Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FENÓMENOS DE TRASPORTE EN METALURGIA EXTRACTIVA

Balances de Energía

Prof. Leandro Voisin A, MSc., Dr.

Académico – Universidad de Chile.
Jefe del Laboratorio de Pirometalurgia.
Investigador Senior - Tohoku University, Japan.

Flujo laminar y balance de energía

Balance de flujo de energía ó potencia

- ✓ *El balance se aplica a un volumen de control con el objetivo de desarrollar u obtener una ecuación diferencial que represente y describa el comportamiento del flujo de calor.*
- ✓ *Para la resolución de la ecuación diferencial será necesario imponer restricciones físicas del sistema (condiciones de borde) y de tiempo (condiciones iniciales).*
- ✓ *La resolución de la ecuación diferencial nos proporciona la distribución de temperatura en el sistema de donde se obtiene además la distribución del flujo de calor en la interface fluído-sólida.*

Balance de flujo de energía ó potencia

Para flujo estacionario el balance de energía queda definido por la ecuación general:

$$\left(\begin{array}{c}\textit{Diferencial de velocidad}\\ \textit{de energía mediante}\\ \textit{transporte convectivo}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\textit{Diferencial de velocidad}\\ \textit{de energía mediante}\\ \textit{transporte molecular}\end{array}\right)\ldots+$$

$$+\ldots\left(\begin{array}{c}\textit{velocidad de trabajo}\\ \textit{sobre el sistema por}\\ \textit{transporte molecular}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\textit{velocidad a la que el}\\ \textit{sistema realiza trabajo}\\ \textit{por transporte molecular}\end{array}\right)\ldots+$$

$$+\ldots\left(\begin{array}{c}\textit{velocidad de trabajo}\\ \textit{sobre el sistema por}\\ \textit{fuerzas externas}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\textit{velocidad de}\\ \textit{producción de energía}\end{array}\right)=0$$

$$e=\left(\tfrac{1}{2}\rho\upsilon^{2}+\rho\overline{U}\right)\mathrm{v}+[\pi\cdot\mathrm{v}]+q$$

$$e=\left(\tfrac{1}{2}\rho\upsilon^{2}+\rho\overline{H}\right)\mathrm{v}+[\tau\cdot\mathrm{v}]+q$$

Flujo laminar y balance de energía

Balance de flujo de energía ó potencia

Para flujo estacionario el balance de energía queda definido por la ecuación general:

$\left(\frac{1}{2}\rho \upsilon^{2} + \rho \overline{U}\right)\mathrm{v}$ — *Vector de densidad de flujo de energía convectiva*

q — *Vector de densidad de flujo molecular térmico*

$[\pi \cdot \mathrm{v}]$ — *Vector de densidad de flujo molecular de trabajo*

$$e = \left(\frac{1}{2}\rho \upsilon^{2} + \rho \overline{U}\right)\mathrm{v} + [\pi \cdot \mathrm{v}] + q$$

Vector de densidad de flujo de energía combinada

$$= \left(\frac{1}{2}\rho \upsilon^{2} + \rho \overline{H}\right)\mathrm{v} + [\tau \cdot \mathrm{v}] + q$$

