

# **Gestión de Activos Físicos**

## **ME5701**

**Viviana Meruane**



# Índice general

<b>Contenidos</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>2</b>
1.1 Conceptos Básicos . . . . .	3
1.1.1 Falla . . . . .	3
1.1.2 Mantenimiento, mantenibilidad . . . . .	4
1.1.3 Confiabilidad . . . . .	4
1.1.4 Probabilidad acumulada de fallas . . . . .	4
1.1.5 Tasa de falla . . . . .	5
1.1.6 Tiempo medio para fallar (MTTF) . . . . .	6
1.1.7 Tiempo medio de paradas (MDT) y tiempo medio para reparar (MTTR) . . . . .	7
1.1.8 Relaciones útiles . . . . .	7
1.1.9 Disponibilidad . . . . .	10
1.2 Estructura de costos . . . . .	11
1.2.1 Costo de intervención . . . . .	11
1.2.2 Costo de fallas . . . . .	12
1.2.3 Costo de almacenamiento . . . . .	12
1.2.4 Costo de sobre-inversiones . . . . .	13
1.2.5 Costos de una intervención por mantenimiento . . . . .	13

<b>2</b>	<b>Confiabilidad y Métodos de Modelación</b>	<b>15</b>
2.1	Diagramas de Bloque . . . . .	15
2.2	Sistemas no reparables . . . . .	17
2.2.1	Confiabilidad de sistemas en serie . . . . .	17
2.2.2	Confiabilidad de sistemas redundantes . . . . .	17
2.3	Sistemas reparables . . . . .	21
2.3.1	Sistemas en serie . . . . .	22
2.3.2	Sistemas Redundantes . . . . .	22
2.4	Configuración óptima . . . . .	26
2.5	Árboles de falla . . . . .	26
2.5.1	Cálculos . . . . .	28
2.6	Diagrama Causa y Efecto . . . . .	30
2.6.1	Cálculos . . . . .	32
2.7	Análisis de Pareto . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Modelos de Confiabilidad</b>	<b>35</b>
3.1	Distribuciones estadísticas . . . . .	35
3.1.1	Distribución Binomial . . . . .	35
3.1.2	Distribución de Poisson . . . . .	36
3.1.3	Distribución Exponencial . . . . .	36
3.1.4	Distribución de Weibull . . . . .	37
3.2	Estimación de parámetros Weibull . . . . .	38
3.2.1	$\gamma = 0$ . . . . .	38
3.2.2	$\gamma \neq 0$ . . . . .	41
3.2.3	Verificación de modelos mediante el test de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Mantenimiento preventivo</b>	<b>46</b>

- 4.1 Intervalo óptimo entre reemplazos preventivos de componentes reparables sujetos a fallas . . . . . 46
- 4.2 Intervalo óptimo entre mantenimientos preventivos de componentes sujetos a fallas . . . . . 48
- 4.3 Selección de la estrategia de mantenimiento . . . . . 52
  - 4.3.1 Mantenimiento correctivo vs preventivo . . . . . 52
  - 4.3.2 Mantenimiento predictivo vs correctivo . . . . . 54
- 4.4 Mantenimiento preventivo imperfecto y reemplazo . . . . . 56
  
- 5 Inspecciones 63**
  - 5.1 Frecuencia de inspecciones óptima: Minimización de los costos . . . 63
  - 5.2 Frecuencia de inspecciones óptima con tasa de fallas variable en el tiempo: Minimización de los costos . . . . . 67
  - 5.3 Frecuencia de inspecciones óptima: Disponibilidad máxima . . . . 68
  - 5.4 Frecuencia óptima de inspecciones para maximizar la disponibilidad de equipos de emergencia . . . . . 70
  
- 6 Gestión de repuestos 73**
  - 6.1 Minimización de los costos desde el punto de vista de la bodega . . 73
  - 6.2 Minimización del costo global con costo de falla . . . . . 76
    - 6.2.1 Repuestos no consumidos al llegar . . . . . 80
  
