Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería de Minas
MI3010 - Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva
Semestre - Primavera 2010

Profesor Leandro Voisin

Auxiliar Yerko Yavar D.
Ayudantes Viviana Pavez
Exequiel Marambio

Pauta Pregunta Nº1, Control 2

Miércoles 3 de Octubre de 2010

(a) • **(1.0 Pts) Balance y obtención de la ecuación de energia:**
Dado un sistema de referencia y un elemento de volumen como el mostrado a continuacion:

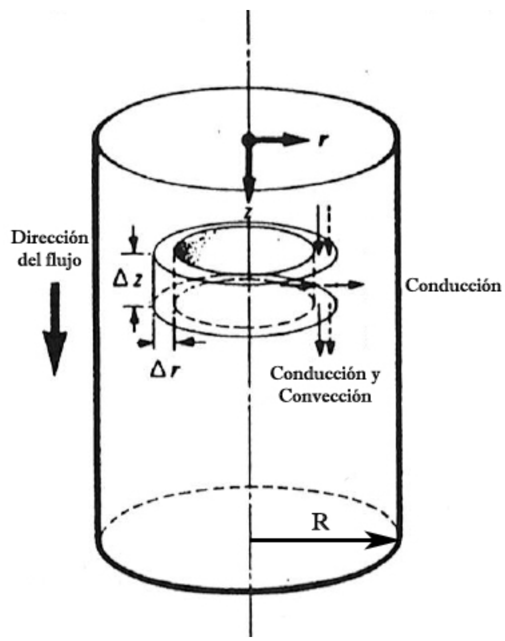

Figura 1: Sistema de referencia y elemento de volumen.

Y, suponiendo solo transferencia de calor en $\hat{z}$ (conducción y convección) y en $\hat{r}$ (conducción), se tiene:

- Tasa de energia por conducción entrante, cruzando la superficie en r:

$$2\pi r\Delta z q_r|_r$$

- Tasa de energia por conducción saliente, cruzando la superficie en $r+\Delta r$:

$$2\pi(r+\Delta r)\Delta z q_r|_{r+\Delta r}$$

- Tasa de energia por conducción entrante, cruzando la superficie en z:

$$2\pi r\Delta r q_z|_z$$

- Tasa de energia por conducción saliente, cruzando la superficie en $z+\Delta z$:

$$2\pi r\Delta r q_z|_{z+\Delta z}$$

- Tasa de energia por convección entrante, cruzando la superficie en z:

$$\rho v_z 2\pi r \Delta r H|_z$$

- Tasa de energia por convección saliente, cruzando la superficie en $z+\Delta z$:

$$\rho v_z 2\pi r \Delta r H|_{z+\Delta z}$$

Donde, H es la entalpia por unidad de masa y v_z es la velocidad en la dirección $\hat{z}$. Luego, asumiendo que no existe acumulación en el sistema y, sumando los terminos de energia entrantes y salientes (por conducciñon y convección) e igualando a 0, se obtiene el balance de energia preliminar:

$$2\pi\Delta z \left((r+\Delta r)\, q_r|_{r+\Delta r} - r\, q_r|_r\right) + 2\pi r\Delta r \left(q_z|_{z+\Delta z} - q_z|_z\right) + \rho v_z 2\pi r \Delta r \left(H|_{z+\Delta z} - H|_z\right) = 0$$

Luego, dividiendo todo por $2\pi\Delta r\Delta z$, se obtiene:

$$\frac{r\, q_r|_{r+\Delta r} - r\, q_r|_r}{\Delta r} + r\frac{q_z|_{z+\Delta z} - q_z|_z}{\Delta z} + r\rho v_z \frac{H|_{z+\Delta z} - H|_z}{\Delta z} = 0$$

Ahora, aproximando Δr y Δz a 0, se tiene:

$$\frac{\partial (r q_r)}{\partial r} + r\frac{\partial q_z}{\partial z} + r\rho v_z \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

