Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería de Minas
MI3010 - Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva
Semestre - Primavera 2011

Profesor Leandro Voisin

Auxiliar Exequiel Marambio
Ayudantes Viviana Pavez
Kasandra Pavez

Pauta P2, Control 2 Primavera 2010

- **Problema N°1**

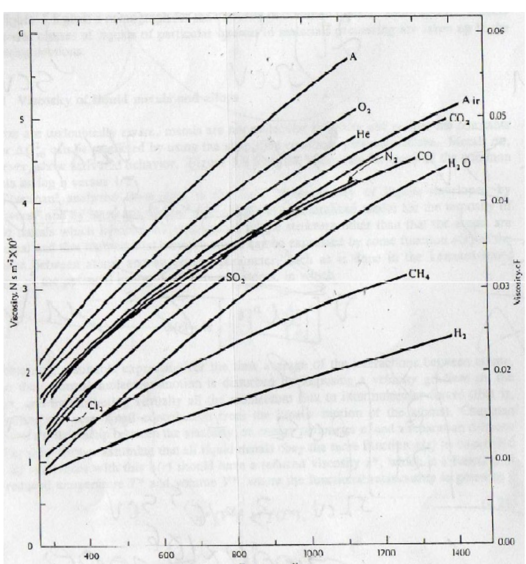
  (a) Explique detalladamente los métodos de capacitancia de masa y sólido semi infinito, sus diferencias y aplicaciones.

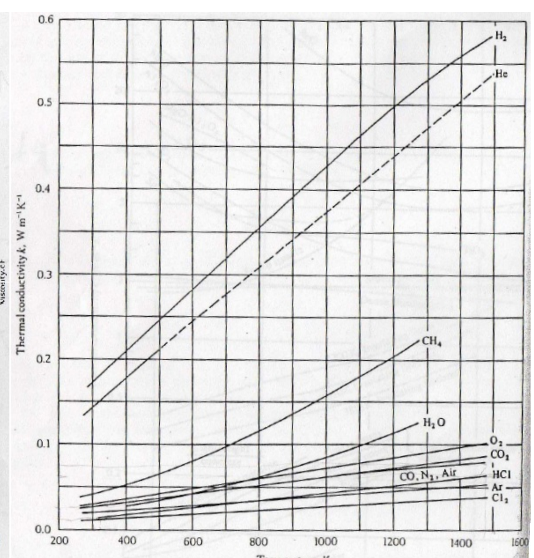
  (b) Para un cable conductor de radio r y resistencia eléctrica o, que representa 2 aislantes concéntricos de espesores δ_1 y δ_2 y conductividades térmicas κ_1 y κ_2 respectivamente, determine el perfil de temperatura en función de la máxima corriente eléctrica que puede conducir.

  (c) Una corriente de 25$[A]$ es conducida por un cable de cobre de 1$[mm]$ de diámetro con cubiertas aislantes de 1$[mm]$ y 0,5$[mm]$ de espesor y conductividades térmicas de 0,35 y 0,07$[W/(m \cdot °C)]$, respectivamente. Si el coeficiente de transferencia de calor es de 5,2$[W/(m^2 \cdot °C)]$ y la temperatura ambiente es de 20$[°C]$, indique si ocurre o no corto circuito por incineración del cable. Nota: la resistividad eléctrica del cobre es $1{,}96 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]$.

  (d) Si el cable descrito en (c), no tuviese material aislante. Determine el tiempo de respuesta de su enfriamiento al ser expuesto al aire y al ser sumergido en agua. El coeficiente de transferencia de calor del agua es 85,5$[W/(m^2 \cdot °C)]$. Para el cobre $C_P = 390[J/(kg \cdot °C)]$, $\kappa = 385[W/(m \cdot °C)]$, y $\rho = 8900[kg/m^3]$. Recuerde graficar sus resultados comparativamente T v/s t.

  (e) Dióxido de Carbono a 28$[°C]$ fluye a 2,7$[m/s]$ sobre una placa plana de 0,8$[m]$ de largo y 0,8$[m]$ de ancho y temperatura superficial de 600$[°K]$. Calcular el promedio del coeficiente de transferencia de calor para la longitud total de la placa y el correspondiente al extremo de la placa y las pérdidas totales de la placa. El dióxido de carbono tiene una densidad de 1,6$[kg/m^3]$.





- **Solución Problema N°1**

  (a) Ambos modelos permiten simplificar el cálculo de los perfiles de temperatura en función de ciertas condiciones.

