

# *FENÓMENOS DE TRASPORTE EN METALURGIA EXTRACTIVA*

*Clase 06/06*

*Transporte de Calor*

Prof. Leandro Voisin A, MSc., Dr.

Académico – Universidad de Chile

Jefe del Laboratorio de Pirometalurgia

Investigador Senior - Tohoku University, Japan.

## ***Solución empírica a problemas de conducción transiente***

- *Para problemas de conducción de calor en sólidos, con una componente transiente y una o más coordenadas, la solución puede obtenerse a partir de las condiciones iniciales y de borde del problema.*
- *Matemáticamente se pueden utilizar métodos de combinación de variables, separación de variables, respuesta sinusoidal o transformada de Laplace.*
- *Para no centrarse en los métodos matemáticos complejos, se describirán dos métodos empíricos que hacen uso de simplificaciones apropiadas:*
  - *Método de capacitancia de masa*
  - *Modelo de sólido semi-infinito*

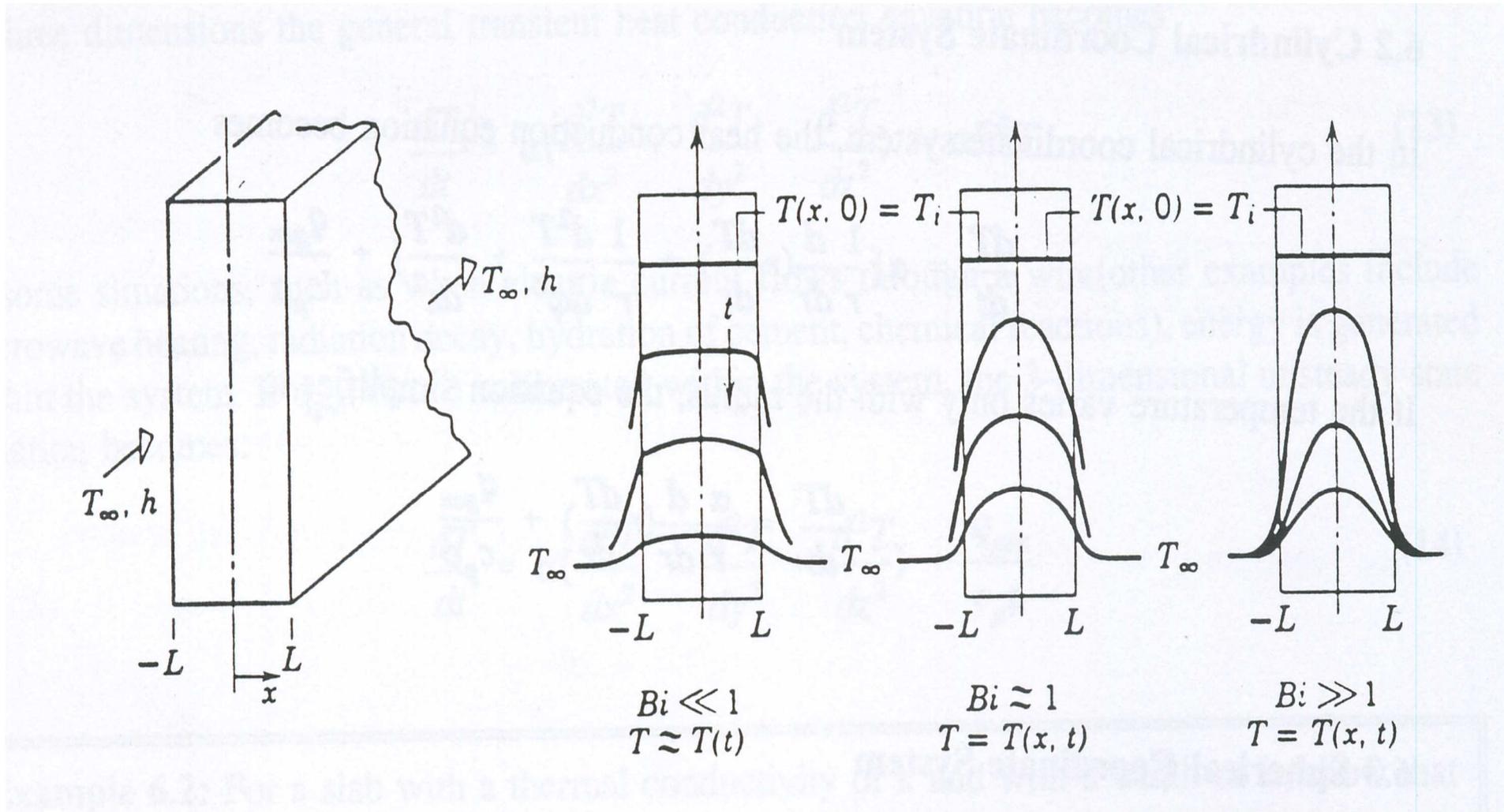
## **Método de Capacitancia de masa**

- *En muchos sistemas, la tasa de transporte de energía hacia o desde un sistema es mucho más lenta que la velocidad a la que se distribuye dentro del sistema.*
- *En ese caso, es razonable asumir que la energía se distribuye uniformemente a través del sistema en cada momento por lo que no hay un gradiente dentro de éste.*
- *Cuando ocurre este caso el sistema puede ser tratado como una unidad simple ó masa.*

## **Método de Capacitancia de masa**

- *Un ejemplo metalúrgico, en sistema transiente lo constituye el enfriamiento de un bloque de cobre en aire. Ello porque el cobre tiene una alta conductividad térmica y ocurre una lenta remoción del flujo de calor por el aire, por lo tanto el bloque todo el tiempo durante el enfriamiento presenta una temperatura casi uniforme.*
- *El método de capacitancia de masa tiene un amplio rango de aplicaciones y puede ser usado para análisis de transferencia de calor, transferencia de masa, reactores químicos y sistemas eléctricos. En estos últimos, esta técnica se aplica a la carga o descarga de condensadores a través de alambres delgados.*

## Método de Capacitancia de masa



Ilustraciones sobre el método de capacitancia de masa

## **Método de Capacitancia de masa** **Transferencia convectiva**

*Para transferencia de calor convectiva, tenemos la siguiente ecuación:*

$$\rho V c_p \frac{dT(t)}{dt} = hA(T_\infty - T_s(t))$$

*h es el coeficiente de transferencia de calor, A es la superficie del sistema, V es su volumen,  $\rho$  la densidad,  $C_p$  la capacidad calorífica,  $T_\infty$  es la temperatura del fluido ambiente,  $T_s$  es la temperatura del sólido y  $T(t)$  es la temperatura del seno del sólido.*

*cuando el método es aplicable, la temperatura en la superficie ( $T_s$ ) iguala a la temperatura en el seno del sistema ( $T$ ) en todo momento:*

$$T_s(t) = T(t)$$

## **Método de Capacitancia de masa Transferencia convectiva**

*bajo esta suposición y con una temperatura inicial  $T_0$  del sistema, obtenemos:*

$$\int_{T_0}^T \frac{dT(t)}{(T(t) - T_\infty)} = - \int_0^t \frac{hA}{\rho V c_p} dt$$

