Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería de Minas
MI3010 Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva

Pauta Problema 1, Control 1

(a) (1,5 pto) Se pide determinar $\mu_{Cu-40\%Zn}$. Para ello, se determina por separado la viscosidad de ambos metales en estado líquido, y posteriormente se calcula la viscosidad de la aleación a T=1100 °C.

<u>Viscosidad de Cu</u>

Debe calcularse la viscosidad de Cu a 1373 K.

Se conoce T_m = 1084 °C = 1357 K.

$$\therefore \frac{\varepsilon}{\kappa_B} = 5{,}2 \ \cdot T_m \ \Rightarrow \ \frac{\varepsilon}{\kappa_B} = 7056{,}4\ K$$

Luego

$$T^* = \frac{\kappa_B}{\varepsilon} \cdot T = \frac{1373\ K}{7056{,}4\ K}$$

$$\Rightarrow T^* = \ 0{,}19$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T^*} = 5{,}14$$

Con el resultado anterior se busca en el gráfico, obteniéndose $\mu^* \cdot (V^*)^2 = 3{,}8$.

A continuación debe calcularse

$$V^* = \frac{1}{n \cdot \delta^3}$$

Se tiene

$$n = \ \rho \cdot \frac{N_0}{PA} = \frac{6{,}023 \ \cdot 10^{23} \frac{1}{mol} \cdot 8 \frac{g}{cm^3}}{63{,}5 \ \frac{g}{mol}}$$

$$\Rightarrow n = 7{,}59 \cdot 10^{22} \frac{1}{cm^3}$$

Para δ, deben ajustarse las unidades:

$$\delta = 0{,}256\, nm = 0{,}256 \cdot 10^{-9} m = 0{,}256 \cdot 10^{-7} cm$$

$$\therefore V^* = \frac{1}{n \cdot \delta^3} = \frac{1}{7{,}59 \cdot 10^{22} \frac{1}{cm^3} \cdot (0{,}256 \cdot 10^{-7} cm)^3}$$

$$\Rightarrow V^* = 0{,}79$$

Como se conoce $\mu^* \cdot (V^*)^2 = 3{,}8$

$$\Rightarrow \mu^* = 6{,}2$$

Con esto

$$\mu^* = \frac{\mu \cdot \delta^2 \cdot N_0}{\sqrt{M \cdot R \cdot T}} \quad \Rightarrow \quad \mu_{Cu} = \mu^* \cdot \frac{\sqrt{M \cdot R \cdot T}}{\delta^2 \cdot N_0}$$

Se tiene

$$\sqrt{M \cdot R \cdot T} = \sqrt{63{,}5 \frac{g}{mol} \cdot 8{,}3144 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 1373\, K}$$

$$\sqrt{M \cdot R \cdot T} = \sqrt{63{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}3144 \cdot 1373\, \frac{kg}{mol} \cdot \frac{kg \cdot m^2}{mol \cdot s}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{M \cdot R \cdot T} = 26{,}9 \frac{kg}{mol \cdot s}$$

Si no se transforma unidades, se obtiene

$$\sqrt{M \cdot R \cdot T} = 851{,}4 \frac{\sqrt{J \cdot g}}{mol}$$

Finalmente,

$$\mu_{Cu} = \frac{6{,}2 \ \cdot 26{,}9 \ \frac{kg \cdot m}{mol \cdot s}}{(0{,}256 \cdot 10^{-9} m)^2 \cdot 6{,}023 \ \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}}$$

$$\mu_{Cu} = 4{,}23 \ \cdot 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s} = 4{,}23 \ \cdot 10^{-3} Pa \cdot s = 4{,}23 \ cP$$

Así, se tiene $\mu_{Cu} = 4{,}23 \ cP$.

Si se usa el valor sin transformación de unidades, se tiene $\mu_{Cu} = 0{,}134 \ \frac{\sqrt{J \cdot g}}{m^2}$, y con los factores 10^{-3} y $10^{3/2}$ se obtiene el mismo resultado.

Viscosidad de Zn

Debe calcularse la viscosidad de Zn a 1373 K.

Se conoce T_m = 420 °C = 693 K.

$$\therefore \frac{\varepsilon}{\kappa_B} = 5{,}2 \ \cdot T_m \ \Rightarrow \ \frac{\varepsilon}{\kappa_B} = 3603{,}6 \ K$$

Luego

$$T^* = \frac{\kappa_B}{\varepsilon} \cdot T = \frac{1373 \ K}{3603{,}6 \ K}$$

$$\Rightarrow T^* = 0{,}38$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T^*} = 2{,}63$$

Con el resultado anterior se busca en el gráfico, obteniéndose $\mu^* \cdot (V^*)^2 = 1{,}2$.

