañerías que usaremos en el problema:

- Cañería radio $r = 0{,}03[m]$, $A = \pi(0{,}03)^2[m^2]$:
  En efecto, la velocidad acá es la misma que la final, entonces:

$$\bar{v} = \bar{v}_{final} = 37{,}4[m/s]$$

- Cañería radio $r = 0{,}025[m]$, $A = \pi(0{,}025)^2[m^2]$:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = 54[m/s]$$

- Cañería radio $r = 0{,}05[m]$, $A = \pi(0{,}05)^2[m^2]$:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = 13{,}5[m/s]$$

- **(2.0 Pts) Calculo de las perdidas de energía E_{f_i} y resultado final:**
(0.3 Pts) Primero necesitamos el coeficiente de fricción f, obtenido desde el grafico de Moody a partir de los parámetros ϵ/D y Re para las cañerías de radio $r = 0{,}05[m]$ y $r = 0{,}025[m]$, considerando acero comercial ($\epsilon = 4{,}6 \times 10^{-5}[m]$). Notar que no necesitamos este factor para el capilar (cañería de radio $r = 0{,}03[m]$), pues como $L \ll h$, despreciaremos su largo, y por ende, su perdida de energía por fricción será nula (ver mas adelante). Entonces:

  - Cañería diámetro $D = 0{,}1[m]$, $\bar{v} = Q/A = 13{,}5[m/s]$:

$$\left.\begin{array}{r} Re = \frac{D\bar{v}\rho}{\mu} = 1350000 \\ \epsilon/D = 0{,}00046 \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; f \approx 0{,}0043$$

  - Cañería diámetro $D = 0{,}05[m]$, $\bar{v} = Q/A = 54[m/s]$:

$$\left.\begin{array}{r} Re = \frac{D\bar{v}\rho}{\mu} = 2700000 \\ \epsilon/D = 0{,}00092 \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; f \approx 0{,}0049$$

Ahora, consideramos pérdidas de energía en contracciones, expansiones, codos y por fricción en la cañería, dadas por:

- (0.4 Pts) Contracciones:
Notamos que al principio existe una contracción súbita desde el estanque a la cañería de diámetro $D = 0{,}1[m]$, y luego una desde la cañería de diámetro $D = 0{,}1[m]$ a la de diámetro $D = 0{,}05[m]$, entonces usando:

$$E_{f_{cont.}} = 0{,}55\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2 \frac{\bar{v_2}^2}{2}$$

Donde, $\bar{v_2}$ y A_2 son la velocidad del flujo y el área transversal por donde atraviesa el flujo luego de la contracción, respectivamente. Así, obtenemos que:

  - Estanque - Cañería diámetro $D = 0{,}1[m]$, $\bar{v_2} = 13{,}5[m/s]$:
  Vemos que $A_2 \ll A_1$, donde A_1 es el área del estanque, entonces la perdida queda:

$$E_{f_{cont.\ 1}} = 0{,}55\frac{\bar{v_2}^2}{2} = 50{,}12[m^2/s^2] \tag{2}$$

  - Cañería diámetro $D = 0{,}1[m]$ - Cañería diámetro $D = 0{,}05[m]$, $\bar{v_2} = 54[m/s]$:
  Como $A_1 = \pi(5)^2[cm^2]$ y $A_2 = \pi(2{,}5)^2[cm^2]$ la perdida queda:

$$E_{f_{cont.\ 2}} = 0{,}55\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2 \frac{\bar{v_2}^2}{2} = 451{,}07[m^2/s^2] \tag{3}$$

- (0.4 Pts) Expansiones:
Notamos que existe una expansión al final, donde el flujo sale súbitamente desde el capilar (cañería radio $r = 0{,}03[m]$) a la atmosfera, y una desde la cañería de diámetro $D = 0{,}05[m]$ a la de diámetro $D = 0{,}06[m]$ (capilar), entonces usando:

$$E_{f_{exp.}} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{\bar{v_1}^2}{2}$$