*Como resultado:*

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho V c_p} t} = e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-Bi \cdot Fo}$$

*donde la constante de tiempo  $\tau$  esta dada por:*

$$\tau = \frac{\rho V c_p}{hA} = \frac{\rho L_c c_p}{h}$$

## **Método de Capacitancia de masa** **Transferencia convectiva**

$L_c$  es el largo característico ( $V/A$ ) y se usa en la definición de los números adimensionales de Fourier y Biot:

$$Fo = \frac{kt}{\rho c_p L_c^2} = \frac{\alpha t}{L_c^2} \qquad Bi = \frac{hL_c}{k}$$

| <b>Sistema</b>                                      | <b>V/A</b>                      | <b><math>L_c</math></b> | <b>Bi Fo</b>             |
|---|---------------------------------|-------------------------|--------------------------|
| <i>Placa afectada por ambos lados</i><br>Ancho: $W$ | $\frac{WL_1 L_2}{2 L_1 L_2}$    | $\frac{W}{2}$           | $\frac{2ht}{W \rho c_p}$ |
| <i>Cilindro</i><br>Radio = $R$                      | $\frac{\pi R^2 L}{2 \pi RL}$    | $\frac{R}{2}$           | $\frac{2ht}{R \rho c_p}$ |
| <i>Esfera</i><br>Radio = $R$                        | $\frac{4/3 \pi R^3}{4 \pi R^2}$ | $\frac{R}{3}$           | $\frac{3ht}{R \rho c_p}$ |

## **Método de Capacitancia de masa** **Transferencia convectiva**

*Para determinar si el método de capacitancia de masa es aplicable o no, tenemos que ver la razón relativa entre la resistencia térmica interna y externa.*

*La transferencia de calor hacia la superficie está dada por  $h \cdot (T_{\infty} - T_{sup})$  y dentro del sólido, se puede aproximar por  $k \cdot (T_{sup} - T_{centro}) / L$ , dado que durante la transferencia, la energía transferida desde el ambiente a la superficie iguala a la energía conducida desde la superficie, obtenemos:*

$$\frac{T_{superficie} - T_{centro}}{T_{\infty} - T_{superficie}} \approx \frac{\frac{k}{L}}{\frac{1}{h}} = \frac{h \cdot L}{k} = Bi$$

## **Método de Capacitancia de masa** **Transferencia convectiva**

*Si esta razón es mucho menor a 1, la resistencia a conducir calor dentro del sólido es mucho menor a la resistencia convectiva a través de la capa límite fluido/sólido. Para  $Bi$  menores a 0.1, el error introducido por esta técnica al asumir temperatura uniforme es menor al 5%, lo que es aceptable para la mayoría de los cálculos de ingeniería.*

*Método de capacitancia de masa:  $Bi \leq 0.1$*

### *Ejemplo 30*

*Determinar la respuesta de temperatura de un alambre de cobre de 0,79 mm de diámetro el cual es inmerso: a) en agua, y b) en aire, ambos a 20 °C.*

*El alambre esta inicialmente a 80 °C,  $h_{\text{agua}} = 85$   $h_{\text{aire}} = 5$  W/m<sup>2</sup>°C, respectivamente, mientras que para el cobre:  $C_p = 390$  J/kg °C,  $k = 385$  W/m °C, y  $\rho = 8900$  kg/m<sup>3</sup>.*

## **Método de Capacitancia de masa Transferencia convectiva**

### *Ejemplo 30, Solución:*

*El primer paso es encontrar el número de Biot para determinar si el método de capacitancia de masa es aplicable. La longitud característica del alambre (volumen/área) es:*

$$L_c = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{D}{4} = \frac{R}{2}$$

*El número de Biot para el agua y el aire son:*

$$\text{Agua : } Bi = \frac{h \cdot L_c}{k} = \frac{h \cdot D}{4k} = 4,4 \cdot 10^{-5} \leq 0,1$$

$$\text{Aire : } Bi = 0,25 \cdot 10^{-5} \leq 0,1$$

*Por lo tanto, el método de capacitancia de masa es válido en ambos casos.*

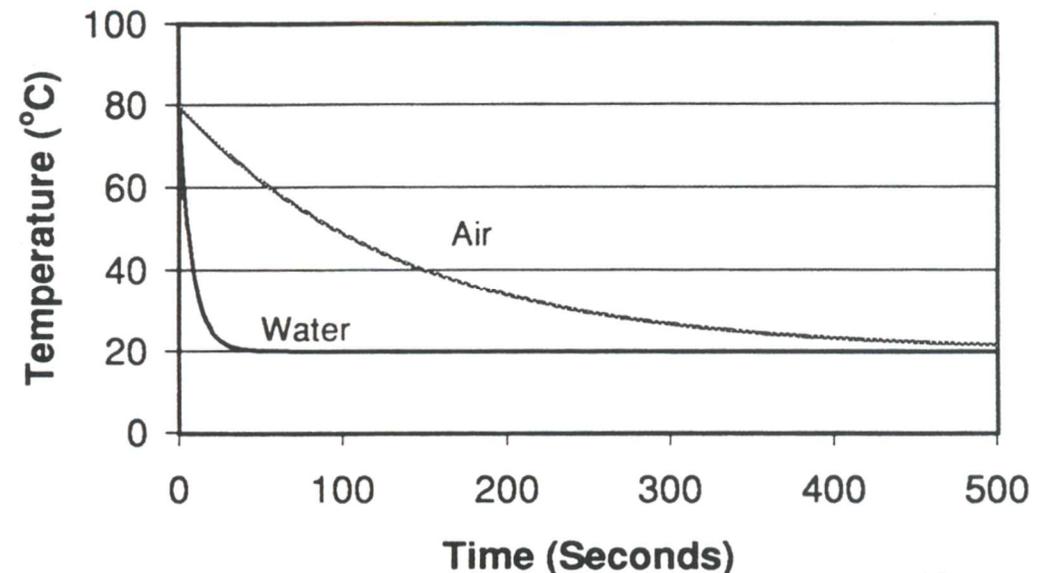
## Método de Capacitancia de masa Transferencia convectiva

La temperatura del alambre está dada por:

$$\text{Agua : } \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-\frac{hA}{\rho V C_p} t} = e^{-\frac{2h}{\rho C_p R} t} = e^{-\frac{t(s)}{8,1}}$$

$$\text{Aire : } \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-\frac{t(s)}{137}}$$

La respuesta a la temperatura se aprecia en la Figura. En el caso del agua toma 20 s en que la temperatura caiga a 25 °C, mientras que en el caso del aire toma 340 s en hacer lo mismo.