- 7 Taller de mantenimiento 83**
  - 7.1 Teoría de Colas . . . . . 83
    - 7.1.1 Resultados de la teoría de colas . . . . . 84
  - 7.2 Numero óptimo de estaciones de trabajo para satisfacer la demanda 87
    - 7.2.1 Definición del problema . . . . . 87
    - 7.2.2 Construcción del modelo . . . . . 87
    - 7.2.3 Ejemplo numérico . . . . . 88
  - 7.3 Esfuerzo óptimo del grupo de mantenimiento . . . . . 90

7.3.1	Definición del problema . . . . .	90
7.3.2	Construcción del modelo . . . . .	90
7.3.3	Ejemplo numérico . . . . .	92
7.4	Numero óptimo de maquinas por grupo de mantenimiento . . . . .	92
7.4.1	Definición del problema . . . . .	92
7.4.2	Construcción del modelo . . . . .	93
7.4.3	Ejemplo numérico . . . . .	95
<b>8</b>	<b>Reemplazo de equipos</b>	<b>96</b>
8.1	Reemplazo óptimo de equipos: minimización del costo total . . . . .	96
8.1.1	Construcción del modelo . . . . .	96
8.1.2	Ejemplo numérico . . . . .	97
8.2	Reemplazo de equipo considerando mejora tecnológica: Horizonte de tiempo fijo . . . . .	98
8.2.1	Construcción del modelo . . . . .	99
8.2.2	Ejemplo numérico . . . . .	100
8.3	Reemplazo de equipo considerando mejora tecnológica: Horizonte de tiempo infinito . . . . .	101
8.3.1	Construcción del modelo . . . . .	101
8.3.2	Ejemplo numérico . . . . .	102
<b>9</b>	<b>Planificación y secuenciación de tareas</b>	<b>104</b>
9.1	Decisiones de secuencia . . . . .	104
9.2	Regla para la secuenciación óptima de trabajos que deben pasar por 2 estaciones . . . . .	105
9.2.1	Definición del problema . . . . .	105
9.2.2	Construcción del modelo . . . . .	105
9.2.3	Ejemplo numérico . . . . .	107
9.3	Secuencia óptima de trabajos que deben pasar por tres estaciones de mantenimiento . . . . .	108

9.3.1	Construcción del modelo . . . . .	108
9.3.2	Ejemplo numérico . . . . .	108
9.4	Planificación de tareas, método PERT-CPM . . . . .	110
9.4.1	Terminología utilizada . . . . .	110
9.4.2	Construcción de la Red . . . . .	111
9.4.3	Ejemplo 1 . . . . .	113
9.4.4	Ejemplo 2 . . . . .	114
9.4.5	Reducción de los tiempos . . . . .	114
9.4.6	Planificación de cargas . . . . .	116
	<b>Bibliografía</b>	<b>118</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Se entiende por gestión del mantenimiento al conjunto de técnicas que tienen por objeto conseguir una utilización óptima de los activos productivos, manteniéndolos en el estado que requiere una producción eficiente con unos gastos mínimos. Una política de mantenimiento busca mantener los equipos operando y reducir el número de fallas. En general, se adopta una de las siguientes políticas:

1. Reparación del equipo una vez producida la falla
2. Mantener equipos redundantes
3. Mantenimiento del equipo antes de que falle

La primera política se denomina *Mantenimiento correctivo* y se utiliza en casos donde el componente puede ser reparado y su falla no afecta al sistema global.

La segunda política se adopta en casos donde la confiabilidad del sistema se puede mejorar al tener equipos y repuestos redundantes. Sistemas en “standby” y paralelos son bien conocidos y utilizados en la práctica.

El mantenimiento de unidades posterior a la falla puede ser costoso y a veces reparar la unidad requiere de mucho tiempo. El mayor problema es determinar cuando y como realizar *mantenimiento preventivo* antes de que se produzca una falla. No es conveniente realizar mantenimiento de los equipos con demasiada frecuencia. Por otro lado, una frecuencia muy baja no asegura una confiabilidad adecuada del sistema. El objetivo de la gestión del mantenimiento es optimizar la frecuencia y tiempos de mantenimiento preventivo y correctivo de acuerdo a los costos y efectos.

