fcfm
Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FENÓMENOS DE TRASPORTE EN METALURGIA EXTRACTIVA

Clase 03/06

Transporte de Momentum

Prof. Leandro Voisin A, MSc., Dr.

Académico – Universidad de Chile.
Jefe del Laboratorio de Pirometalurgia.
Investigador Senior - Tohoku University, Japan.

Ejemplo

A partir de la componente-x de la ec. general de momentum, desarrollar la respectiva componente de la ec. de Navier Stokes (ρ y μ constantes).

Solución

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_x = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z v_x\right) - \ldots$$

$$\ldots - \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

Haciendo la expansión matemática de los términos convectivos:

Ecuación de Continuidad y Ecuación de Momentum

Solución

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)v_x = \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial}{\partial x}\rho v_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x)v_y = \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\rho v_x$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x)v_z = \rho v_x \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z$$

Introduciendo los términos en la ec. general de momentum y considerando r constante, tendremos:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\rho\left[v_x \underbrace{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)}_{=\,0 \text{ por continuidad}} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right] - \left[\ldots \right.$$

Ecuación de Continuidad y Ecuación de Momentum

Luego incorporando los términos viscosos (esfuerzos de corte):

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathrm{v})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z}\right)$$

y considerando que:

$$\tau_{xx} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x}\right)$$

Ecuación de Continuidad y Ecuación de Momentum

Luego incorporando los términos viscosos (esfuerzos de corte):

$$\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} = -\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} = -\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx} = -\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

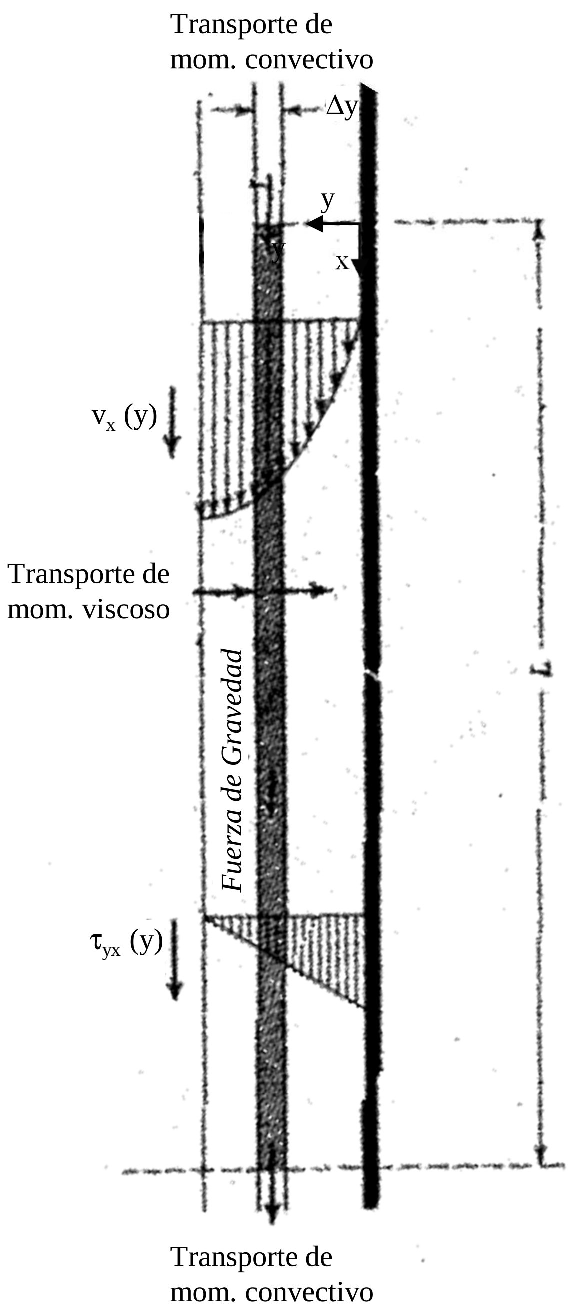
$$\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx} = -\mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] - \mu\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]}_{= 0 \text{ por continuidad}}$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_x$$

Flujo de un film descendente

Considere el flujo de una capa laminar sobre una superficie vertical.