## **Método de Capacitancia de masa**

### **Transferencia convectiva**

#### *Ejemplo 31:*

*Una esfera de cobre de 1 cm de diámetro cae a un estanque de agua (27 °C) a 1 m de profundidad con una velocidad constante de 1,5 m/s. Inicialmente la esfera tiene una temperatura de 87 °C.*

*El coeficiente de transferencia de calor entre el agua y la esfera es de 8 kW/m<sup>2</sup>K.*

*Calcular la temperatura de la esfera cuando esta alcanza el fondo del estanque.  $k_{Cu} = 385 \text{ W/mK}$ ,  $h_{Cu} = 9,38 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .*

## **Método de Capacitancia de masa** **Transferencia convectiva**

### *Ejemplo 31, Solución:*

*Con una velocidad de 1,5 m/s a la esfera le toma 0,667 s alcanzar el fondo del estanque. Para determinar si el método de capacitancia de masa puede ser aplicado se debe calcular el número de Biot.*

$$Bi = \frac{h \cdot L_c}{k} = \frac{h \cdot R}{3k} = \frac{8000 \cdot 0,005}{3 \cdot 385} = 0,035$$

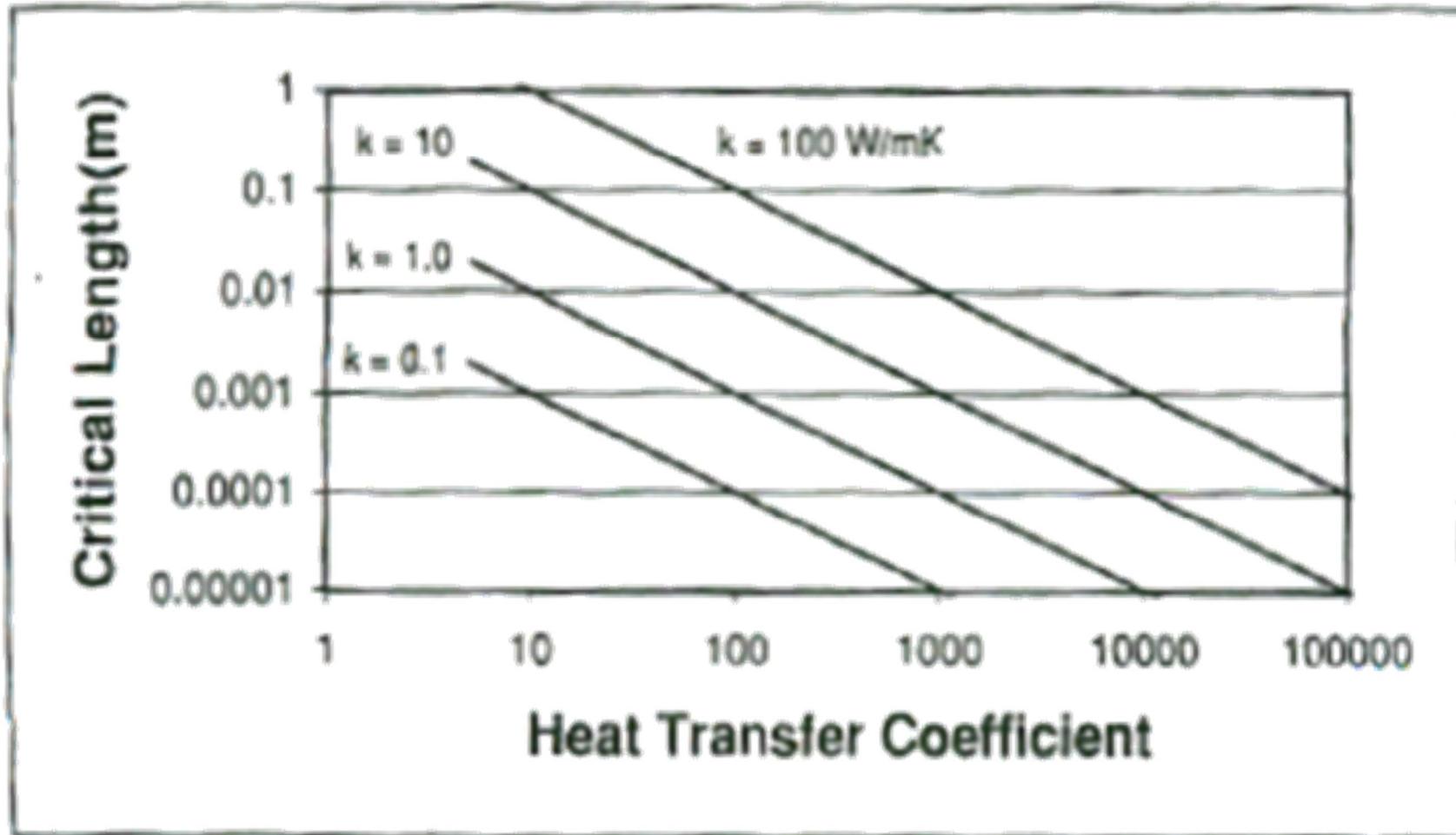
*Ya que este es menor a 0,1 se puede con razonable precisión usar la ecuación de capacitancia de masa. Entonces:*

$$\frac{T_{Cu} - 27}{87 - 27} = e^{-Bi \cdot Fo} = e^{-0,0346 \cdot 22,5} = 0,46$$

*Resolviendo para la temperatura del cobre da 54,6 °C.*

## *Método de capacitancia*

### *Longitud crítica de materiales*



*Longitud crítica de materiales v/s el coeficiente de transferencia de calor*

## **Método de capacitancia**

### **Longitud crítica de materiales**

| <b>Tipo de transferencia de Calor</b> | <b>Sistema</b>              | <b>Coefficiente de Transferencia de Calor (W/m<sup>2</sup>K)</b> |
|---------------------------------------|-----------------------------|--|
| <i>Convección Natural</i>             | <i>Gas</i>                  | <i>3 - 30</i>  |
|                                       | <i>Agua</i>                 | <i>100 – 1.000</i>   |
| <i>Convección Forzada</i>             | <i>Gas</i>                  | <i>10 - 300</i>  |
|                                       | <i>Agua</i>                 | <i>300 – 15.000</i>  |
|                                       | <i>Petróleo</i>             | <i>50 – 1.700</i>  |
|                                       | <i>Metal Líquido</i>        | <i>6.000 – 110.000</i>   |
| <i>Cambio de Fase</i>                 | <i>Agua Hervida</i>         | <i>3.000 – 60.000</i>  |
|                                       | <i>Condensación de agua</i> | <i>5.000 – 110.000</i>   |
| <i>Radiación</i>                      |                             | <i>5 – 1.000</i>   |

## **Método de capacitancia**

### **Longitud crítica de materiales**

*La tabla anterior entregó el rango de valor del coeficiente de transferencia de calor para varias condiciones.*

*En el caso de enfriamiento con aire,  $3 < h < 300 \text{ W/m}^2\text{K}$  el método de capacitancia de masa, puede ser usado para un gran número de piezas hechas de metal. Para el caso de aisladores tal como vidrio, la longitud crítica puede ser menos que 1 cm, para aplicar el método.*

*Con enfriamiento con agua forzada con un coeficiente de transferencia de calor hasta  $15 \text{ kW/m}^2\text{K}$ , aún para el caso del cobre se debe ir a dimensiones inferiores a 0,5 cm para obtener números de Biot inferiores a 0,1.*

## **Método de capacitancia**

### **Longitud crítica de materiales**

#### *Ejemplo 32:*

*Determinar el tiempo requerido para granular cobre líquido a 1150 °C y enfriarlo a 50 °C usando una ducha de agua a 30 °C. El cobre granulado forma gotas esféricas. Asumir un coeficiente de transferencia de calor de 1000 W/m<sup>2</sup>K.*