Otro método de mantenimiento antes de la falla es el *mantenimiento predictivo*. En este caso, el mantenimiento se realiza basado en la condición del equipo. Algunas técnicas utilizadas para determinar el deterioro son:

- vibración y ruido
- temperatura
- análisis de aceite

## 1.1. Conceptos Básicos

Esta sección introduce los conceptos más importantes utilizados en gestión del mantenimiento.

### 1.1.1. Falla

Una falla ocurre cuando un componente deja de funcionar como es requerido. Una falla puede ser clasificada de acuerdo con el modo, causa, efecto y mecanismo:

1. Modo: El modo de falla es el síntoma (efecto local) por el cual se observa la falla; por ejemplo, un crack debido a fatiga de material.
2. Causa: La causa de una falla puede ser intrínseca, debido a deterioro de un componente, o extrínseca, debido a mal uso o mal manejo durante el diseño, producción o uso.
3. Efecto: El efecto (consecuencia) de una falla cambia si se considera el componente en sí ó a un nivel superior. Una clasificación usual es: *irrelevante, parcial, completa y falla crítica*.
4. Mecanismo: El mecanismo es el proceso mecánico, eléctrico, químico u otro que resulta en una falla.

Las fallas también se pueden clasificar como repentinas o graduales. Se denomina una falla catastrófica a una falla completa y repentina. Fallas graduales y parciales se denominan fallas por deterioro o desgaste.

### 1.1.2. Mantenimiento, mantenibilidad

El mantenimiento se define como un conjunto de acciones realizadas a un componente para mantenerlo o restaurarlo a un estado específico. En general se asume que un componente queda como “nuevo” después de cada mantenimiento.

La mantenibilidad se define como la probabilidad de que se restaure la funcionalidad de un componente con falla en un periodo de tiempo cuando las reparaciones son realizadas de acuerdo a un procedimiento prescrito. Es decir, la mantenibilidad es “La probabilidad de reparar un componente en un tiempo determinado”.

### 1.1.3. Confiabilidad

Se entiende por confiabilidad de un componente a la probabilidad de que éste cumpla con los requerimientos de funcionalidad bajo ciertas condiciones para un intervalo de tiempo. Se designa generalmente por la letra  $R$ . Desde un punto de vista cualitativo, la confiabilidad se define como la capacidad de que un componente permanezca funcional. Es decir, la probabilidad que no existan interrupciones operacionales durante un periodo de tiempo.

Un componente es una unidad funcional o estructural de complejidad arbitraria (parte, ensamble, equipo, sistema o sub-sistema)

Consideremos un grupo de  $N$  componentes idénticos y como nuevos en  $t=0$ . Definimos  $n(t)$  el número de componentes que no han fallado en el intervalo  $[0, t]$ . La confiabilidad  $R(t)$  puede ser estimada como:

$$R(t) = \frac{n(t)}{N}$$

### 1.1.4. Probabilidad acumulada de fallas

La probabilidad acumulada de falla  $F(t)$  se define como la probabilidad que un componente falle en el intervalo  $[0, t]$ . Por lo tanto,

$$F(t) = 1 - R(t)$$

y puede ser estimada como:

$$F(t) = \frac{N - n(t)}{N}$$

La **función de densidad de probabilidad de fallas  $f(t)$**  se define como la probabilidad instantánea que un componente falle en  $t$ :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

**1.1.5. Tasa de falla**

La tasa de falla ( $\lambda(t)$ ) se define como el numero de fallas por unidad de tiempo. Consideremos un grupo de  $N$  componentes, en un tiempo  $t$  se han producido un total  $k$  fallas. El tiempo acumulado,  $T$ , viene dado por  $N \cdot t$  y la tasa de falla estimada viene dada por:

$$\hat{\lambda} = \frac{k}{T} = \frac{k}{N \cdot t}$$

El símbolo  $\hat{\lambda}$  indica que  $k/T$  es solo una estimación de  $\lambda$ . El valor real se puede determinar solo cuando los  $N$  componentes hayan fallado.