Desprecie los efectos de entrada asociados con la introducción del fluido.



Aplicaciones de la ecuación general de Momentum

Solución:

De acuerdo al enunciado sólo debemos preocuparnos del componente-x de la ec. de movimiento. Al trabajar en coordenadas cartesianas, para flujo paralelo se tendrá que:

$$v_y = v_z = 0$$

Además para un fluido incomprensible la ecuación de continuidad se escribe como:

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Luego sólo debemos analizar el componente-x de la ec. de Navier Stokes

Aplicaciones de la ecuación general de Momentum

Solución:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathrm{v} = -(\nabla \cdot \rho \mathrm{v}\mathrm{v}) - \nabla P - (\nabla \cdot \tau) + \rho g$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathrm{v}_x = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho \mathrm{v}_x \mathrm{v}_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho \mathrm{v}_y \mathrm{v}_x + \frac{\partial}{\partial z}\rho \mathrm{v}_z \mathrm{v}_x\right) - \ldots$$

$$\ldots - \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

Aplicando la ec. de viscosidad de Newton, encontramos la ecuación que describe el comportamiento del perfil de velocidad

$$\rho \frac{D\mathrm{v}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathrm{v} + \rho \mathrm{g}$$

Aplicaciones de la ecuación general de Momentum

Solución:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathrm{v})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z}\right)$$

Reemplazando:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial t} + \mathrm{v}_x\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} + \mathrm{v}_z\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathrm{v}\right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x}\right)\right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho F_x$$

Aplicaciones de la ecuación general de Momentum

$$\rho\left[\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial t}+\mathrm{v}_x\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x}+\mathrm{v}_y\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}+\mathrm{v}_z\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathrm{v}\right]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho F_x$$

Simplificaciones:

El lado izquierdo de la ec. es 0 porque:

i) *Se supuso estado estacionario, de manera que la derivada temporal es nula.*

ii) $\partial \mathrm{v}_x/\partial x=0$ *debido a la continuidad.*

iii) $v_y, v_z = 0$

Aplicaciones de la ecuación general de Momentum

Notando que la viscosidad es constante y que la única fuerza de cuerpo es la debida a la gravedad, la ec. se simplifica a:

$$\rho g_x = -\mu \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2}, \qquad 0 \le y \le h$$

Incorporando las condiciones de borde:

$$\mathrm{v}_x = 0, \qquad y = 0$$

Condición de no deslizamiento ó adherencia, interfase líquido-sólida.

$$\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} = 0, \qquad y = h$$

Condición de interfase líquido-gas.

Resolviendo:

$$\mathrm{v}_x = \left(\rho g_x / 2\mu\right)\left[2hy - y^2\right]$$

Otras propiedades pueden ser calculadas:

i) Velocidad máxima, en y = h: $\mathrm{v}_{x,max} = (\rho g_x / 2\mu) h^2$

ii) Velocidad promedio, $\overline{\mathrm{v}_x} \; : \; \overline{\mathrm{v}_x} = \frac{1}{h}\int_0^h \mathrm{v}_x(y)dy \; = \frac{\rho g_x h^2}{3\mu}$

iii) Rapidez de flujo másico por unidad de ancho W´:

$$W' = \int_0^h \rho \mathrm{v}_x(y)dy = h\rho \mathrm{v}_{x,\max} = \frac{\rho^2 g_x h^3}{3\mu}$$

Aplicaciones de la ecuación general de Momentum

La validez de las ecs. (i), (ii) y (iii), se encuentra restringida al flujo laminar, es decir a condiciones de:

$$N_{Re,f} < 20$$

El número de Reynolds considerado es aquel de capa delgada o film en movimiento:

$$N_{Re,f} = \frac{4h v_{x,max} \rho}{\mu}$$

Se estableció que para el rango mayor o igual a 20 y menor o igual a 2000 se mantiene flujo laminar aunque con ondas en la superficie externa.