*Cobre:  $\rho = 8920 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_{p,\text{líquido}} = 517 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ ,  $C_{p,\text{sólido}} = 437 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ ,  $\Delta H_{\text{fusión}} = 207 \text{ kJ/kg}$ , punto de fusión = 1085 °C,*

#### *Ejemplo 32, Solución:*

*50 mg de cobre tienen un radio de 1,1 mm y un área superficial de  $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ . Aunque la  $\rho_{\text{Cu}}$  líquido es ligeramente más baja que la del sólido, el tamaño de gota se puede asumir constante. Para gotas individuales, se obtiene el siguiente dato de calor:  $C_{p,\text{líquido}} = 0,0259 \text{ J/}^\circ\text{C}$ ,  $C_{p,\text{sólido}} = 0,0219 \text{ J/}^\circ\text{C}$ ,  $\Delta H_{\text{fusión}} = 10,4 \text{ J}$ . Usando la técnica de capacitancia de masa se tendrá que::*

## Método de capacitancia

### Longitud crítica de materiales

$$\int_{1150}^{1085} \frac{dT}{T(t) - 30} = \dots$$

$$\dots = - \int_0^{t_1} \frac{1000 \cdot 1,5 \cdot 10^{-5}}{0,0259} dt = -0,58 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 0,10 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{\Delta H_f}{A \cdot (T_f - 30) \cdot h} = \frac{10,4 \text{ s}}{1,5 \cdot 10^{-5} \cdot (1085 - 30) \cdot 1000} = 0,66 \text{ s}$$

$$\int_{1085}^{50} \frac{dT}{T(t) - 30} = \dots$$

$$\dots = - \int_0^{t_3} \frac{1000 \cdot 1,5 \cdot 10^{-5}}{0,0219} dt = -0,685 \cdot t_3 \Rightarrow t_3 = 5,8 \text{ s}$$

*Lo que conduce a un tiempo total de 6,6 s. Notar que se asume que la temperatura del agua no cambia. Lo que significa que se requiere un gran requerimiento de agua.*

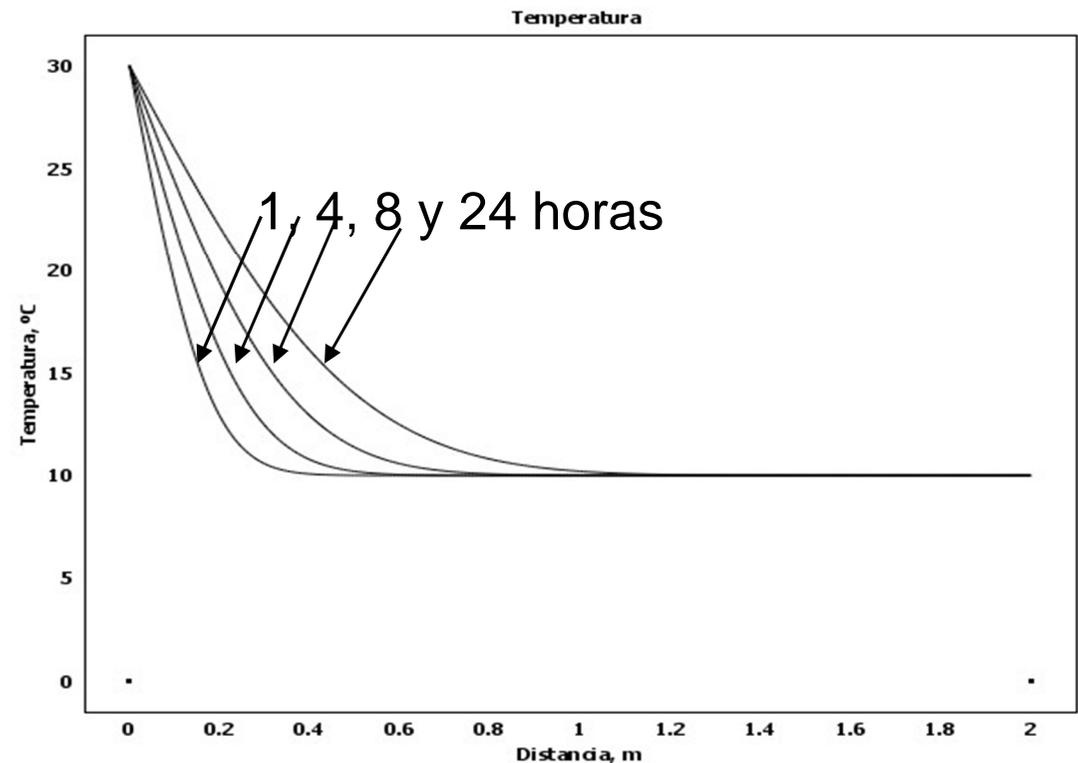
## **Modelo de sólido semi infinito**

- *Este modelo asume que el fenómeno de transferencia sólo ocurre cerca de la superficie y no penetra a todo el sistema.*
- *Esto ocurre cuando el proceso se lleva a cabo en un tiempo reducido o el sistema es muy “grande”.*
- *En este caso podemos asumir que la temperatura lejos de la superficie se mantiene constante e igual a la temperatura inicial.*
- *De algún modo, este modelo es el opuesto al método de capacitor de masa o “bloque capacitor”.*
- *La razón de definir si el sistema puede o no ser tratado como un modelo semi infinito es que es más simple de tratar matemáticamente.*

## Modelo de sólido semi infinito

Como un ejemplo, supongamos una roca expuesta al sol durante 8 hrs. luego de una noche fría. En términos de transferencia de calor importan las dimensiones de la roca 1, 10, 100 ó 1000 m ya que durante el día, sólo la superficie se calentará.

La figura muestra el perfil de temperatura en el granito, en donde la temperatura varía entre 30 y 10 °C.



## **Aplicabilidad Modelo Semi Infinito**

*Al usar el modelo semi-infinito asumimos que sólo una parte del sistema ha sido afectada por el cambio en la superficie.*

*En tanto el número de Fourier sea mucho menor que 1, el proceso de transferencia de calor ha recién comenzado y no ha alcanzado el otro extremo del sistema*

### *Ejemplo 33:*

*Al encender un horno, inicialmente sus paredes se encuentra a temperatura ambiente, 20 °C. Las murallas del horno están hechas de 10 cm de aislación con las siguientes propiedades  $k=0.12$  W/m K,  $C_p=1300$  J/kg K,  $\rho=600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\alpha=1.54 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s.*

*Determine: Por cuanto tiempo se puede tratar a las murallas como sólido semi infinito y Cuánto tiempo tardará en llegar el sistema a régimen estacionario*