La tasa de falla de un sistema puede variar en el tiempo. La curva de la “bañera” que se muestra en la figura 1.1 describe la variación de la tasa de falla en componentes durante la vida útil. La fallas producidas en la primera parte de la curva, en donde la tasa de falla es decreciente, se denominan fallas prematuras o infantiles. La parte central de la curva, se denomina usualmente como fallos normales y se asume una tasa constante de fallas. La sección final de la curva describe la fallas de desgaste y se asume que la tasa de fallas aumenta a medida de los mecanismos de desgaste se aceleran. Estas tres distribuciones se describen en la siguiente tabla,

	Conocido como	
Tasa de falla decreciente	Fallos infantiles	Usualmente relacionados a los procesos de manufactura y control de calidad, por ejemplo, soldaduras, uniones, suciedad, impurezas, grietas, ajustes y posicionamiento incorrectos, entre otros.
Tasa de falla constante	Fallos normales	
Tasa de falla en aumento	Fallos de desgaste	

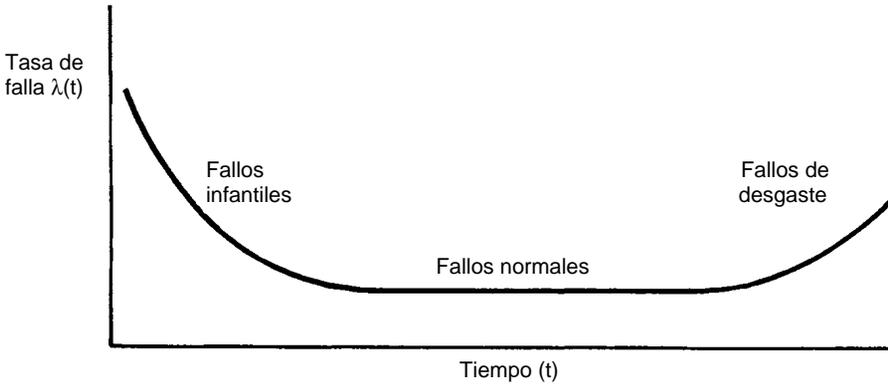


Figura 1.1: Curva de la “bañera”

### 1.1.6. Tiempo medio para fallar (MTTF)

Se define para un periodo determinado de tiempo en la vida de un componente como la razón entre el tiempo total acumulado y el numero de fallas. Se calcula como la razón entre el tiempo total acumulado y el número de fallas,

$$MTTF = \frac{T}{k}$$

De lo que se deduce la relación:  $MTTF = 1/\lambda$ .

Si se tiene la función densidad de probabilidad de fallas,  $f(t)$ , el tiempo medio para fallar viene dado por la esperanza del tiempo:

$$MTTF = \int_0^{\infty} t f(t)$$

Esto es la probabilidad de que un componente que no ha fallado en  $(0, t)$  falle en el intervalo  $(t, t + dt)$ .

Se define el tiempo medio entre fallas (MTBF) como,

$$MTBF = MTTF + MTTR$$

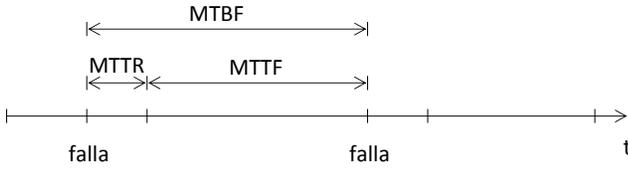


Figura 1.2:

Donde  $MTTR$  es el tiempo medio para reparar. En general  $MTTR \ll MTTF$  y  $MTBF \approx MTTF$ . En muchos libros se utiliza  $MTBF$  en vez de  $MTTF$ .