Si C_p es la capacidad calorifica, entonces:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = C_p \frac{\partial T}{\partial z} \tag{2}$$

Por otra parte, desde la Ley de Fourier tambien se tiene:

$$q_r = -k\frac{\partial T}{\partial r} \tag{3}$$

$$q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z} \tag{4}$$

Así, reemplazando las ecuaciones (2), (3) y (4) en la ecuación (1), se obtiene la ecuación de energia en terminos de la temperatura:

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho C_p}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

Se puede simplificar aún más el balance de energía, ya que, excepto para un flujo muy lento en los metales líquidos, el termino $\frac{k}{\rho C_p}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ es insignificante a pesar de que $\frac{\partial T}{\partial z}$ no lo es. Con esta suposición, se obtiene finalmente la ecuación de energia buscada:

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho C_p}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right] \tag{5}$$

- **(1.0 Pts) Consideraciones para la obtención del perfil de temperatura:**
La ecuación (5) contiene el termino v_z, factor que une la transferencia de calor por conducción y convección. Se puede considerar un flujo laminar plenamente desarrollado y, por lo tanto, la distribución de velocidades es parabólica, y está dada desde el enunciado por:

$$v_z = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\left(\frac{R^2}{4\mu}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = \bar{V}_z\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Donde, $\bar{V}_z$ es una simplificación del termino dependiente de las constantes P_0, P_L, ρ, g, L, R y μ.

Así, reemplazando la distribución de velocidades en la ecuación (5), se obtiene:

$$\bar{V}_z \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho C_p} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right] \tag{6}$$

Ahora, consideramos el caso particular en el que existe un perfil de temperatura completamente desarrollado. Para cualquier conjunto de condiciones de borde, una temperatura totalmente desarrollada se produce cuando $\frac{T_1 - T}{T_1 - T_m}$ es una función única de r/R, independiente de z. Entonces:

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_m} = f(r/R)$$

Lo que es equivalente a:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{T_1 - T}{T_1 - T_m}\right] = 0 \tag{7}$$

donde, T_1 es la temperatura del fluido en la pared y T_m es la temperatura media del fluido.

Para un perfil de temperatura completamente desarrollado se cumple que el coeficiente de transferencia de calor h es uniforme a lo largo de la tubería. Es posible darse cuenta de esto mediante el empleo de la definición del coeficiente de transferencia de calor, basada en la temperatura media del fluido

$$h = \frac{q_R}{T_1 - T_m} = -\frac{k}{R}\frac{\partial}{\partial (r/R)}\left[\frac{T_1 - T}{T_1 - T_m}\right]_{r=R} \tag{8}$$

donde q_R es el flujo evaluado en la pared ($r = R$). Porque la derivada de la ecuación (8) tiene un valor único en la pared, independiente de z, h es por lo tanto uniforme a lo largo de la tubería bajo las condiciones de temperatura completamente desarrollada.

Ahora, se considera el caso en que q_R es uniforme, lo cual representa un flujo de calor uniforme en la pared del tubo.

Entonces, bajo los dos supuestos anteriores (h y q_R constantes), de la ecuación (8) se deduce que $T_1 - T_m$ es constante, y:

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial T_m}{\partial z} \tag{9}$$

Pero, hay que tener en cuenta que T_1 y T_m en sí no son constantes. Ahora al ampliar la ecuación (7) en un sentido general, se tiene:

$$\left[\frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z}\right] - \left[\frac{T_1 - T}{T_1 - T_m}\right]\left[\frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\partial T_m}{\partial z}\right] = 0 \tag{10}$$

y, combinando la ecuación (9) con la ecuación (10), se obtiene:

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T_m}{\partial z} \tag{11}$$

- **(1.0 Pts) Obtención del perfil de temperatura:**

  Reemplazando la ecuación (11) en la ecuación (6), se obtiene:

$$\bar{V}_z \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \left(\frac{\partial T_m}{\partial z}\right) = \frac{k}{\rho C_p} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right] \tag{12}$$