### *Ejemplo 33, Solución:*

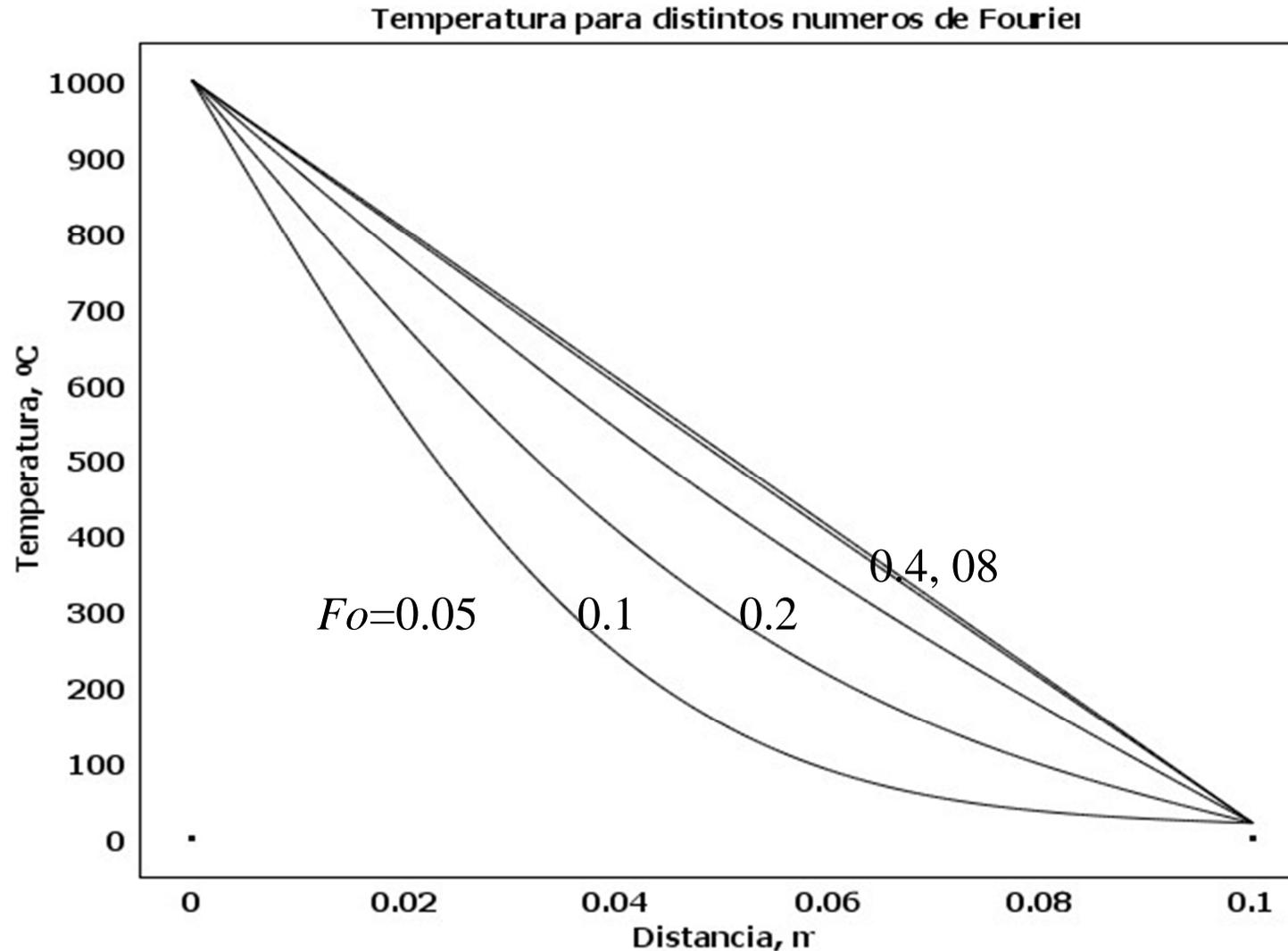
*Supongamos que las condiciones de borde son las siguientes:*

- La temperatura de la cara interna del horno se mantiene a 1000 °C desde el inicio del proceso y la temperatura de la cara externa se mantiene a 20 °C.*
- El perfil de temperatura calculado en función de Fo es el siguiente:*

$$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{L^2} = 1.54 \cdot 10^{-5} \cdot t(s) = 0.0554 t(h)$$

*Usando métodos numéricos para resolver se obtiene la resolución de la figura siguiente:*

## Ejemplo 32, Solución:



*Perfil de temperatura a través de la pared del horno  
en función del número de Fourier*

## Aplicabilidad Modelo Semi Infinito

*Del ejemplo anterior, vemos que el modelo semi infinito es aplicable para pequeños números de Fourier.*

*Si consideramos un error en las aproximaciones de un 5% o menos, entonces este método puede aplicarse para:*

$$\text{Modelo semi infinito} \quad Fo = \frac{\alpha \cdot t}{L^2} \leq 0.1$$

*El número de Fourier también puede usarse para estimar cuánto calor ha sido transferido basado en qué tan profundo en el sólido la temperatura ha sido afectada.*

*Para una posición  $x$ , cuando el número de Fourier local ha alcanzado 0.1, un cambio pequeño, pero medible (5%), de temperatura ha ocurrido. Por lo tanto, el tiempo transcurrido está dado por:*

$$t = \frac{0.1 \cdot x^2}{\alpha}$$

## **Aplicabilidad Modelo Semi Infinito**

*Por ejemplo, para un ladrillo de 0.15 m con una difusividad térmica de  $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , el tiempo requerido para que la temperatura comience a aumentar en el otro extremo puede estimarse según:*

$$t = \frac{0.1 \cdot 0.15^2 \text{ m}^2}{10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 2250 \text{ s} \approx 38 \text{ min}$$

*Alternativamente, para un período de tiempo dado, podemos determinar qué tan lejos el proceso de calentamiento ha llegado si establecemos un número de Fourier. Para ello, se define el  $Fo = 0,1$  y se resuelve para la distancia:*

**Distancia de penetración térmica**       $x = \sqrt{10 \cdot t \cdot \alpha}$

### Ejemplo 34:

En una fundición, una olla inicialmente a 25 °C se llena con cobre líquido a 1150 °C. La olla se transporta a un horno de refinación donde ésta se vacía. El proceso toma 15 min. Estimar, qué tan profundo en el ladrillo refractario de la olla el frente de temperatura se ha movido. Para el recubrimiento de greda,  $k = 1.0 \text{ W/mK}$ ,  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$  y  $C_p = 960 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$ .

### Ejemplo 34, Solución:

Después de 15 minutos (900 s) el frente de temperatura es:

$$x = \sqrt{10t \cdot \frac{k}{\rho C_p}} = \sqrt{10 \cdot 900 \cdot \frac{1.0}{2000 \cdot 960}} \text{ m} = 0,068 \text{ m} \approx 7 \text{ cm}$$

Esto muestra que con 7 -10 cm de ladrillo difícilmente se note el efecto de la temperatura en la cubierta exterior de la olla en 15 min.