### 1.1.7. Tiempo medio de paradas (MDT) y tiempo medio para reparar (MTTR)

El tiempo de paradas es el tiempo que el componente se encuentra detenido por una falla. El tiempo medio de paradas (MDT) incluye el tiempo medio para reparar (MTTR) que es función del diseño, herramientas disponibles, destreza y capacitación del personal, y del tiempo medio de espera (MWT) que es función de la administración y el tiempo que se demore en detectar la falla.

Otro parámetro útil es la tasa de reparación ( $\mu$ ). Que es simplemente el tiempo medio para reparar expresado como una tasa:

$$\mu = \frac{1}{MTTR}$$

### 1.1.8. Relaciones útiles

Consideremos  $n(t)$  el numero de componentes que no han fallado en el intervalo  $[0, t]$ . El numero esperado de fallas en el intervalo  $t + dt$  es:  $n(t) - n(t + dt)$ .

La tasa instantánea de fallas se calcula como el numero de fallas por unidad de tiempo por componente,

$$\lambda(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{n(t) - n(t + dt)}{n(t)dt} \right)$$

Reemplazando  $R(t) = n(t)/N$ ,

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{R(t) - R(t + dt)}{R(t)dt} \right) \\ &= \frac{-dR(t)}{R(t)dt}\end{aligned}$$

Y tenemos que  $-dR(t)/dt = dF(t)/dt = f(t)$ , por lo tanto

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Si utilizamos la relación  $\lambda(t) = \frac{-dR(t)}{R(t)dt}$ . Podemos obtener también que,

$$\frac{dR(t)}{dt} = -R(t)\lambda(t)$$

Integrando,

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

Si la tasa de falla es constante, es decir,  $\lambda(t) = \lambda$ , la confiabilidad del componente viene dada por,

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Para calcular el tiempo medio para fallar, consideremos el caso de N componentes idénticos. Donde  $n(t)$  el numero de componentes que no han fallado en el intervalo  $[0, t]$ .

En cada intervalo de tiempo  $dt$  el tiempo acumulado es  $n(t)dt$ . El tiempo acumulado total es,

$$\int_0^{\infty} n(t)dt$$

Por lo tanto el tiempo medio para fallar viene dado por,

$$MTTF = \int_0^{\infty} \frac{n(t)dt}{N}$$

Reemplazando  $R(t) = n(t)/N$ ,

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt$$

Esta es la expresión general para el MTTF. En el caso particular de una tasa de falla constante, donde  $R(t) = e^{-\lambda t}$ , el MTTF es,

$$\begin{aligned} MTTF &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Se debe notar que invertir la tasa de falla para calcular el MTTF, y viceversa, es válido solo para el caso de tasa de falla constante.

La tabla 1.1 muestra las relaciones entre las cuatro funciones básicas de confiabilidad  $f(t)$ ,  $F(t)$ ,  $R(t)$ , y  $\lambda(t)$ .

	$f(t)$	$\lambda(t)$	$F(t)$	$R(t)$
$f(t) =$	$f(t)$	$\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$	$\frac{dF(t)}{dt}$	$-\frac{dR(t)}{dt}$
$\lambda(t) =$	$\frac{f(t)}{1 - \int_0^t f(t)dt}$	$\lambda(t)$	$\frac{1}{1 - F(t)} \frac{dF(t)}{dt}$	$-\frac{d}{dt} [\ln R(t)]$
$F(t) =$	$\int_0^t f(t)dt$	$1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)}$	$F(t)$	$1 - R(t)$
$R(t) =$	$1 - \int_0^t f(t)dt$	$e^{-\int_0^t \lambda(t)}$	$1 - F(t)$	$R(t)$