  - Método de capacitancia de Masa:
    Supone que la energía se distribuye uniformemente a través del cuerpo en todo momento, de manera que no existe un gradiente de energía, pudiendo modelar al sistema como una unidad simple, o masa uniforme con igual temperatura en todo punto. Lo anterior se traduce en que la transferencia de calor por conducción (dentro del cuerpo) es mucho mayor que la convección en el exterior, por lo que los cambios de temperatura en la frontera se extenderán a lo largo de todo el cuerpo, obteniendo una temperatura uniforme en el sistema. Este método se puede aplicar con un 5 % de error cuando el número de Biot (Bi) es menor a $0,1$. Se usa generalmente para modelar sistemas eléctricos, como alambres delgados.
  - Método de sólido semi infinito:
    Supone que la transferencia de calor ocurre solo en la frontera de interacción del cuerpo con el ambiente, de manera que los cambios solo se provocan en la frontera y no se extienden a lo largo del cuerpo, de manera que lejos de la frontera la temperatura permanece constante e igual a la temperatura inicial del cuerpo. Lo anterior puede ocurrir cuando el tiempo de transferencia es reducido o el sistema es muy grande. Este modelo puede aplicarse con un 5 % de error cuando el número de Fourier es menor a $0,1$. Se usa, por ejemplo, cuando la superficie de un material con baja difusividad térmica se expone con un fluido a T constante o con un metal de alta conductividad térmica.

  (b) Se debe determinar el perfil de temperaturas para un cable con las siguientes características:

  - Radio r.
  - Resistividad eléctrica o.
  - 2 aislantes concéntricos con espesores δ_1 y δ_2, junto con conductividades térmicas κ_1 y κ_2.

  Se tiene entonces:

  Calor como consecuencia de la transmisión de corriente:

  $$q(W) = RI^2 = \frac{oL}{\pi r^2} I^2$$

  Calor transferido entre las capas de aislante hasta el ambiente, en coordenadas cilíndricas:

  $$q(W) = \frac{2\pi L \Delta T}{\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{\kappa_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_2}{r+\delta_1}\right)}{\kappa_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)h}}$$

  Igualando ambas expresiones:

  $$\frac{oL}{\pi r^2} I^2 = \frac{2\pi L \Delta T}{\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{\kappa_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_2}{r+\delta_1}\right)}{\kappa_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)h}}$$

  Simplificando y, recordando que $\Delta T = T_{int} - T_{ext}$, entonces:

  $$\frac{o}{\pi r^2} I^2 = \frac{2\pi (T_{int} - T_{ext})}{\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{\kappa_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_2}{r+\delta_1}\right)}{\kappa_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)h}}$$

  Despejando T_{int} tenemos:

  $$T_{int} = T_{ext} + \frac{oI^2}{2\pi^2 r^2} \left[\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{\kappa_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_2}{r+\delta_1}\right)}{\kappa_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)h} \right]$$

  Que es el perfil de temperatura al interior del cable.

(c) En este caso, solo hace falta reemplazar los datos en la ecuación obtenida en (b).
El cable tiene las siguientes características:

- Intensidad de corriente: $I = 25[A]$
- Diámetro: $d = 1[mm]$
- Aislantes: $\delta_1 = 1[mm]$, $\kappa_1 = 0{,}35[W/(m\ °C)]$; $\delta_2 = 0{,}5[mm]$, $\kappa_1 = 0{,}07[W/(m\ °C)]$.
- Coeficiente de transferencia de calor: $h = 5{,}2[W/(m^2\ °C)]$
- Temperatura exterior: $T_{ext} = 20[°C]$
- Resistividad eléctrica del cable: $o = 1{,}96 \times 10^{-8}[\Omega m]$

Citando la fórmula de (b):

$$T_{int} = T_{ext} + \frac{oI^2}{2\pi^2 r^2}\left[\frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1}{r}\right)}{\kappa_1} + \frac{\ln\left(\frac{r+\delta_1+\delta_2}{r+\delta_1}\right)}{\kappa_2} + \frac{1}{(r+\delta_1+\delta_2)h}\right]$$

Haciendo los respectivos cambios de unidades y, reemplazando los datos en la formula, se tiene:

$$T_{int} = 276{,}67[°C]$$

Por lo tanto la temperatura interior del cable es de $276,67[°C]$.
Considerando que un cable puede resistir temperaturas superiores, pero que los aislantes pueden incinerarse con temperaturas por sobre los $100[°C]$, entonces se concluye que el cable en cuestión puede incinerarse, y por tanto, generar un cortocircuito.