## **Perfil de temperatura según modelo semi Infinito**

*Debemos resolver la ec. que representa el balance de calor en modo transiente. En 1D y coordenadas cartesianas, la 1<sup>era</sup> ley de Fourier implica:*

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2}$$

*Para resolverla, necesitamos 2 C.B. y una C.I. En este modelo asumimos que la temperatura en un extremo permanece constante e igual a la temperatura inicial.*

*Esto impone una de las condiciones de borde. En la superficie donde ocurre el cambio, se puede imponer la segunda condición de borde.*

*En las secciones siguientes analizaremos varias C.B.*

## **Modelo semi infinito**

### **Temperatura constante en la superficie**

*En tanto el sólido pueda ser tratado como sólido semi infinito con una temperatura inicial  $T_0$ , la temperatura dentro del sólido será:*

$$T(x, t) = T_s + (T_0 - T_s) \cdot \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right)$$

*donde  $T_s$  es la temperatura impuesta en la superficie y  $T(x,t)$  es la temperatura a una distancia  $x$  de la superficie. La ec. anterior puede reordenarse para calcular la temperatura adimensional:*

$$\theta = \frac{T(x, t) - T_s}{T_0 - T_s} = \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) = \operatorname{erf} \left( \frac{1}{2\sqrt{Fo(x)}} \right)$$

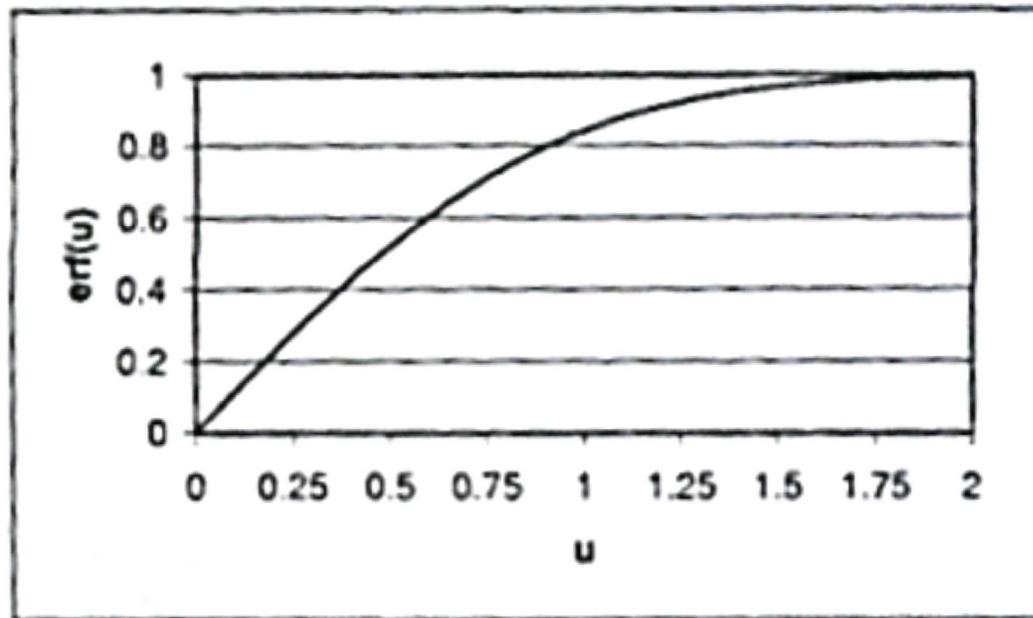
*erf se define como la “función de error”*

## Modelo semi infinito

### Temperatura constante en la superficie

$$\text{erf}(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^u e^{-u^2} du$$

*erf(u) varía de 0 a 1 mientras u varía entre 0 e  $\infty$ .*



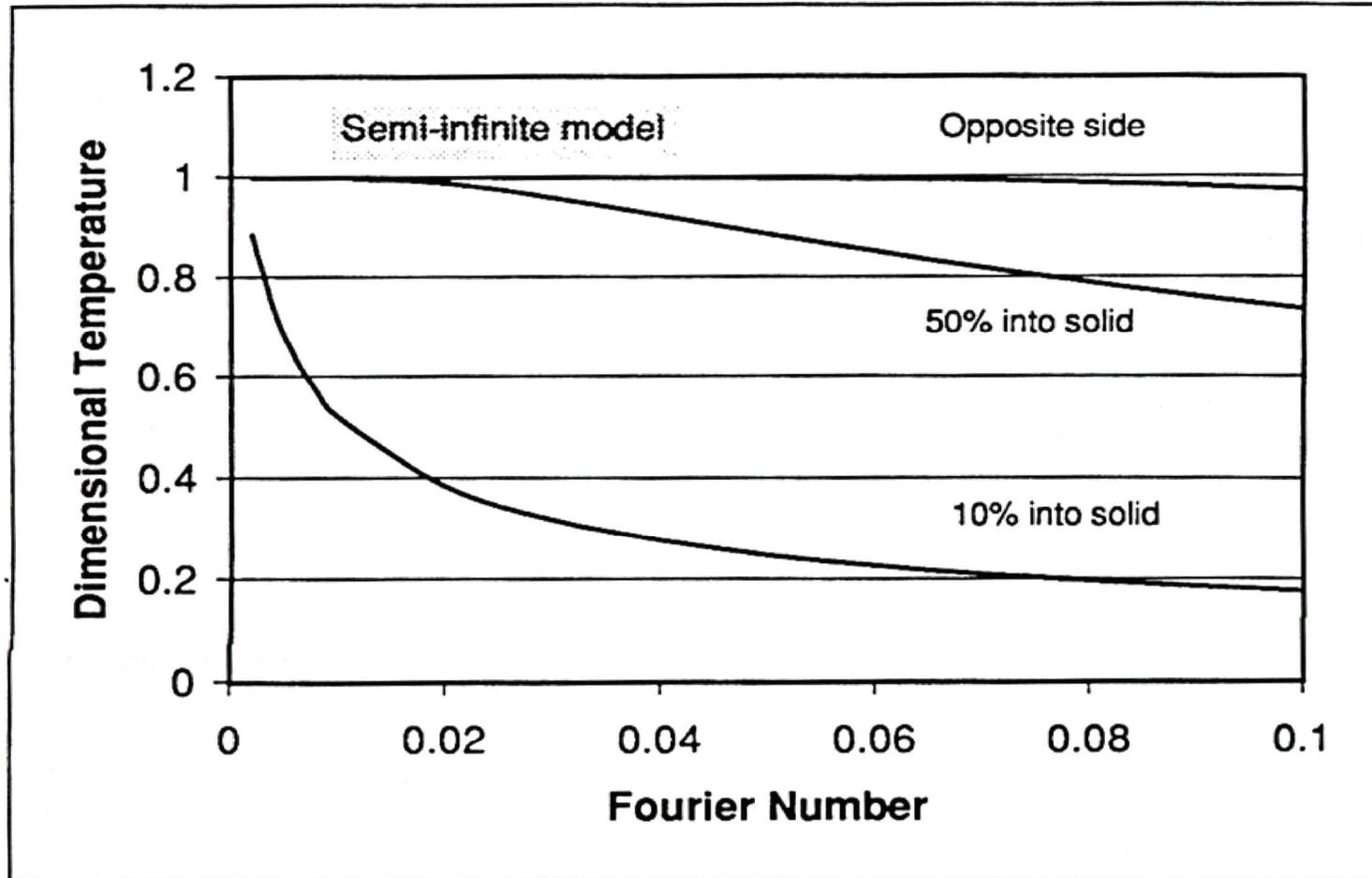
*El factor  $2/\pi^{1/2}$  normaliza la función error de tal manera que se aproxima a 1 cuando u se aproxima a infinito.*