Flujo laminar y balance de energía

Conducción de calor con una fuente de calor eléctrica

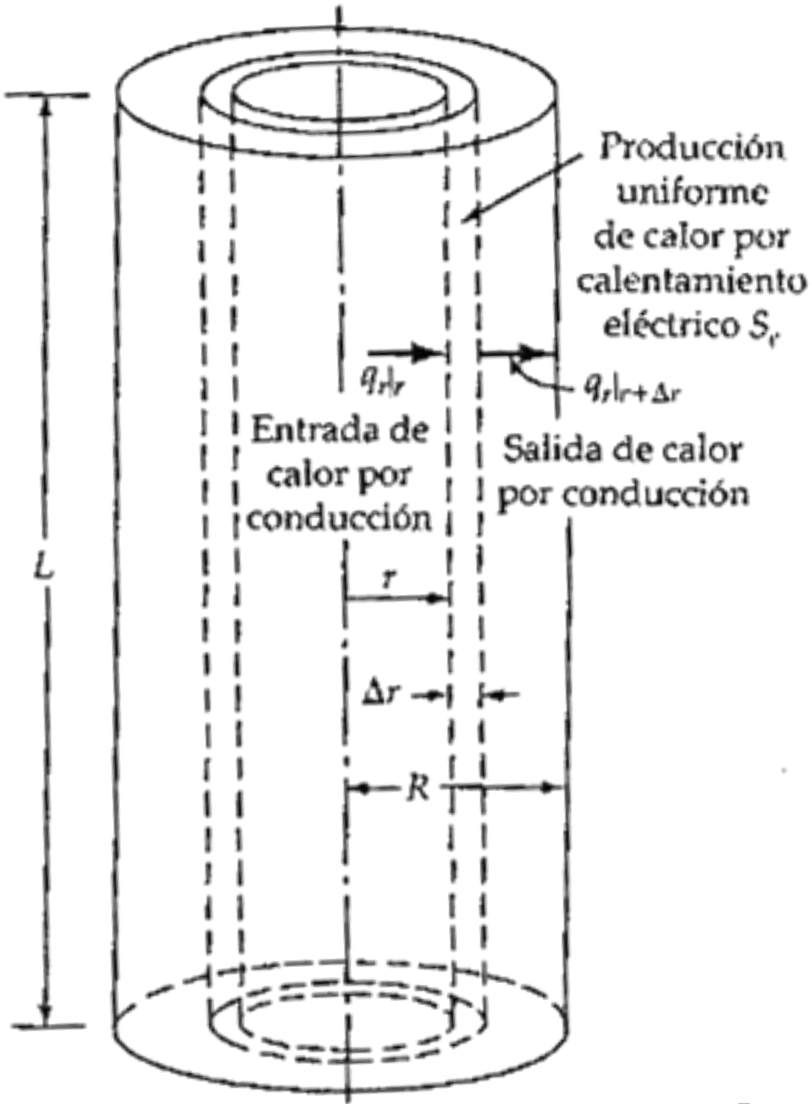
Alambre eléctrico

Considere un alambre eléctrico de sección circular de radio R y conductividad eléctrica k_e 1/(Ωcm).

Por el alambre circula una corriente I A/cm². La transmisión de corriente es un proceso irreversible, y algo de la energía eléctrica se convierte en calor.

La velocidad de producción de calor dada por la disipación eléctrica es S_e. La superficie del alambre se mantiene a T_o.

$$S_e = \frac{I^2}{k_e}$$



Flujo laminar y balance de energía

Alambre eléctrico

Consideramos envoltura cilíndrica de espesor Δr y longitud L. Debido a que v = 0 en el sistema, las únicas contribuciones al balance de energía son:

$$(2\pi \mathrm{rL})q_r\big|_r = (2\pi \mathrm{rL}\, q_r)\big|_r$$

Velocidad de entrada de calor a través de la superficie cilíndrica en r

$$(2\pi(\mathrm{r} + \Delta r)\mathrm{L})q_r\big|_{r+\Delta r} = (2\pi \mathrm{rL}\, q_r)\big|_{r+\Delta r}$$

Velocidad de salida de calor a través de la superficie cilíndrica en r+Δr

$$(2\pi \mathrm{r} \Delta \mathrm{rL})\mathrm{S}_e$$

Velocidad de producción de energía térmica por disipación eléctrica.

Flujo laminar y balance de energía

Alambre eléctrico

Ahora sustituyendo y ordenando términos en el balance de energía y dividiendo por $2\pi L\Delta r$ y tomando el límite cuando Δr tiende a cero, se obtiene:

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\left.(rq_r)\right|_{r+\Delta r} - \left.(rq_r)\right|_r}{\Delta r} = S_e r$$

$$\frac{d}{dr}(rq_r) = S_e r$$

Integrando la ec. diferencial de primer orden se obtiene:

$$q_r = \frac{S_e r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

La constante C_1 debe ser cero debido a la condición límite

en $r=0$, q_r no es infinito

Flujo laminar y balance de energía

Alambre eléctrico

Por lo tanto, la expresión final para la distribución de densidad de flujo de calor es:

$$q_r = \frac{S_e r}{2}$$

Esto indica que la densidad de flujo de calor aumenta linealmente con r.

Luego debemos sustituir la 1era ley de Fourier en la componente radial para obtener la expresión de la distribución de temperatura:

$$-k\frac{dT}{dr} = \frac{S_e r}{2}$$

Cuando se supone que k es cte. esta ec. diferencial de primer orden puede integrarse para obtener:

$$T = \frac{-S_e r^2}{4k} + C_2$$

Flujo laminar y balance de energía

Alambre eléctrico

La constante C_2 de integración se determina a partir de:

en $r=R$, $T=T_o$

$$C_2 = \left(\frac{S_e R^2}{4k} \right) + T_o$$

$$T - To = \frac{S_e R^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

La ec. proporciona el aumento de temperatura como una función parabólica de la distancia r al eje del alambre.