Tabla 1.1: Relación entre las distintas funciones de confiabilidad

### 1.1.9. Disponibilidad

La disponibilidad ( $A$ ) es un parámetro que describe el tiempo total que un componente está disponible. Esta dado por la confiabilidad y la mantenibilidad del componente. La Figura 1.3 muestra un esquema del tiempo en que un equipo está disponible (sin falla) y no disponible (en reparación). La disponibilidad es la razón entre el tiempo disponible y el total, esto es:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\text{Tiempo disponible}}{\text{Tiempo total}} && (1.1) \\
 &= \frac{\text{Tiempo disponible}}{\text{Tiempo no disponible} + \text{Tiempo disponible}} \\
 &= \frac{MTTF}{MDT + MTTF}
 \end{aligned}$$

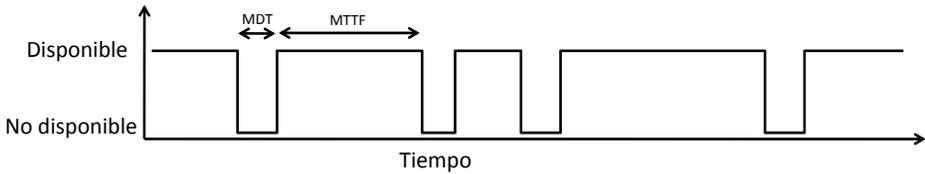


Figura 1.3: Tiempo disponible y no disponible de un componente

Para el caso de tasa de falla constante ( $MTTF = 1/\lambda$ ) la disponibilidad viene dada por,

$$A = \frac{1}{1 + \lambda MDT}$$

En algunos casos es más conveniente utilizar la no disponibilidad que es lo mismo que la probabilidad de fallo en demanda (PFD):

$$\bar{A} = 1 - A = \frac{\lambda MDT}{1 + \lambda MDT} \cong \lambda MDT$$

## 1.2. Estructura de costos

El costo global de mantenimiento  $C_g$  se define como la suma de cuatro componentes,

1. Costo de intervenciones ( $C_i$ )
2. Costo de fallas ( $C_f$ )
3. Costo de almacenamiento ( $C_a$ )
4. Costo de sobre-inversiones ( $C_{si}$ )

$$C_g = C_i + C_f + C_a + C_{si}$$

Como administradores una de las principales tareas es definir una política de mantenimiento que minimice el costo global. Por ejemplo, una política de mantenimiento frecuente disminuye los costos asociados a fallas, pero aumenta los costos de intervención y almacenamiento. Entonces se hace necesario estudiar si el costo de falla baja más de lo que crecieron estos componentes.

### 1.2.1. Costo de intervención

El costo de intervención ( $C_i$ ) incluye los gastos relacionados con el mantenimiento preventivo y correctivo. Los costos de intervención están compuestos por:

- Mano de obra interna o externa
- Repuestos de bodega, o comprados para una intervención
- Material fungible requerido para la intervención

El costo de mano de obra interna se calcula con el tiempo gastado en la intervención multiplicado por el costo de HH. La mano de obra externa se obtiene de la factura, o por las HH que fueron requeridas.

Los repuestos de bodega deben ser valorados al precio actual en el mercado y no al valor que ingresaron en bodega. Los repuestos comprados para la intervención se valoran de acuerdo a la factura.

El material fungible se costea de acuerdo a la cantidad usada. La amortización de equipos y herramientas de uso general se consideran de forma proporcional al tiempo de intervención.

El costo de intervención por unidad de tiempo es:

$$c_i = \frac{\text{costos de intervención}}{\text{total horas de intervención}}$$

### 1.2.2. Costo de fallas

El costo de fallas  $C_i$  corresponde a las pérdidas de utilidad asociadas a la falla de un componente, que hayan reducido la tasa de producción, mermado la calidad del producto, perdidas de materias primas, perdidas de negocios, entre otros.

El costo de fallas se calcula como,

$$C_f = \text{ingresos no percibidos} + \text{gastos extras de producción} + \text{perdida de materias primas} - \text{materias primas no utilizadas}$$

Se pueden definir tres escenarios posibles:

1. El volumen de producción puede ser recuperado.  
En este caso el costo de falla corresponde a los gastos extras necesarios para recuperar la producción perdida.
2. El volumen de producción no puede ser alcanzado.  
En este caso el costo de falla corresponde a la perdida de ingresos, menos el costos de materias primas y productos que no fueron utilizados.
3. La producción no se detiene, pero la calidad del producto disminuye.  
Si la calidad del producto disminuye su precio también disminuye, en este caso el costo falla considera la pérdida de ingresos.