*Los valores de la función error se presentan en el grafico.*

| u    | erf(u) | u    | erf(u) | u    | erf(u) | u    | erf(u) |
|------|--------|------|--------|------|--------|------|--------|
| 0    | 0      | 0.30 | 0.3286 | 0.75 | 0.7112 | 1.40 | 0.9523 |
| 0.02 | 0.0226 | 0.35 | 0.3794 | 0.80 | 0.7421 | 1.50 | 0.9661 |
| 0.04 | 0.0451 | 0.40 | 0.4284 | 0.85 | 0.7707 | 1.60 | 0.9763 |
| 0.06 | 0.0676 | 0.45 | 0.4755 | 0.90 | 0.7969 | 1.70 | 0.9838 |
| 0.08 | 0.0901 | 0.50 | 0.5205 | 0.95 | 0.8209 | 1.80 | 0.9891 |
| 0.10 | 0.1125 | 0.55 | 0.5633 | 1.00 | 0.8427 | 1.90 | 0.9928 |
| 0.15 | 0.1680 | 0.60 | 0.6039 | 1.10 | 0.8802 | 2.00 | 0.9953 |
| 0.20 | 0.2227 | 0.65 | 0.6420 | 1.20 | 0.9103 | 2.50 | 0.9996 |
| 0.25 | 0.2763 | 0.70 | 0.6778 | 1.30 | 0.9340 | 3.00 | 1.0000 |

## *Modelo semi infinito*

### *Temperatura constante en la superficie*



*Temperatura adimensional en un sólido semi infinito v/s el Fo sobre el cambio de temperatura de la superficie*

## **Modelo semi infinito**

### **Temperatura constante en la superficie**

$$\theta = \frac{T(x,t) - T_s}{T_0 - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{Fo(x)}}\right)$$

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^u e^{-u^2} du$$

*En el tiempo cero, el argumento de la función error es infinitamente grande, por lo que la función error se aproxima a la unidad. Entonces, la temperatura adimensional es también la unidad y la temperatura en cualquier parte es igual a la temperatura inicial.*

*Con el aumento del tiempo el argumento de la función error es más pequeño y lo es también la función error. Esto significa que la temperatura en cualquier posición comienza a desviarse de la temperatura inicial y eventualmente se aproxima a la temperatura de la superficie.*

## **Modelo semi infinito**

### **Temperatura constante en la superficie**

*Físicamente, esta condición ocurre cuando la superficie del material tiene una baja difusividad térmica y se expone súbitamente a un fluido con temperatura fija ó en contacto directo con un metal de alta conductividad térmica. Caso del Fe, Cu, Al ó Mg cuando se vierten en moldes de arena u ollas con refractario.*

*Para pequeños valores de  $u$  ( $u \leq 0.2$ ) erf se puede aproximar como:*

$$erf(u) = \frac{2u}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow erf\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha \cdot t}}\right) \approx \frac{x}{\sqrt{\pi\alpha \cdot t}}$$

*Cerca de la superficie, donde esta condición es válida ( $x$  muy pequeño), el flujo de calor se puede calcular:*

$$q(0, t) = -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -k \frac{d\left[ (T_0 - T_s) \frac{x}{\sqrt{\pi\alpha \cdot t}} \right]}{dx} = \frac{k(T_s - T_0)}{\sqrt{\pi\alpha \cdot t}}$$

## Modelo semi infinito

### Temperatura constante en la superficie

*El flujo de calor disminuye con la raíz cuadrada del tiempo.*

*En el seno del material el gradiente de temperatura esta dado por:*

$$\frac{dT}{dx} = \frac{(T_0 - T_s)}{\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$$

*Ejemplo 34:*

*La superficie de un molde delgado que está a 25 °C, súbitamente es calentado a 660 °C al ser llenado con  $Al_{liq}$  y mantenido a esta temperatura:*

*a) determinar el flujo de calor al molde en 1, 5 y 15 min. Las propiedades del material del molde son  $k = 0,48 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ,  $\rho = 1440 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_p = 840 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$  y  $\alpha = 3,97 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ .*

*b) estimar el espesor mínimo del molde después de 15 min y si aún puede ser tratado como sólido semi infinito.*

## **Modelo semi infinito**

### **Temperatura constante en la superficie**

*Ejemplo 34, Solución:*

a) El flujo de calor dentro del molde está dado por:

$$q(0, t) = \frac{k(T_s - T_0)}{\sqrt{\pi\alpha t}} = \frac{0,48 \cdot (660 - 25) \text{ W}}{\sqrt{3,14 \cdot 3,97 \cdot 10^{-7} t}} = \frac{273 \text{ kW} / \text{m}^2}{\sqrt{t(s)}}$$

Lo que da flujos de calor de 35,2 kW/m<sup>2</sup>, 15,8 kW/m<sup>2</sup> y 9,1 kW/m<sup>2</sup> después de 1, 5 y 15 minutos, respectivamente.

b) el sólido con una precisión de 5 % puede ser tratado como sólido semi infinito si el número de Fo es menor a 0,1.

$$L \geq \sqrt{10 \alpha t} = \sqrt{10 \cdot 3,97 \cdot 10^{-7} \cdot 900} \text{ m} = 0,060 \text{ m}$$

## Modelo semi infinito

### Interface entre dos sólidos semi infinitos

- Cuando dos sólidos “semi-infinitos” (A y B) a temperaturas distintas se ponen en contacto repentinamente, la temperatura de la interface permanece fija durante un tiempo. Asumiendo que no hay resistencia térmica entre los sólidos, la temperatura de la interface debe ser igual en ambos materiales:

$$T_{A,i} = T_{B,i} = T_S$$

- Dado que la interface no puede acumular calor, el flujo a través de la interface desde un sólido al otro debe ser igual:

$$\frac{k_A (T_S - T_{A,0})}{\sqrt{\pi \alpha_A \cdot t}} = - \frac{k_B (T_S - T_{B,0})}{\sqrt{\pi \alpha_B \cdot t}}$$