A continuación debe calcularse

$$V^* = \frac{1}{n \cdot \delta^3}$$

Se tiene

$$n = \rho \cdot \frac{N_0}{PA} = \frac{6{,}023 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol} \cdot 6{,}6 \frac{g}{cm^3}}{65{,}4 \frac{g}{mol}}$$

$$\Rightarrow n = 6{,}08 \cdot 10^{22} \frac{1}{cm^3}$$

Para δ, deben ajustarse las unidades:

$$\delta = 0{,}274\, nm = 0{,}274 \cdot 10^{-9} m = 0{,}274 \cdot 10^{-7} cm$$

$$\therefore V^* = \frac{1}{n \cdot \delta^3} = \frac{1}{6{,}08 \cdot 10^{22} \frac{1}{cm^3} \cdot (0{,}274 \cdot 10^{-7} cm)^3}$$

$$\Rightarrow V^* = 0{,}8$$

Como se conoce $\mu^* \cdot (V^*)^2 = 1{,}2$

$$\Rightarrow \mu^* = 1{,}875$$

Con esto

$$\mu^* = \frac{\mu \cdot \delta^2 \cdot N_0}{\sqrt{M \cdot R \cdot T}} \quad \Rightarrow \quad \mu_{Zn} = \mu^* \cdot \frac{\sqrt{M \cdot R \cdot T}}{\delta^2 \cdot N_0}$$

Se tiene

$$\sqrt{M \cdot R \cdot T} = \sqrt{65{,}4 \frac{g}{mol} \cdot 8{,}3144 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 1373\, K}$$

$$\sqrt{M \cdot R \cdot T} = \sqrt{65{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}3144 \cdot 1373 \frac{kg}{mol} \cdot \frac{kg \cdot m^2}{mol \cdot s}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{M \cdot R \cdot T} = 27{,}32 \frac{kg}{mol \cdot s}$$

Si no se transforma unidades, se obtiene

$$\sqrt{M \cdot R \cdot T} = 864{,}1 \frac{\sqrt{J \cdot g}}{mol}$$

Finalmente,

$$\mu_{Zn} = \frac{1,875 \ \cdot 27,32 \ \frac{kg \cdot m}{mol \cdot s}}{(0,274 \cdot 10^{-9} m)^2 \cdot 6,023 \ \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}}$$

$$\mu_{Cu} = 1,13 \ \cdot 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s} = 1,13 \ \cdot 10^{-3} Pa \cdot s = 1,13 \ cP$$

Así, se tiene $\mu_{Zn} = 1,13 \ cP$.

Si se usa el valor sin transformación de unidades, se tiene $\mu_{Zn} = 0,036 \ \frac{\sqrt{J \cdot g}}{m^2}$, y con los factores 10^{-3} y $10^{3/2}$ se obtiene el mismo resultado.

Con los resultados anteriores, puede calcularse la viscosidad de la aleación usando:

$$\mu_{Cu-40\%Zn} = 0,6 \cdot \mu_{Cu} + 0,4 \cdot \mu_{Zn}$$

$$\mu_{Cu-40\%Zn} = 2,99 \ cP$$

Asignación de puntaje:

- 0,6 pto por calcular correctamente la viscosidad de Cu.
- 0,6 pto por calcular correctamente la viscosidad de Zn.
- 0,3 pto por calcular correctamente la viscosidad de la aleación.

(b) (1,5 pto) Conociendo que, para la aleación 60%Cu - 40%Zn, la viscosidad a 1000°C es 5 cP, y la viscosidad a 950°C es 6 cP, se pide calcular la viscosidad a 1100°C.

Para encontrar la viscosidad a esa temperatura, debe usarse la ecuación de Arrhenius. Como se conoce el valor de la viscosidad de 2 temperaturas distintas, es posible plantear un sistema de dos ecuaciones, donde las incógnitas son las constantes de la ecuación, A y ΔG/R.