Donde, $\bar{v_1}$ y A_1 son la velocidad del flujo y el área transversal por donde atraviesa el flujo antes de la expansión, respectivamente. Así, obtenemos que:

  - Cañería diámetro $D = 0{,}06[m]$ - Atmosfera, $\bar{v_1} = 37{,}4[m/s]$:
  Vemos que $A_1 \ll A_2$, donde A_2 es el "área de la atmosfera", entonces la perdida queda:

$$E_{f_{exp.\ 1}} = \frac{\bar{v_1}^2}{2} = 699{,}38[m^2/s^2] \tag{4}$$

- Cañería diámetro $D = 0{,}05[m]$ - Cañería diámetro $D = 0{,}06[m]$, $\bar{v_1} = 54[m/s]$:
  Como $A_1 = \pi(2{,}5)^2$ y $A_2 = \pi(3)^2$, entonces la perdida queda:

$$E_{f_{exp.\ 2}} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{\bar{v_1}^2}{2} = 136{,}13[m^2/s^2] \tag{5}$$

- (0.2 Pts) Codos:
  Notamos que existen dos codos de 90º, de diámetros $D = 0{,}1[m]$ y $D = 0{,}05[m]$, entonces usando:

$$E_{f_{codo}} = K_f \frac{\bar{v}^2}{2}$$

  Y, de la tabla (enunciado) vemos que $K_f = 0{,}75$ para un codo de 90º, entonces obtenemos:
  - Cañería diámetro $D = 0{,}1[m]$, $\bar{v} = 13{,}5[m/s]$:

$$E_{f_{codo\ 1}} = 0{,}75 \frac{\bar{v}^2}{2} = 68{,}34[m^2/s^2] \tag{6}$$

  - Cañería diámetro $D = 0{,}05[m]$, $\bar{v} = 54[m/s]$:

$$E_{f_{codo\ 2}} = 0{,}75 \frac{\bar{v}^2}{2} = 1093{,}50[m^2/s^2] \tag{7}$$

- (0.4 Pts) Fricción en cañería:
  Notamos que existen tres tipos de cañería de diámetros $D = 0{,}1[m]$, $D = 0{,}05[m]$ y $D = 0{,}06[m]$, entonces usando:

$$E_{f_{fric.}} = 4f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2}$$

  Obtendremos las perdidas de energía por fricción de cada cañería. Del enunciado tenemos los largos respectivos de cada cañería, anteriormente calculamos los f respectivos, y además, usando el supuesto de que $L \ll h$, vemos que esta perdida para el capilar (cañería de largo L y radio $r = 0{,}03[m]$) será despreciada (nula). Entonces obtenemos:
  - Cañería diámetro $D = 0{,}1[m]$, $\bar{v} = 13{,}5[m/s]$, $L = 8[m]$, $f = 0{,}0043$:

$$E_{f_{fric.\ 1}} = 125{,}39[m^2/s^2] \tag{8}$$

  - Cañería diámetro $D = 0{,}05[m]$, $\bar{v} = 54[m/s]$, $L = 20[m]$, $f = 0{,}0049$:

$$E_{f_{fric.\ 2}} = 11430{,}72[m^2/s^2] \tag{9}$$

(0.1 Pts) Perdida por fricción total:
Ahora, calculamos $\sum_i E_{f_i}$ sumando desde (2) hasta (9), entonces obtenemos:

$$\sum_i E_{f_i} = 14054{,}65[m^2/s^2] \tag{10}$$

(0.2 Pts) Resultado Final:
Finalmente reemplazando (10) y $\bar{v}_{final} = 37{,}4[m/s]$ en (1), y considerando $g = 9{,}8[m/s^2]$, obtenemos la altura h buscada:

$$h = z_1 - z_2 = \frac{\frac{1}{2}(37{,}4)^2[m^2/s^2] + 14054{,}65[m^2/s^2]}{9{,}8[m/s^2]} = 1505{,}51[m]$$