### 1.2.3. Costo de almacenamiento

El costo de almacenamiento representa los costos incurridos en financiar y manejar el inventario de repuestos e insumos necesarios para el mantenimiento. Estos incluyen,

- El interés financiero del capital inmovilizado por el inventario.
- La mano de obra dedicada a la gestión y manejo del inventario.

- Los costos de explotación de edificios: energía, seguridad y mantenimiento.
- Amortización de sistemas adjuntos: montacargas, sistema informático.
- Costo en seguros.
- La depreciación comercial de repuestos.

#### 1.2.4. Costo de sobre-inversiones

En el diseño inicial de una planta, se toma la decisión de adquirir equipos que minimicen el costo global de mantenimiento durante su ciclo de vida. Esto implica muchas veces que se compren equipos cuyas inversiones iniciales son mayores que otros, pero cuyos costos de intervención y almacenamiento asociados se estiman menores.

Para incluir la sobre-inversión, se amortiza la diferencia sobre la vida del equipo. Así es posible castigar en el costo global las inversiones extras requeridas para disminuir los demás componentes del costo.

#### 1.2.5. Costos de una intervención por mantenimiento

##### Costo de una intervención preventiva $C_p$

Dado que una intervención preventiva puede ser programada de modo que no afecte la producción, el costo de una intervención preventiva  $C_p$  se compone sólo del costo de intervención:

$$C_p = C_i$$

En algunos casos los equipos deben operar de manera continua 24 horas, 7 días a la semana. En esta situación el costo de una intervención preventiva también incluye costo de falla:

$$C_p = C_i + C_f$$

##### Costo de una intervención correctiva $C_c$

El costo intervención correctiva debido a una falla imprevista, tiene dos componentes; el costo de la intervención más el costo de falla,

$$C_c = C_i + C_f$$

**Costo de una intervención predictiva  $C_s$** 

Si el mantenimiento sintomático es perfecto, se pueden evitar completamente las fallas del componente. Por lo que costo de un mantenimiento sintomático se compone de un costo de intervención, al cual se debe agregar el costo del inspección o monitoreo. El costo de monitoreo predictivo puede ser resultado de una sola inversión, o costos repetidos. La inversión corresponde a la adquisición de equipos, al costo de capacitar al personal para el análisis. Los gastos repetidos corresponden al pago de servicios de medición y análisis. Estos costos pueden ser expresados como un costo de monitoreo sintomático  $C_m$  por cada ciclo de intervención preventiva.

Por lo que costo de una intervención predictiva es:

$$C_s = C_i + C_m$$

# Capítulo 2

## Confiabilidad y Métodos de Modelación

### 2.1. Diagramas de Bloque

En un diagrama de bloques se describe el sistema como un número de bloques funcionales que se encuentran conectados de acuerdo al efecto de cada falla de un bloque en la confiabilidad del sistema.

La figura 2.1 muestra un diagrama en serie, que representa un sistema en donde la falla de cualquier bloque impide el funcionamiento del sistema. La figura 2.2 ilustra la situación donde ambos bloques deben fallar para que el sistema falle. Este caso es conocido como paralelo o redundante. Una combinación en bloques en serie y paralelo se muestra en la figura 2.3. La figura representa un sistema que falla si el bloque A falla o si ambos el bloque B y C fallan. La falla de B o C por si solos es insuficiente para causar la falla del sistema.