La ecuación de Arrhenius es:

$$\mu_T = A \cdot \exp\left(\frac{\Delta G}{R \cdot T}\right)$$

Las temperaturas a las cuales se conoce la viscosidad son:

$$T = 1000\ °C = 1273\ K$$
$$T = 950°C = 1223\ K$$

Se tiene:

$$\mu_{1000°C} = 5\ cP = A \cdot \exp\left(\frac{\Delta G}{R \cdot 1273\ K}\right)$$

$$\mu_{950°C} = 6\ cP = A \cdot \exp\left(\frac{\Delta G}{R \cdot 1223\ K}\right)$$

Para simplificar, se aplica logaritmo natural a ambos lados de las ecuaciones:

$$\ln(5) = \ln(A) + \frac{\Delta G}{R \cdot 1273} \quad (1)$$

$$\ln(6) = \ln(A) + \frac{\Delta G}{R \cdot 1223} \quad (2)$$

Para resolver el sistema, restamos ambas ecuaciones:

$$(1) - (2) \Rightarrow \ln(5) - \ln(6) = \frac{\Delta G}{R} \cdot \left(\frac{1}{1273} - \frac{1}{1223}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta G}{R} = \frac{-182{,}32 \cdot 10^{-3}}{-32{,}12 \cdot 10^{-6}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta G}{R} = 5676{,}21$$

$\therefore\ en\ (1)$:

$$\ln(A) = \ln(5) - \frac{5676{,}21}{1273}$$

$$\ln(A) = -2{,}85 \quad /\exp(\,)$$

$$A = 5{,}78 \cdot 10^{-2}$$

Como se conocen las dos constantes, puede calcularse la viscosidad a 1100°C, es decir, a 1373 K:

$$\mu_{1100°C} = A \cdot \exp\left(\frac{\Delta G}{R \cdot T}\right)$$

$$\mu_{1100°C} = 5{,}78 \cdot 10^{-2} \cdot \exp\left(\frac{5676{,}21}{1373}\right)$$

$$\mu_{1100°C} = 3{,}61\ cP$$

Si se compara este resultado con el obtenido en (a):

$$Error = \frac{\mu_{Cu-40\%Zn}}{\mu_{1100°C}} \cdot 100\% = 17\%$$

Existe un amplio margen de error entre ambas soluciones, con lo cual puede concluirse que el uso de la ecuación de Arrhenius entrega un resultado mucho más confiable que la aproximación de la viscosidad a partir de las viscosidades parciales de ambos metales.

Asignación de puntaje:

- 0,8 pto por plantear y resolver correctamente el sistema de ecuaciones.
- 0,4 pto por calcular correctamente $\mu_{1100°C}$.
- 0,3 pto por comparación de resultados y comentarios finales.

(c) (3 pto) Se pide el perfil de distribución de velocidad, y la velocidad media si α=2. Para obtener lo anterior debe realizarse un balance de flujo de momentum.

Consideraciones:

i. Volumen de control con largo L, espesor variable Δx y ancho W.
ii. Volumen de control alejado de las entradas y salidas del sistema de manera que no hay influencia sobre v_z.
iii. Interfase fluido – sólido válida para x = δ.
iv. La temperatura de la aleación permanece constante a 1100°C, la densidad también es constante pero la viscosidad es variable y depende de la posición, según:

$$\mu = \mu_{Cu-40\%Zn} \cdot e^{-\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)}$$

El balance de flujo de momentum indica:

$$FM_{in} - FM_{out} + \Sigma\vec{F} = 0$$

Veamos cada término de la ecuación:

- FM_{in}

1. Entrante a la sección transversal a x, debido a la viscosidad: $L \cdot W \cdot \tau_{xz}\,|_x$
2. Entrante a la sección transversal a z, debido al movimiento del fluido: $W \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot v_z^2|_{z=0}$

- FM_{out}

1. Saliente de la sección transversal a x, debido a la viscosidad: $L \cdot W \cdot \tau_{xz}\,|_{x+\Delta x}$
2. Saliente de la sección transversal a z, debido al movimiento del fluido: $W \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot v_z^2|_{z=L}$

- $\Sigma\vec{F}$

1. El peso del fluido: $L \cdot W \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot g \cdot cos\beta$

Con todo lo anterior se tiene:

$$L \cdot W \cdot \tau_{xz}\,|_x - L \cdot W \cdot \tau_{xz}\,|_{x+\Delta x} + W \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot v_z^2|_{z=0} - W \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot v_z^2|_{z=L} + L \cdot W \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot g \cdot cos\beta = 0$$