  Ahora podemos integrar directamente la ecuación anterior (12)

$$\bar{V}_z \left(\frac{\partial T_m}{\partial z}\right) \int_{r=0}^{r} r\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] dr = \frac{k}{\rho C_p} \int_{\partial T/\partial r = 0}^{\partial T/\partial r} d\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

obteniendo:

$$\bar{V}_z \left(\frac{\partial T_m}{\partial z}\right) \frac{r}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = \frac{k}{\rho C_p}\frac{\partial T}{\partial r} \tag{13}$$

Ahora, integrando nuevamente la ecuación anterior (13) desde r a $r = R$ y, desde T a $T = T_1$

$$\bar{V}_z \left(\frac{\partial T_m}{\partial z}\right) \int_r^{r=R} \frac{r}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] dr = \frac{k}{\rho C_p}\int_T^{T=T_1} dT$$

se obtiene el perfil de temperatura preliminar:

$$T_1 - T = \left[\frac{\bar{V}_z \rho C_p}{16R^2 k}\right]\left(\frac{\partial T_m}{\partial z}\right)\left(3R^2 - 4R^2r^2 + r^4\right)$$

Reordenando y, reemplazando $\bar{V}_z$ definido anteriormente por el termino dado en el enunciado, se llega al perfil de temperatura buscado:

$$T = T_1 - \left[\frac{\rho C_p}{64\mu k}\right]\left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\left(\frac{\partial T_m}{\partial z}\right)\left(3R^2 - 4R^2r^2 + r^4\right)$$

(b) • **(1.0 Pts) Determinación del flujo de calor radial q_R:**

Sabemos que el flujo de calor radial q_R en un cilindro compuesto por distintas capas aislantes esta dado por la ecuación:

$$q_R = \frac{A \cdot \Delta T}{\sum_i R_i}$$

donde, A es el area superficial considerada, ΔT es la diferencia de temperatura entre un medio interno y otro externo y, R_i es la resistencia del aislante i.

Ahora, para este caso en particular, la ecuación anterior se traduce en:

$$q_R = \frac{2\pi L(T_{int} - T_{ext})}{\frac{1}{r_1 h_0} + \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{k_1} + \frac{\ln(\frac{r_3}{r_2})}{k_2} + \frac{\ln(\frac{r_4}{r_3})}{k_3} + \frac{\ln(\frac{r_5}{r_4})}{k_4} + \frac{1}{r_5 h_1}} \tag{14}$$

donde, T_{int} y T_{ext} son las temperaturas al interior y al exterior del cilindro respectivamente; h_0 y h_1 son los coeficientes de transferencia de calor de los medios interno y externo respectivamente; k_1, k_2, k_3 y k_4 son las conductividades termicas de cada material aislante, desde el interno al externo, respectivamente; r_1, r_2, r_3, r_4 y r_5 son los respectivos radios que delimitan el contacto entre aislantes, medidos desde el centro del cilindro; y, L es el largo del cilindro considerado. Lo anterior se resume en la siguiente figura:

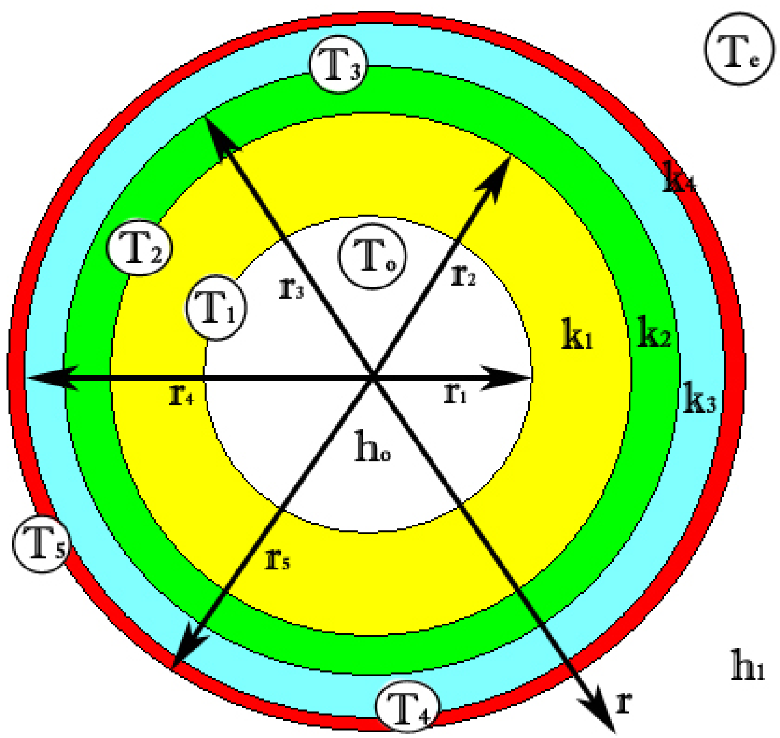

Figura 2: Perfil logitudinal del cilindro.

Ahora, considerando los datos del enunciado:

- $T_{int} = T_0 = 800\ [^oK]$
- $T_{ext} = T_e = 32\ [^oC] = 305\ [^oK]$
- $L = 50\ [mm] = 0{,}05\ [m]$
- $k_1 = 1{,}04\ [\frac{W}{m^oK}]$
- $k_2 = 0{,}7\ [\frac{W}{m^oK}]$
- $k_3 = 0{,}07\ [\frac{W}{m^oK}]$
- $k_4 = 45\ [\frac{W}{m^oK}]$
- $h_0 = 28\ [\frac{W}{m^{2o}K}]$
- $h_1 = 5{,}7\ [\frac{W}{m^{2o}K}]$
- $r_1 = R = 200\ [mm] = 0{,}2\ [m]$
- $r_2 = L_1 = 430\ [mm] = 0{,}43\ [m]$
- $r_3 = L_2 = 580\ [mm] = 0{,}58\ [m]$
- $r_4 = L_3 = 630\ [mm] = 0{,}63\ [m]$
- $r_5 = L_4 = 633\ [mm] = 0{,}633\ [m]$

Y, reemplazando estos valores en la ecuación (14), se obtiene:

$$q_R = \frac{2\pi \cdot 0{,}05[m](800[^oK] - 305[^oK])}{\frac{1}{0{,}2[m]\cdot 28[\frac{W}{m^{2o}K}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}43[m]}{0{,}2[m]})}{1{,}04[\frac{W}{m^oK}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}58[m]}{0{,}43[m]})}{0{,}7[\frac{W}{m^oK}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}63[m]}{0{,}58[m]})}{0{,}07[\frac{W}{m^oK}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}633[m]}{0{,}63[m]})}{45[\frac{W}{m^oK}]} + \frac{1}{0{,}633[m]\cdot 5{,}7[\frac{W}{m^{2o}K}]}} = 55{,}526\ [W]$$

Que es el valor del flujo radial que atraviesa al cilindro desde el interior al exterior (perdida de calor).

- **(1.6 Pts) Calculo de las temperaturas en las interfases:**

  Para determinar las temperaturas en las interfases de los aislantes T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 (mostradas en la figura anterior), primero se debe suponer que el flujo radial q_R se mantiene constante al atravesar el cilindro y, bajo este supuesto, ir igualando los flujos de calor entre los aislantes, variando las temperaturas T_{int} de forma iterativa o, mantener la temperatura interna T_{int} e ir eliminando resistencias de la sumatoria a medida que se avanza entre interfases. En este caso, se desarrollara el ultimo metodo, aunque ambos son correctos. Entonces:

  - Determinación de T_5:

  $$55{,}526\ [W] = \frac{2\pi \cdot 0{,}05[m](800[^oK] - T_5)}{\frac{1}{0{,}2[m]\cdot 28[\frac{W}{m^{2o}K}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}43[m]}{0{,}2[m]})}{1{,}04[\frac{W}{m^oK}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}58[m]}{0{,}43[m]})}{0{,}7[\frac{W}{m^oK}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}63[m]}{0{,}58[m]})}{0{,}07[\frac{W}{m^oK}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}633[m]}{0{,}63[m]})}{45[\frac{W}{m^oK}]}}$$

  $$\Rightarrow T_5 = 353{,}98\ [^oK]$$

  - Determinación de T_4:

  $$55{,}526\ [W] = \frac{2\pi \cdot 0{,}05[m](800[^oK] - T_4)}{\frac{1}{0{,}2[m]\cdot 28[\frac{W}{m^{2o}K}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}43[m]}{0{,}2[m]})}{1{,}04[\frac{W}{m^oK}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}58[m]}{0{,}43[m]})}{0{,}7[\frac{W}{m^oK}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}63[m]}{0{,}58[m]})}{0{,}07[\frac{W}{m^oK}]}}$$

  $$\Rightarrow T_4 = 354\ [^oK]$$

  - Determinación de T_3:

  $$55{,}526\ [W] = \frac{2\pi \cdot 0{,}05[m](800[^oK] - T_3)}{\frac{1}{0{,}2[m]\cdot 28[\frac{W}{m^{2o}K}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}43[m]}{0{,}2[m]})}{1{,}04[\frac{W}{m^oK}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}58[m]}{0{,}43[m]})}{0{,}7[\frac{W}{m^oK}]}}$$

  $$\Rightarrow T_3 = 562{,}79\ [^oK]$$

- Determinación de T_2:

$$55{,}526\ [W] = \frac{2\pi \cdot 0{,}05[m](800[^{\text{o}}K] - T_2)}{\frac{1}{0{,}2[m]\cdot 28[\frac{W}{m^2{}^{\text{o}}K}]} + \frac{\ln(\frac{0{,}43[m]}{0{,}2[m]})}{1{,}04[\frac{W}{m^{\text{o}}K}]}}$$

$$\Rightarrow T_2 = 638{,}35\ [^{\text{o}}K]$$

- Determinación de T_1:

$$55{,}526\ [W] = \frac{2\pi \cdot 0{,}05[m](800[^{\text{o}}K] - T_1)}{\frac{1}{0{,}2[m]\cdot 28[\frac{W}{m^2{}^{\text{o}}K}]}}$$

$$\Rightarrow T_1 = 768{,}44\ [^{\text{o}}K]$$

Notar que los resultados encontrados son coherentes con los valores de k_i dados, ya que es facil observar que, donde la diferencia de temperatura es mayor, es entre T_3 y T_4, lo cual es coherente con el pequeño valor del coeficiente de conductividad del aislante $k_i = k_3 = 0{,}07\ [\frac{W}{m^{\text{o}}K}]$, en cambio, donde la diferencia de temperatura es menor, es entre T_4 y T_5, lo cual, tambien es coherente con el elevado coeficiente de conductividad en este caso $k_i = k_4 = 45\ [\frac{W}{m^{\text{o}}K}]$.

- **(0.4 Pts) Perfil de temperatura a traves de las distintas capas:**
  Antes de graficar, debemos notar que:
  - Cuando tenemos convección en un cilindro, la ecuación del flujo de calor radial q_R tiene la forma:

    $$q_R = \frac{2\pi L(T_0 - T)}{\frac{1}{hr}}$$

    luego, la temperatura en función del radio queda:

    $$T = T_0 - \frac{q_R}{2\pi L h}\frac{1}{r}$$

  - Cuando tenemos conducción en un cilindro, la ecuación del flujo de calor radial q_R tiene la forma:

    $$q_R = \frac{2\pi L(T_0 - T)}{\frac{\ln(\frac{r}{R})}{k}}$$

    luego, la temperatura en función del radio queda:

    $$T = T_0 - \frac{q_R}{2\pi L k}\ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

  Teniendo en cuenta lo anterior, se obtiene el siguiente perfil de temperatura en función del radio:

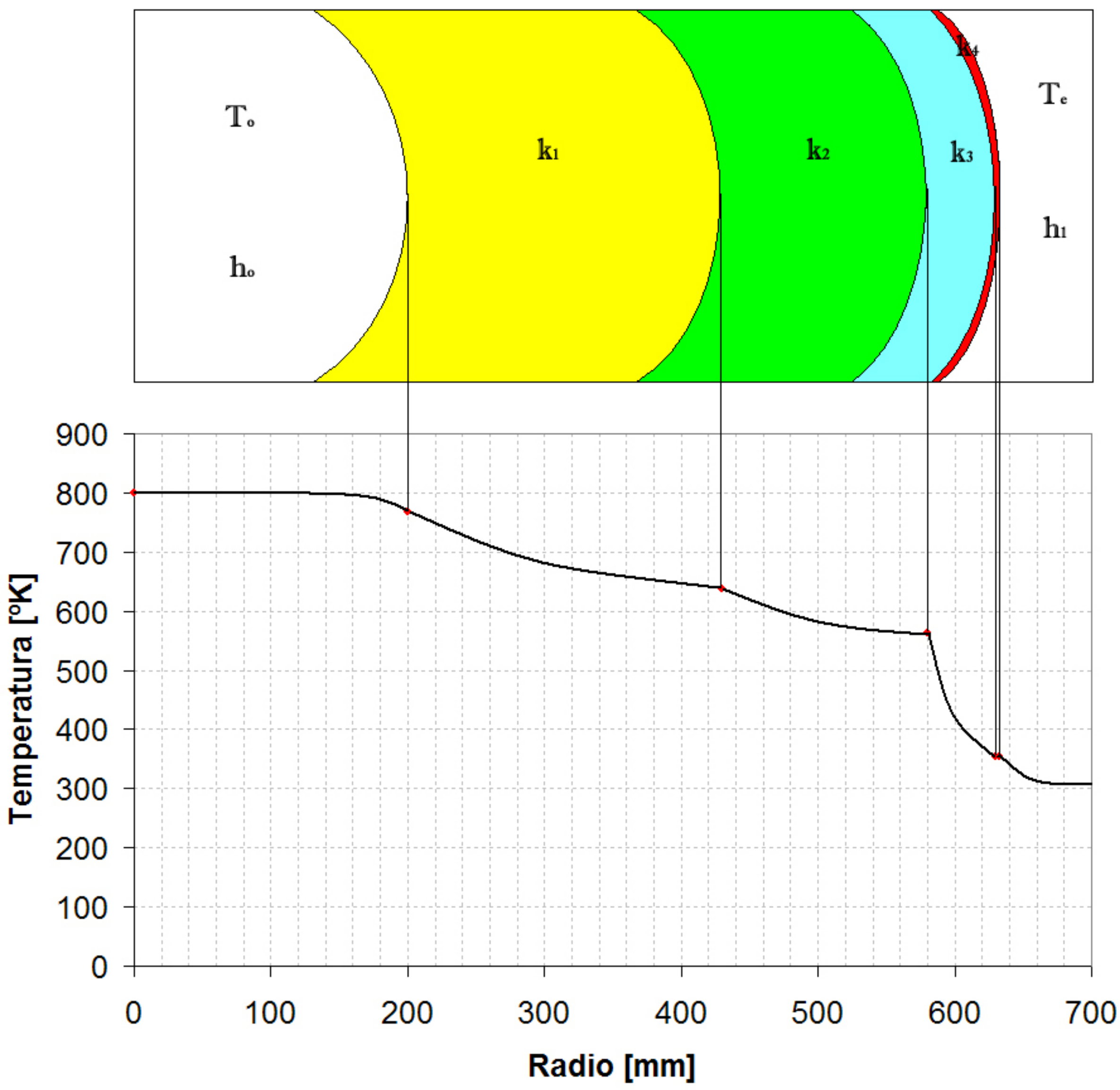

Figura 3: Perfil logitudinal del cilindro mostrando la caida de temperatura entre capas.