Flujo laminar y balance de energía

Alambre eléctrico

Una vez que se conocen las distribuciones de temperatura y de la densidad de flujo de calor, puede obtenerse más información sobre el sistema:

i) elevación máxima de temperatura: (para r=0)

$$T - To = \frac{S_e R^2}{4k}$$

ii) elevación media de temperatura:

$$\langle T \rangle - To = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R} \left(T(r) - T_o\right) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^{R} r dr d\theta} = \frac{S_e R^2}{8k}$$

Flujo laminar y balance de energía

Alambre eléctrico

iii) Salida de calor en la superficie: (para un alambre de longitud L)

$$Q\Big|_{r=R} = 2\pi RL \cdot q_r\Big|_{r=R} = 2\pi RL \cdot \frac{S_e R}{2} = \pi R^2 L \cdot S_e$$

Este resultado no es sorprendente, ya que en estado estacionario, todo el calor producido por disipación eléctrica en el volumen $\pi R^2 L$ debe salir a través de la superficie r=R.

	Flujo en un tubo	Alambre calentado
La primera integración da	$\tau_{rz}(r)$	$q_r(r)$
La segunda integración da	$v_z(r)$	$T(r) - T_0$
Condición límite en $r = 0$	τ_{rz} = finito	q_r = finito
Condición límite en $r = R$	$v_z = 0$	$T - T_0 = 0$
Propiedad de transporte	μ	k
Término que corresponde a la fuente	$(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)/L$	S_e
Suposiciones	μ = constante	k, k_e = constante

Analogía con fluidodinámica

Flujo laminar y balance de energía

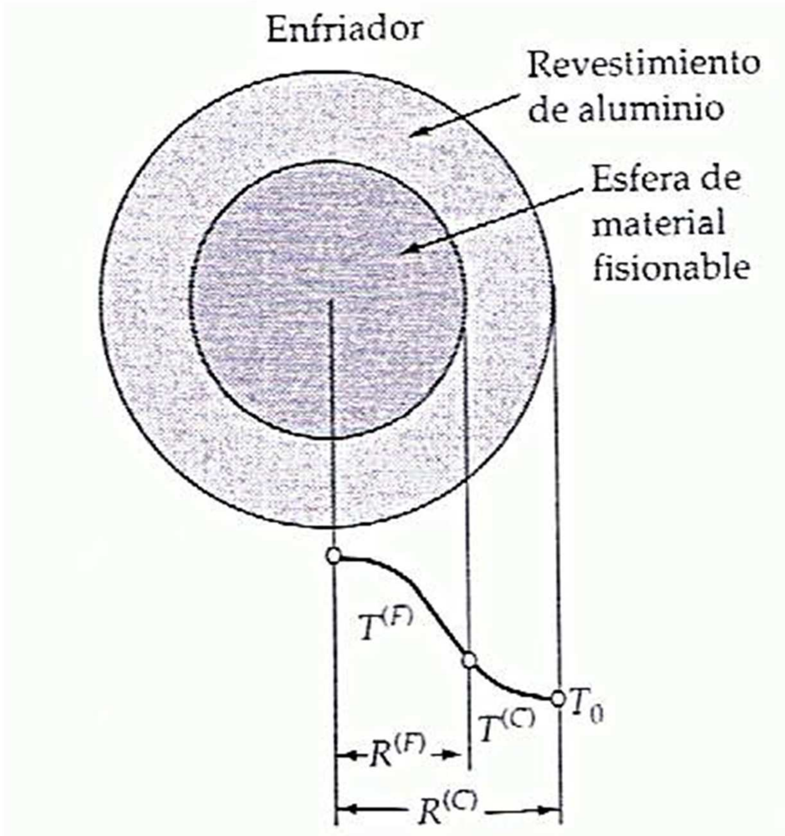
Conducción de calor con una fuente de calor nuclear

Considere un elemento combustible nuclear esférico de material fisionable de radio $R^{(F)}$, rodeado por un revestimiento esférico de aluminio con radio exterior $R^{(c)}$.

Al interior del elemento combustible se producen fragmentos de fisión cuyas energías cinéticas son muy elevadas.