Aplicaciones de la ecuación general de Momentum

Estime el espesor máximo permisible de la capa límite de metales que caen verticalmente para que satisfaga el criterio de flujo laminar.

a) Acero fundido, $\mu = 6.5 \times 10^{-3}$ kg/ms, $\rho = 7{,}1 \times 10^{3}$ kg/m^3 .

b) Vidrio fundido, $\mu = 10$ kg/ms, $\rho = 3 \times 10^{3}$ kg/m^3 .

$$20 \approx \frac{4h \mathrm{v}_{x,\max} \rho}{\mu} \qquad \mathrm{N}_{\mathrm{Re,f}} < 20$$

Y sustituyendo $\overline{\mathrm{v}_{\mathrm{x}}}$

$$\overline{\mathrm{v}_{\mathrm{x}}} = \frac{1}{h}\int_0^h \mathrm{v}_x(y)dy$$

$$\Rightarrow \quad h = \left(15\mu^2/\rho^2 g\right)^{1/3}$$

Aplicaciones de la ecuación general de Momentum

$$h = \left(15\mu^2/\rho^2 g\right)^{1/3}$$

Luego para una capa de acero:

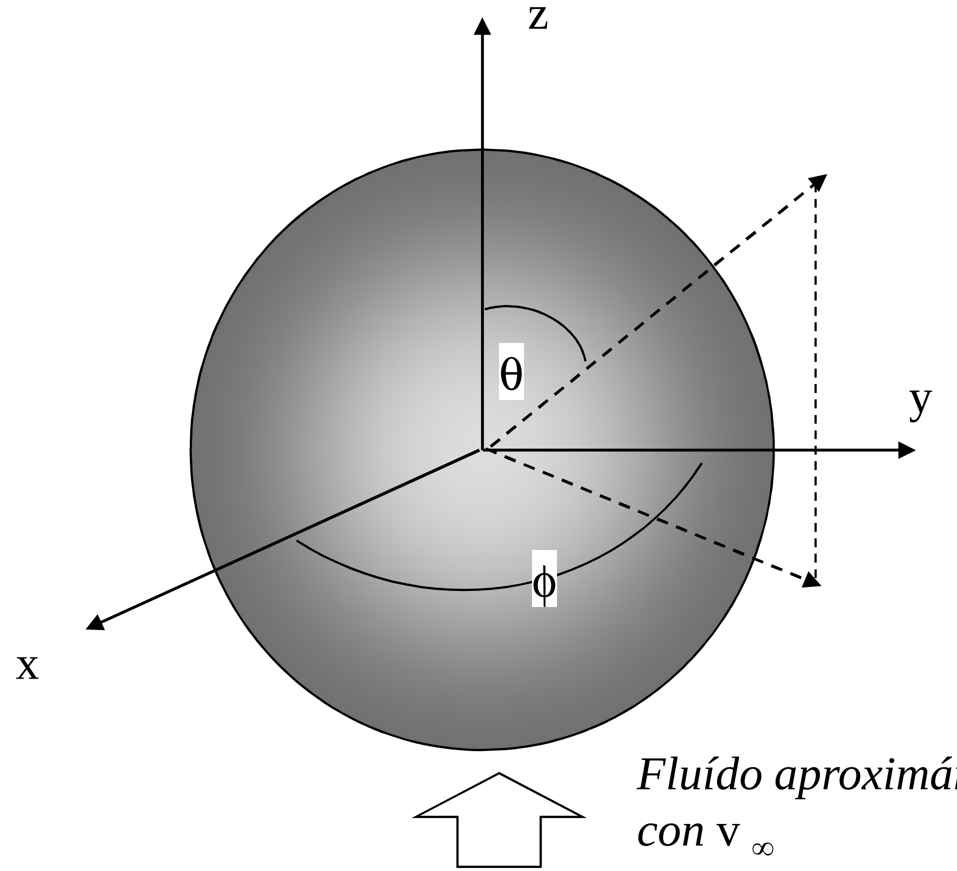
$$h = \left(\frac{15 \cdot 4.23 \cdot 10^{-5}}{5.04 \cdot 10^7 \cdot 9.81}\right)^{1/3} \approx 1.08 \cdot 10^{-4}\, m = 0.108mm$$