Debido a la consideración (ii), mostrada anteriormente, los términos originados por el movimiento del fluido son nulos, por lo tanto se tiene:

$$L \cdot W \cdot \tau_{xz}\,|_x - L \cdot W \cdot \tau_{xz}\,|_{x+\Delta x} + L \cdot W \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot g \cdot cos\beta = 0$$

Si se divide la ecuación anterior por el volumen de control $L \cdot W \cdot \Delta x$:

$$\frac{\tau_{xz}\,|_x}{\Delta x} - \frac{\tau_{xz}\,|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho \cdot g \cdot cos\beta = 0$$

Reordenado se tiene:

$$\frac{\tau_{xz}\,|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}\,|_x}{\Delta x} = \rho \cdot g \cdot cos\beta$$

Asumiendo que Δx es infinitesimal, se puede pasar el límite cuando tiende a cero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tau_{xz}\,|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}\,|_x}{\Delta x} = \rho \cdot g \cdot cos\beta$$

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho \cdot g \cdot cos\beta$$

Integrando la última ecuación:

$$\tau_{xz} = (\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot x + C$$

Las consideraciones del problema permiten conocer la constante, al usar la condición de borde: $x = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = 0$

Con lo anterior: $C = 0$

Y finalmente:

$$\tau_{xz} = (\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot x$$

Si se considera que la aleación es un fluido newtoniano, entonces se puede usar la ecuación de viscosidad de Newton:

$$\tau_{xz} = -\mu \cdot \frac{dv_z}{dx}$$

$$\Leftrightarrow (\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot x = -\mu \cdot \frac{dv_z}{dx}$$

Pero según las consideraciones del problema, la viscosidad depende de la posición, por lo tanto:

$$(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot x = -\mu_0 \cdot e^{-\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot \frac{dv_z}{dx}$$

Para efectos de comodidad, se usa la notación μ_0 para $\mu_{Cu-40\%Zn}$.

Con la última ecuación, podemos obtener el perfil de velocidades, para lo cual es necesario integrar:

$$(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot x = -\mu_0 \cdot e^{-\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot \frac{dv_z}{dx}$$

$$-\frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot x}{\mu_0 \cdot e^{-\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)}} = \frac{dv_z}{dx}$$

$$-\frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot x}{\mu_0 \cdot e^{-\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)}} dx = dv_z$$

Reordenando

$$dv_z = -\frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot x \cdot e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)}}{\mu_0} dx$$

Integrando la última expresión:

$$v_z = -\frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta)}{\mu_0} \int x \cdot e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} dx$$

Por comodidad, desarrollamos la integral aparte, usando la integración por partes:

$$\int x \cdot e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} dx$$

$$u = x \Rightarrow du = 1$$

$$dv = e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \Rightarrow v = \frac{\delta}{\alpha} \cdot e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)}$$

Así:

$$\int x \cdot e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)}\,dx \;=\; \frac{\delta}{\alpha}\cdot\; e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot x - \frac{\delta}{\alpha}\cdot \int e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)}\,dx$$

$$\int x \cdot e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)}\,dx \;=\; \frac{\delta}{\alpha}\cdot\; e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot x - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\cdot e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} + \;C_1$$

$$\int x \cdot e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)}\,dx \;=\; e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot \left[\frac{\delta}{\alpha}\cdot\; x - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right] + \;C_*$$

Reemplazando el valor de la integral en la expresión para v_z:

$$v_z = -\frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta)}{\mu_0}\;\cdot e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot \left[\frac{\delta}{\alpha}\cdot\; x - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right] + \;C_1$$

Para conocer C_1, nuevamente recurrimos a las condiciones de borde dadas por las consideraciones del problema. Esta vez se usa:

$$x = \delta \;\Rightarrow v_z = 0$$

$$\therefore\; 0 = \;-\frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta)}{\mu_0}\cdot e^{\alpha} \cdot \left[\frac{\delta^2}{\alpha} - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right] + \;C_1$$

$$\Rightarrow\; C_1 = \;\frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot e^{\alpha} \cdot \delta^2}{\mu_0}\cdot \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right]$$