## Modelo semi infinito

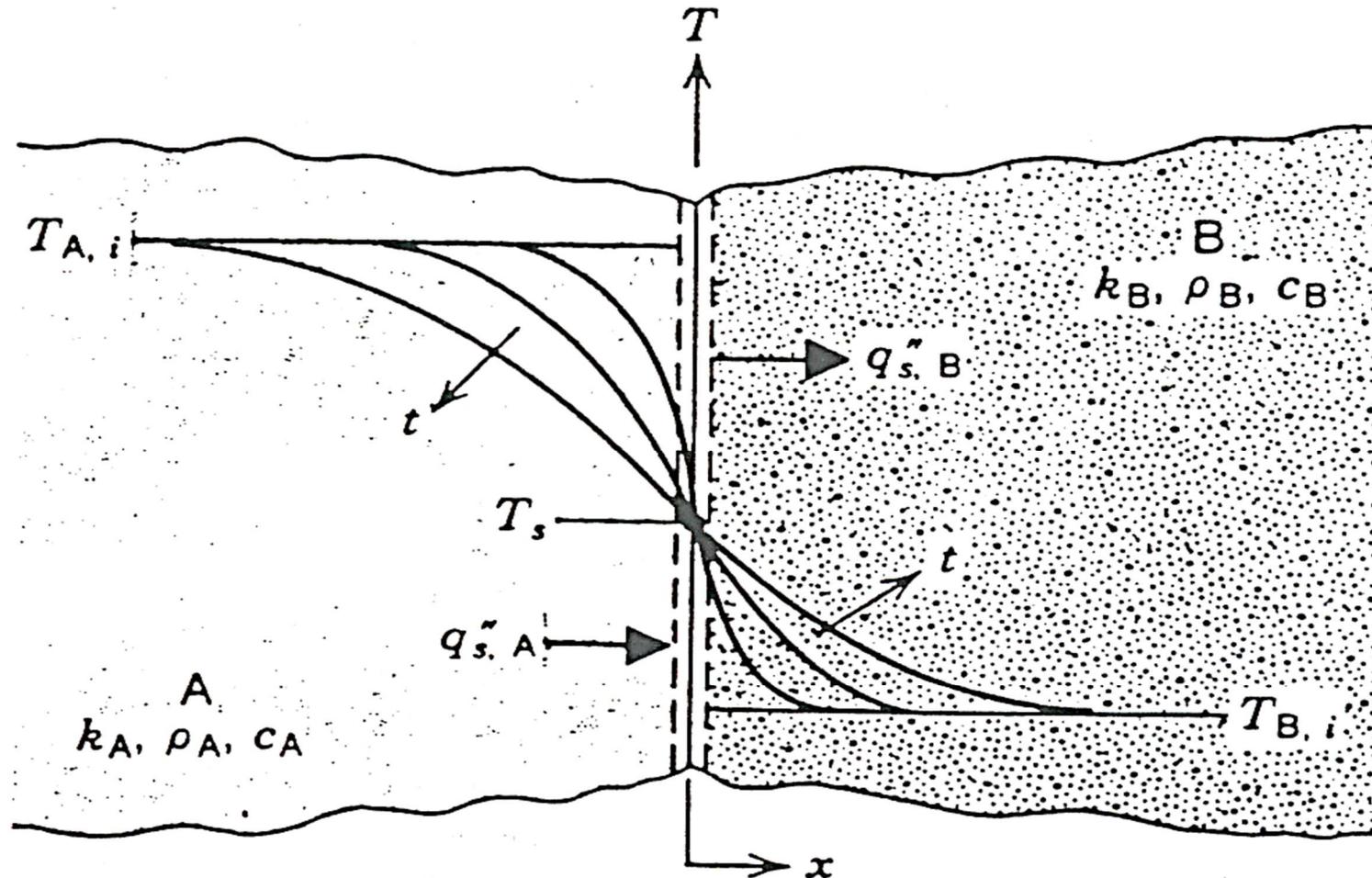
### Interface entre dos sólidos semi infinitos

- Donde  $T_{A,0}$  y  $T_{B,0}$  son las temperaturas iniciales y  $T_s$ , la temperatura en la interface entre A y B, Resolviendo para la interface:

$$T_s = \frac{(k\rho c_p)_A^{1/2} T_{A,0} + (k\rho c_p)_B^{1/2} T_{B,0}}{(k\rho c_p)_A^{1/2} + (k\rho c_p)_B^{1/2}}$$

- El término  $k\rho c_p$  se llama “difusividad calórica” y representa la capacidad de un material a resistir un cambio brusco en temperatura en su entorno. De la ecuación anterior, se ve que un material con mayor difusividad calórica tiende a imponer su temperatura en la interface.
- Mientras el modelo semi infinito sea aplicable, esta temperatura de interface puede utilizarse como temperatura constante en la superficie para resolver el perfil de temperatura dentro de cada sólido.

## Modelo semi infinito Interface entre dos sólidos semi infinitos



*Temperatura de dos sólidos en contacto*

## *Propiedades térmicas de algunos materiales comunes*

| Material                                | $\rho$<br>kg/m <sup>3</sup> | $C_p$<br>J/kg·°C | $k$<br>W/m·°C | $\alpha = k/\rho C_p$<br>m <sup>2</sup> /s | $(\rho C_p k)^{1/2}$<br>J/s <sup>1/2</sup> m·°C |
|---|-----------------------------|------------------|---------------|--|---|
| Cu                                      | 8954                        | 383              | 386           | $11.3 \cdot 10^{-5}$                       | 36,400  |
| Al                                      | 2702                        | 896              | 204           | $8.43 \cdot 10^{-5}$                       | 22,200  |
| Fe                                      | 7897                        | 452              | 73            | $2.05 \cdot 10^{-5}$                       | 16,100  |
| Fe-1 wt% C                              | 7801                        | 473              | 43            | $1.17 \cdot 10^{-5}$                       | 12,600  |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> Sapphire | 3970                        | 765              | 46            | $1.51 \cdot 10^{-5}$                       | 11,800  |
| 18%Cr-8%Ni steel                        | 7817                        | 460              | 16.3          | $0.45 \cdot 10^{-5}$                       | 7,660   |
| Graphite                                | 2210                        | 709              | 5.7           | $0.36 \cdot 10^{-5}$                       | 3,000   |
| Chrome Brick                            | 3000                        | 840              | 2.2           | $8.7 \cdot 10^{-7}$                        | 2,350   |
| Granite                                 | 2640                        | 820              | 2.5           | $0.12 \cdot 10^{-5}$                       | 2,330   |
| Water                                   | 1001                        | 4182             | 0.597         | $1.43 \cdot 10^{-7}$                       | 1,590   |
| Carbon                                  | 1950                        | 780              | 1.6           | $0.11 \cdot 10^{-5}$                       | 1,560   |
| Soil                                    | 2050                        | 1840             | 0.52          | $1.38 \cdot 10^{-7}$                       | 1,400   |
| Glass                                   | 2700                        | 840              | 0.78          | $3.44 \cdot 10^{-7}$                       | 1,330   |
| Common Brick                            | 1600                        | 840              | 0.69          | $5.13 \cdot 10^{-7}$                       | 963   |
| Sand                                    | 1515                        | 800              | 0.27          | $2.2 \cdot 10^{-7}$                        | 572   |
| Pine(white)                             | 640                         | 2800             | 0.147         | $0.82 \cdot 10^{-7}$                       | 513   |
| Oil(SAE 50)                             | 888                         | 1880             | 0.145         | $0.87 \cdot 10^{-7}$                       | 492   |
| Wood(Oak)                               | 540                         | 2400             | 0.166         | $1.28 \cdot 10^{-7}$                       | 464   |
| PVC                                     | 1340                        | 1000             | 0.15          | $1.12 \cdot 10^{-7}$                       | 448   |
| CORK                                    | 70                          | 1880             | 0.045         | $3.42 \cdot 10^{-7}$                       | 77  |
| Glass Wool                              | 24                          | 700              | 0.038         | $0.23 \cdot 10^{-5}$                       | 25  |
| Air                                     | 1.18                        | 1006             | 0.026         | $2.11 \cdot 10^{-5}$                       | 6   |