y para una capa de vidrio:

$$h = \left(\frac{15 \cdot 100}{9 \cdot 10^6 \cdot 9.81}\right)^{1/3} \approx 2.56 \cdot 10^{-2}\, m = 25.6mm$$

Flujo reptante alrededor de una esfera sólida

Considere el flujo de un fluido incompresible alrededor de una esfera sólida, el fluido se aproxima a la esfera desde la parte inferior siguiendo el eje-z con velocidad uniforme v_∞.



Fluído aproximándose con v_∞

Solución:

De acuerdo al enunciado la componente-ϕ en la ec. de momentum será 0. Adicionalmente si el flujo es lento, los términos de aceleración de la ec. de Navier Stokes pueden ser ignorados. :

$$r\text{-component}\quad \rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\right)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2}v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}v_\theta\cot\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) + \rho g_r \qquad \text{(D)}$$

$$\theta\text{-component}\quad \rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) + \rho g_\theta \qquad \text{(E)}$$

Aplicaciones de la ecuación general de Momentum

Ejemplo

Un fluido fluye ascendentemente a través de una cañería cilíndrica doble concéntrica de largo L. Asuma que el fluido presenta un perfil de flujo completamente desarrollado. Los radios internos y externos son κR y R respectivamente.

a) Escriba la ec. de momentum en términos de la velocidad.

b) Resuelva el perfil de velocidad.

c) Determine la velocidad máxima.

Solución a)

Para un flujo completamente desarrollado, $v_z = f(r)$

z-component
$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z \qquad \text{(F)}$$

Aplicaciones de la ecuación general de Momentum

Solución a)

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial r}\right)\right] + \rho g_z, \qquad g_z = g$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial r}\right) = \frac{r}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g\right)$$

Solución b)

$$r\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial r} = \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g\right)\frac{r^2}{2\mu} + C_1$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}_z = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g\right)r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

$C.B.\ 1$: $\mathrm{v}_z = 0$ en $r = \kappa R$

$C.B.\ 2$: $\mathrm{v}_z = 0$ en $r = R$

Aplicaciones de la ecuación general de Momentum

Solución b)

$$\therefore \quad C_1 = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g\right)\frac{\left(1-\kappa^2\right)R^2}{\ln \kappa}$$

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g\right)R^2\left[1 + \left(1-\kappa^2\right)\frac{\ln R}{\ln \kappa}\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}_z = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g\right)\left[r^2 - R^2\left[1 - \left(1-\kappa^2\right)\frac{\ln \frac{r}{R}}{\ln \kappa}\right]\right]$$

Solución c)

$$\Rightarrow \mathrm{v}_z = \mathrm{v}_z^{\max}, cuando \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial r} = 0$$

Solución c)

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 = \frac{r}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g\right) + \frac{1}{4r\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g\right)\frac{\left(1-\kappa^2\right)R}{\ln \kappa}$$

$$\frac{r}{2\mu} = \left(\frac{1}{4r\mu}\right)\frac{\left(\kappa^2 - 1\right)R^2}{\ln \kappa}$$

$$r^2 = \left(\frac{\kappa^2 - 1}{2\ln \kappa}\right)\cdot R^2$$

$$\therefore v_z = v_z^{max}$$

$$cuando \qquad r = \sqrt{\frac{\left(\kappa^2 - 1\right)}{2\ln \kappa}}\cdot R$$