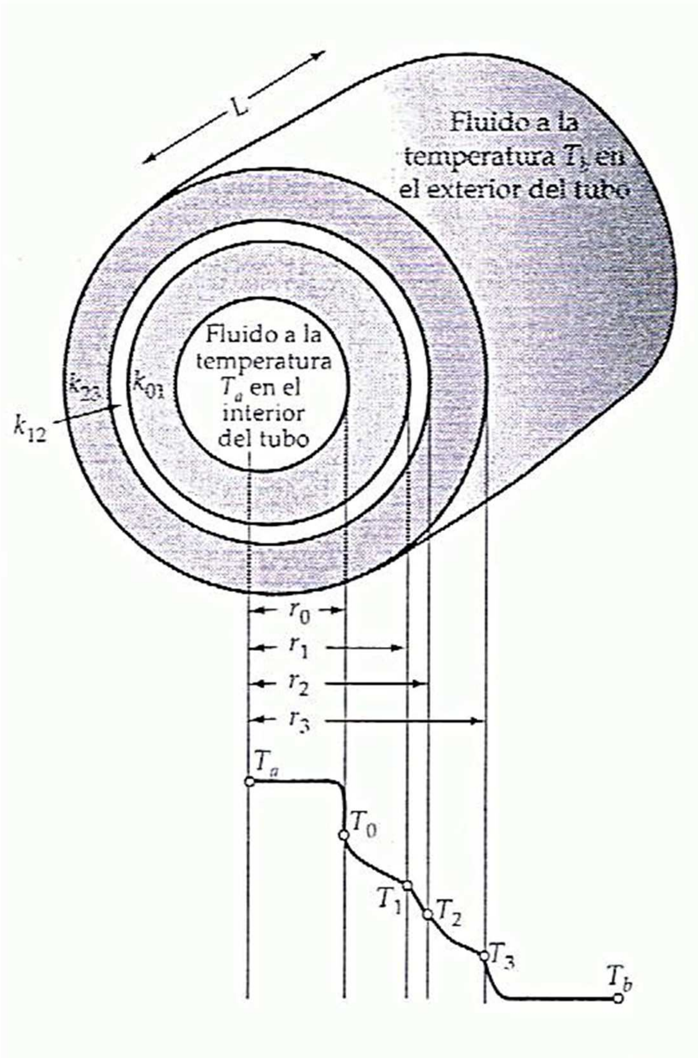
La mayor fuente de energía térmica S_n, en el reactor la constituyen las colisiones entre estos fragmentos y los átomos del material fisionable.

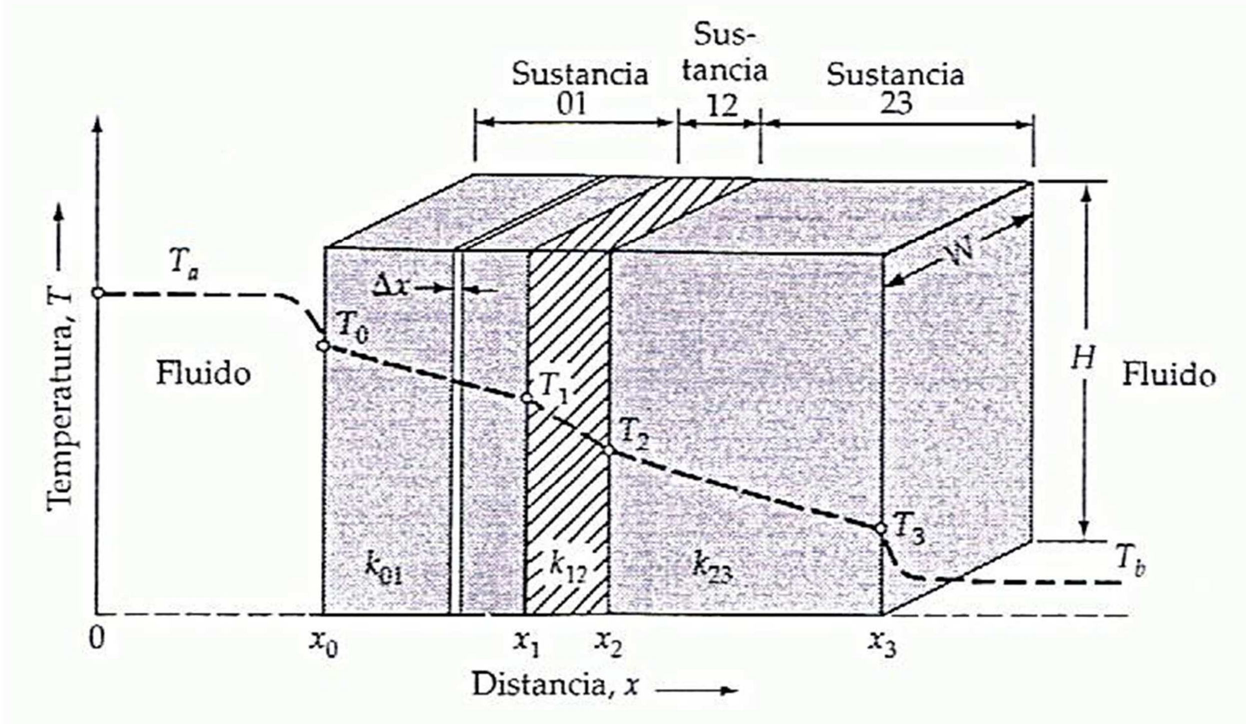
donde: S_{n0} es la velocidad volumétrica de producción de calor en el centro de la esfera, y b es una constante adimensional positiva.