Finalmente, el perfil de velocidades es:

$$v_z = -\frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta)}{\mu_0}\;\cdot e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot \left[\frac{\delta}{\alpha}\cdot\; x - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right] + \frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot e^{\alpha} \cdot \delta^2}{\mu_0}\cdot \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right]$$

$$v_z = \frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta)}{\mu_0}\;\cdot \left\{e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot \delta^2 \cdot \left[\;\frac{1}{\alpha^2} - \frac{x}{\alpha \cdot \delta}\right] + \;e^{\alpha} \cdot \delta^2 \cdot \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right]\right\}$$

$$v_z(x) = \frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot \delta^2}{\mu_0}\;\cdot \left\{e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot \left[\;\frac{1}{\alpha^2} - \frac{x}{\alpha \cdot \delta}\right] + \;e^{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right]\right\}$$

Queda calcular la velocidad media considerando α=2:

Se tiene:

$$\overline{v_z} = \frac{1}{\delta} \cdot \int_0^{\delta} v_z dx$$

$$\overline{v_z} = \frac{1}{\delta} \cdot \int_0^{\delta} \frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot \delta^2}{\mu_0} \cdot \left\{ e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{x}{\alpha \cdot \delta} \right] + e^{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right] \right\} dx$$

$$\overline{v_z} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot \delta^2}{\mu_0} \cdot \int_0^{\delta} \left\{ e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{x}{\alpha \cdot \delta} \right] + e^{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right] \right\} dx$$

$$\overline{v_z} = \frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot \delta}{\mu_0} \cdot \left[\int_0^{\delta} e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{x}{\alpha \cdot \delta} \right] dx + \int_0^{\delta} e^{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right] dx \right]$$

Desarrollando lo que se encuentra dentro del paréntesis cuadrado:

$$[\%] = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \int_0^{\delta} e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} dx - \frac{1}{\alpha \cdot \delta} \cdot \int_0^{\delta} e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot x dx + \delta \cdot e^{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right]$$

Ambas integrales fueron calculadas mientras se buscaba el perfil de velocidades, por lo cual se reemplazan directamente sus valores, evaluando en los límites indicados:

$$\frac{1}{\alpha^2} \cdot \int_0^{\delta} e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} dx = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \left(\frac{e^{\alpha} \cdot \delta}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha} \right)$$

$$\frac{1}{\alpha \cdot \delta} \cdot \int_0^{\delta} e^{\alpha\left(\frac{x}{\delta}\right)} \cdot x dx = \frac{1}{\alpha \cdot \delta} \cdot \left(e^{\alpha} \cdot \left(\frac{\delta^2}{\alpha} - \frac{\delta^2}{\alpha^2} \right) + \frac{\delta^2}{\alpha^2} \right)$$

Reemplazando todos estos valores en la expresión para velocidad media:

$$\overline{v_z} = \frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot \delta}{\mu_0} \cdot \left[\frac{1}{\alpha^2} \cdot \left(\frac{e^{\alpha} \cdot \delta}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha \cdot \delta} \cdot \left(e^{\alpha} \cdot \left(\frac{\delta^2}{\alpha} - \frac{\delta^2}{\alpha^2} \right) + \frac{\delta^2}{\alpha^2} \right) + \delta \cdot e^{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right] \right]$$

Reemplazando el valor de α, y desarrollando lo anterior:

$$\overline{v_z} = \frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot \delta}{\mu_0} \cdot \left[\frac{\delta}{4} \cdot \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\delta} \cdot \left(e^2 \cdot \left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2}{4} \right) + \frac{\delta^2}{4} \right) + \delta \cdot e^2 \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] \right]$$

$$\overline{v_z} = \frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot \delta}{\mu_0} \cdot \left[\frac{\delta \cdot e^2}{8} - \frac{\delta}{8} - \frac{1}{2\delta} \cdot \left(\frac{e^2 \cdot \delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}\right) + \frac{\delta \cdot e^2}{4}\right]$$

$$\overline{v_z} = \frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot \delta}{\mu_0} \cdot \left[\frac{\delta \cdot e^2}{8} - \frac{\delta}{8} - \frac{e^2 \cdot \delta}{8} + \frac{\delta}{8} + \frac{\delta \cdot e^2}{4}\right]$$

Finalmente, la velocidad media es:

$$\overline{v_z} = \frac{(\rho \cdot g \cdot cos\beta) \cdot \delta^2 \cdot e^2}{4 \cdot \mu_0}$$

Asignación de puntajes:

- 1 pto por plantear correctamente la ecuación de balance de momentum, y obtener τ_{xz}.
- 1 pto por calcular correctamente el perfil de velocidad a partir del balance de momentum y la ecuación de viscosidad de Newton.
- 1 pto por calcular correctamente la velocidad media, cuando α=2.