(d) Para el cable descrito en (c), pero sin considerar la aislación, se debe evaluar su enfriamiento en agua y en aire.

- Diámetro: $d = 1[mm]$
- Coeficiente de transferencia de calor (aire): $h = 5{,}2[W/(m^2\ °C)]$
- Coeficiente de transferencia de calor (agua): $h = 85{,}5[W/(m^2\ °C)]$
- Temperatura exterior: $T_{ext} = 20[°C]$
- Temperatura interior: $T_{int} = 80[°C]$
- Calor específico cobre: $C_P(Cu) = 390[J/(kg\ °C)]$
- Conductividad térmica cobre: $\kappa_{Cu} = 385[W/(m\ °C)]$
- Densidad cobre cobre: $\rho_{Cu} = 8900[kg/m^3]$

En primer lugar, calculamos la longitud característica para el cable:

$$L_c = \frac{Area}{Perimetro} = \frac{\pi\frac{D^2}{4}}{\pi D} = \frac{D}{4} = 2{,}5 \times 10^{-4}[m]$$

A continuación, se debe evaluar si es posible aplicar el método de capacitancia de masa, para lo cual se calcula el número de Biot (Bi) para ambos casos:

$$Bi_{agua} = \frac{hL_c}{\kappa} = \frac{85{,}5[W/(m^2\ °C)] \cdot 2{,}5 \times 10^{-4}[m]}{385[W/(m\ °C)]} = 5{,}56 \times 10^{-5} \leq 0{,}1$$

$$Bi_{aire} = \frac{hL_c}{\kappa} = \frac{5{,}2[W/(m^2\ °C)] \cdot 2{,}5 \times 10^{-4}[m]}{385[W/(m\ °C)]} = 3{,}38 \times 10^{-6} \leq 0{,}1$$

Según lo anterior, se puede emplear el método de capacitancia de masa en ambos casos.
Para transferencia convectiva de calor, según capacitancia de masa, se tiene:

$$\rho V C_p \frac{dT(t)}{dt} = hA(T_\infty - T(t))$$

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT(t)}{(T(t)-T_\infty)} = -\int_0^t \frac{hA}{\rho V C_p} dt$$

De lo anterior se obtiene:

$$\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho V C_p}t} = e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-Bi \cdot Fo}$$

Con

$$\tau = \frac{\rho L_c C_p}{h}$$

Así, para el agua se tiene:

$$\tau = \frac{\rho L_c C_p}{h} = \frac{8900[kg/m^3] \cdot 2{,}5 \times 10^{-4}[m] \cdot 390[J/(kg\ ^\circ C)]}{85{,}5[W/(m^2\ ^\circ C)]} = 10{,}15[s]$$

$$\frac{T(t)-20[^\circ C]}{80[^\circ C]-20[^\circ C]} = e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{10{,}15}}$$

De esta manera, para alcanzar una temperatura de aproximadamente $25[^\circ C]$, se requiere de un poco mas de 25 segundos.

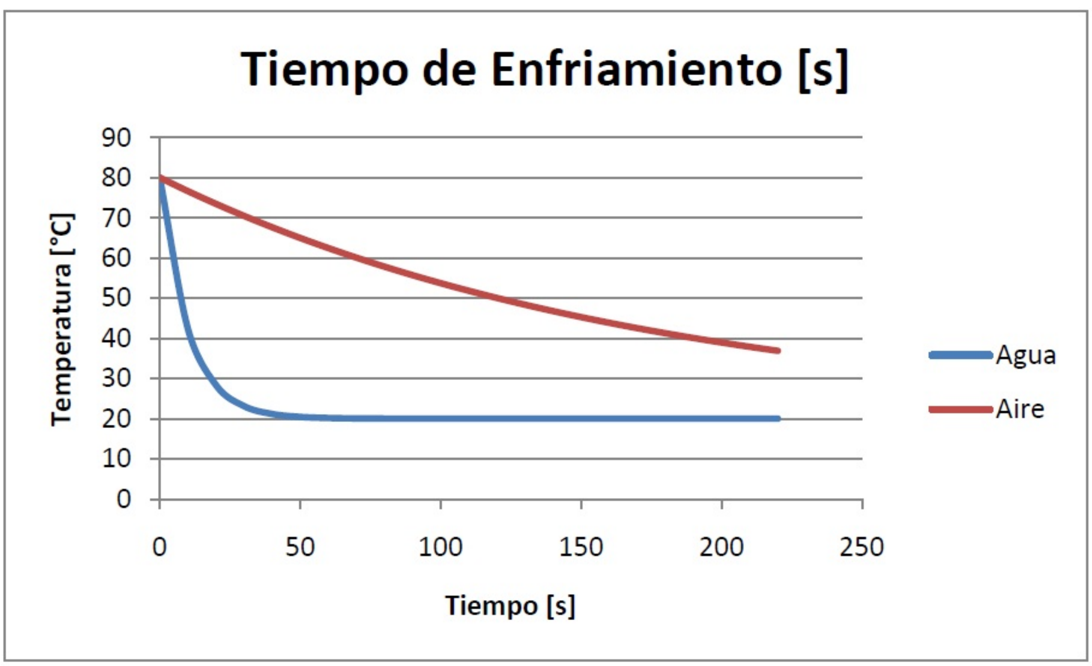
Para el aire se tiene:

$$\tau = \frac{\rho L_c C_p}{h} = \frac{8900[kg/m^3] \cdot 2{,}5 \times 10^{-4}[m] \cdot 390[J/(kg\ ^\circ C)]}{5{,}2[W/(m^2\ ^\circ C)]} = 166{,}88[s]$$

$$\frac{T(t)-20[^\circ C]}{80[^\circ C]-20[^\circ C]} = e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{166{,}88}}$$

En este caso, para alcanzar una temperatura de aproximadamente $25[^\circ C]$, se requiere aproximadamente de 415 segundos.

Gráficamente, se tiene:



(e) Para CO_2 fluyendo por una placa plana se cuenta con los siguientes datos:

- Temperatura: $28[^\circ C] = 301[^\circ K]$
- Velocidad: $2{,}7[m/s]$
- Dimensiones placa: $0{,}8 \times 0{,}8[m^2]$
- Temperatura superficial placa: $600[^\circ K]$
- Densidad CO_2: $1{,}6[kg/m^3]$
- Calor especifico: $C_p(CO_2) = 1000[J/(kg\ ^\circ K)]$

En primer lugar, debe obtenerse las propiedades del fluido a las condiciones entregadas, usando los gráficos entregados:
La temperatura promedio es

$$T_{prom} = \frac{301 + 600}{2} = 450{,}5[^\circ K]$$

A esta temperatura, se tiene:

$$\mu_{CO_2} \approx 2{,}5 \times 10^{-5}[Pa \cdot s]$$

$$\kappa_{CO_2} \approx 0{,}04[W/(m\ ^\circ K)]$$

Con lo anterior, el número de Prandtl es:

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\kappa} = \frac{2{,}5 \times 10^{-5}[Pa \cdot s] \cdot 1000[J/(kg\ ^\circ K)]}{0{,}04[W/(m\ ^\circ K)]}$$

Como $Pr \geq 0{,}6$, entonces para un flujo laminar se puede utilizar:

$$h(x) = 0{,}332 \cdot \kappa \cdot Pr^{1/3} \cdot \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu \cdot x}}$$

$$h(prom) = 0{,}664 \cdot \kappa \cdot Pr^{1/3} \cdot \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu \cdot L}}$$

Donde ν es la viscosiadad cinemática $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.
Así, el coeficiente de transferencia de calor promedio:

$$h(prom) = 0{,}664 \cdot 0{,}04[W/(m\ ^\circ K)] \cdot (0{,}625)^{1/3} \cdot \sqrt{\frac{2{,}7[m/s] \cdot 1{,}6[kg/m^3]}{2{,}5 \times 10^{-5}[Pa \cdot s] \cdot 0{,}8[m]}}$$

$$\Rightarrow\ h(prom) = 10{,}55 \left[\frac{W}{m^2 \cdot {}^\circ K}\right]$$

Y, el coeficiente de transferencia de calor:

$$h(x) = \frac{h(prom)}{2} = 5{,}275 \left[\frac{W}{m^2 \cdot {}^\circ K}\right]$$

Finalmente, las pérdidas de calor en la placa son:

$$q = h(prom) \cdot A \cdot (T_S - T_{CO_2})$$

$$q = 10{,}55[W/(m^2\ ^\circ K)] \cdot (0{,}8[m])^2 \cdot 299[^\circ K]$$

$$\Rightarrow\ q = 2018{,}85[W]$$