$$S_n = S_{n0}\left[1 + b\left(\frac{r}{R^{(F)}}\right)^2\right]$$

Otros problemas:

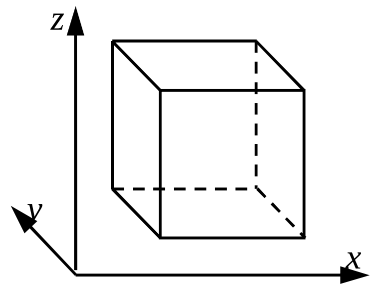




Ecuación General de Energía

Balance General de flujo de energía ó potencia

Para flujo transiente el balance de energía queda definido por la ecuación general:



$$\left(\begin{array}{c}\textit{Diferencial de velocidad}\\ \textit{de energía mediante}\\ \textit{transporte convectivo}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\textit{Diferencial de velocidad}\\ \textit{de energía mediante}\\ \textit{transporte molecular}\end{array}\right)\ldots+$$

$$+\ldots\left(\begin{array}{c}\textit{velocidad de trabajo}\\ \textit{sobre el sistema por}\\ \textit{transporte molecular}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\textit{velocidad a la que el}\\ \textit{sistema realiza trabajo}\\ \textit{por transporte molecular}\end{array}\right)\ldots+$$

$$+\ldots\left(\begin{array}{c}\textit{velocidad de trabajo}\\ \textit{sobre el sistema por}\\ \textit{fuerzas externas}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\textit{velocidad de}\\ \textit{producción de energía}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\textit{velocidad de}\\ \textit{acumulación de energía}\\ \textit{interna y cinética}\end{array}\right)$$

Ecuación General de Energía

Para desarrollar la ec. debemos aplicar la ley de conservación de energía a un elemento de volumen inmerso en un fluido en movimiento que presenta las componentes de velocidad, v_x, v_y y v_z .

Lo primero es determinar la velocidad de acumulación de energía interna y cinética.

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho \overline{U}\right)$$

Luego, debemos conocer cuanta energía entra y sale a través de las caras del elemento de volumen $\Delta x\Delta y\Delta z$.

$$\Delta y \Delta z\left(e_x\big|_x - e_x\big|_{x+\Delta x}\right) + \Delta x \Delta z\left(e_y\big|_y - e_y\big|_{y+\Delta y}\right) + \Delta x \Delta y\left(e_z\big|_z - e_z\big|_{z+\Delta z}\right)$$

donde «e», incluye el transporte convectivo de la energía cinética y de la energía interna, la conducción de calor y el trabajo asociado con los procesos moleculares o stress molecular, π.

Ecuación General de Energía

La velocidad a la cual se realiza el trabajo sobre el fluido o sistema por la fuerza externa es el producto punto de la velocidad «v» del fluido y la fuerza que actúa sobre el fluido($\rho\Delta x\Delta y\Delta z$)g., o bien:

$$\rho\Delta x\Delta y\Delta z\left(v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z\right)$$

Insertando las diversas contribuciones en la ec. general de energía, dividiendo por el volumen de control y haciéndolo tender a cero, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\overline{U}\right) = -\left(\frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} + \frac{\partial e_z}{\partial z}\right) + \rho\left(v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z\right)$$

o bien escrita en notación vectorial:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\overline{U}\right) = -(\nabla \cdot e) + \rho(v \cdot g)$$

Ecuación General de Energía

Todas las componentes por unidad de volumen

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\overline{U}\right) = -\left[\nabla\cdot\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\overline{U}\right)v\right] - (\nabla\cdot q)\ldots$$

velocidad de acumulación de energía interna y cinética

Diferencial de velocidad de energía mediante transporte convectivo

Diferencial de velocidad de energía mediante transporte molecular

$$\ldots - (\nabla\cdot p v) \quad - [\nabla\cdot(\tau\cdot v)] \quad + \rho(v\cdot g)$$

velocidad de trabajo sobre el sistema por fuerzas de presión

velocidad de trabajo sobre el sistema por fuerzas viscosas

velocidad de trabajo sobre el sistema por fuerzas externas

+ velocidad de producción de energía

- *Energía nuclear,*
- *Energía radiactiva*
- *Energía electromagnética*
- *Energía química*
- *Etc.*

Ecuación General de Energía

Considerando la energía potencial por unidad de masa, Φ, tal que $g=-\nabla\Phi$ y teniendo en cuenta que para cambios de elevación moderados, $\Phi = gh$, siendo h una coordenada en la dirección opuesta al campo gravitacional.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\overline{U} + \rho\Phi\right) = \ldots$$

$$\ldots - \left[\nabla\cdot\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\overline{U} + \rho\Phi\right)v\right] - (\nabla\cdot q) - (\nabla\cdot pv) - [\nabla\cdot(\tau\cdot v)]$$

Formas especiales de la Ec. de Energía

La forma más útil de la ec. de energía es aquella en la que aparece la temperatura, puesto que puede utilizarse para pronosticar perfiles de dicha propiedad.

Lo primero es encontrar una ec. de variación para la energía interna, para obtenerla, restamos la ec. de energía mecánica vista en el modulo de fluidodinámica a la ec. general de energía. Todas las componentes por unidad de volumen

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{U} = -\left(\nabla\cdot\rho\overline{U}\,\mathrm{v}\right) - \left(\nabla\cdot q\right)\ldots$$

velocidad de acumulación de energía interna — *Diferencial de velocidad de energía interna mediante transporte convectivo* — *Diferencial de velocidad de energía interna por conducción de calor*

$$\ldots - p\left(\nabla\cdot\mathrm{v}\right) - \left(\tau:\nabla\mathrm{v}\right)$$

velocidad reversible de aumento de energía interna por comprensión — *velocidad reversible de aumento de energía interna por disipación viscosa*

Formas especiales de la Ec. de Energía

La cantidad $-\tau : \nabla \mathrm{v}$ *describe la degradación de energía mecánica en energía térmica que ocurre en todos los sistemas de flujo y se denomina calentamiento por disipación viscosa.*

$$-(\tau : \nabla \mathrm{v}) = \tfrac{1}{2}\mu \sum_i \sum_j \left[\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i} \right) - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot \mathrm{v})\delta_{ij} \right]^2 + \kappa(\nabla \cdot \mathrm{v})^2$$

La ec. de energía interna en en términos de la derivada sustancial puede ser escrita como:

$$\rho \frac{D\overline{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - p(\nabla \cdot \mathrm{v}) - (\tau : \nabla \mathrm{v})$$

Formas especiales de la Ec. de Energía

Resulta conveniente cambiar la energía interna a entalpía:

$$\overline{U} = \overline{H} - p\overline{V} = \overline{H} - \left({}^{p}\!/\!{}_{\rho} \right)$$

$$\rho \frac{D\overline{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla \mathrm{v}) + \frac{Dp}{Dt}$$

Siendo que la entalpía es una función de p y de T, podemos obtener una expresión para el cambio en entalpía en un elemento de fluido que se mueve a la velocidad del fluido:

$$\rho \frac{D\overline{H}}{Dt} = \rho C_p \frac{DT}{Dt} + \rho \left[\overline{V} - T \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} \right)_p \right] \frac{Dp}{Dt}$$

Formas especiales de la Ec. de Energía

$$\rho \frac{D\overline{H}}{Dt} = \rho C_p \frac{DT}{Dt} + \rho \left[\overline{V} - T \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial T} \right)_p \right] \frac{Dp}{Dt}$$

$$= \rho C_p \frac{DT}{Dt} + \rho \left[\frac{1}{\rho} - T \left(\frac{\partial \left(1/\rho \right)}{\partial T} \right)_p \right] \frac{Dp}{Dt}$$

$$= \rho C_p \frac{DT}{Dt} + \left[1 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \right] \frac{Dp}{Dt}$$

$$\Rightarrow \rho C_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla \mathrm{v}) - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt}$$