Las siguientes reglas se deben tener en cuenta al momento de definir los bloques:

1. Cada bloque debe representar el mayor número posible de componente de manera de simplificar el diagrama.
2. La función de cada bloque se debe identificar fácilmente.
3. Los bloques deben ser independientes entre sí, es decir, la falla de uno no debe afectar la probabilidad de falla de otro bloque.
4. Cada bloque debe contener un tipo de tecnología, esto es, eléctrico o electro-mecánico

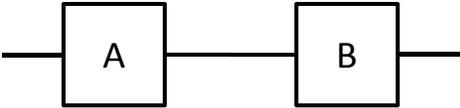


Figura 2.1: Sistema en serie

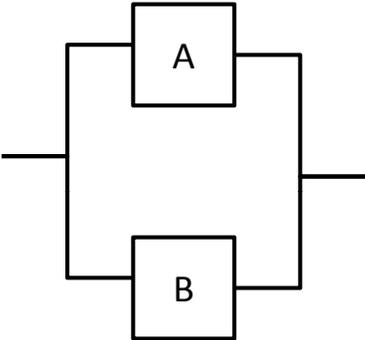


Figura 2.2: Sistema en paralelo o redundante

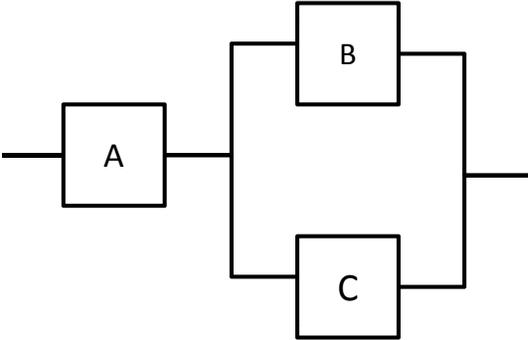


Figura 2.3: Sistema en serie y paralelo

## 2.2. Sistemas no reparables

### 2.2.1. Confiabilidad de sistemas en serie

Consideremos el sistema de la figura 2.1. La confiabilidad del sistema es la probabilidad que el bloque A y el bloque B no fallen, es decir:

$$R_{AB} = R_A \cdot R_B \text{ y en general,}$$

$$R_{AN} = R_A \cdot R_B, \dots, R_N$$

En el caso de una tasa de falla constante, donde:

$$R_A = e^{-\lambda_A t}$$

Entonces,

$$R_N = e^{-(\lambda_A + \lambda_B, \dots, \lambda_N)t}$$

De donde se deduce que el sistema también tiene una tasa de falla constante, cuya confiabilidad es de la forma  $e^{-Kt}$  y  $K$  es la suma de las tasas de falla individuales.

### 2.2.2. Confiabilidad de sistemas redundantes

Existen diferentes formas de tener sistemas redundantes. Estas se muestran en el diagrama de la figura 2.4. Por ahora, vamos a considerar de redundancia sin reparación, en este caso se asume que un componente que falla permanece así hasta que todo el sistema falla.

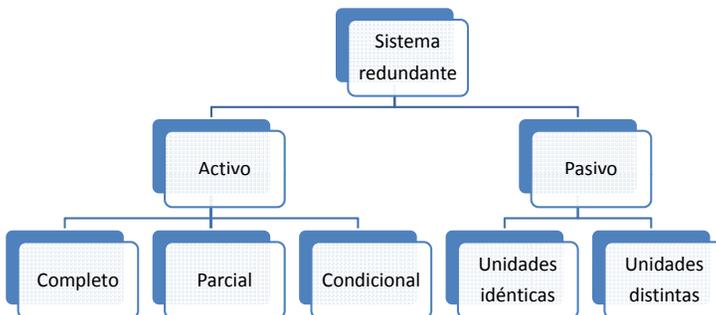


Figura 2.4: Sistemas redundantes

### Redundancia activa completa

Consideremos el sistema de la figura 2.2. La probabilidad de que el sistema falle, es la probabilidad de que el bloque A y el bloque B fallen. Dado que la probabilidad que el sistema o bloque falle es  $1 - R$ , se tiene que:

$$R_S = 1 - (1 - R_A)(1 - R_B) \text{ o en otra forma,}$$

$$R_S = R_A + R_B - R_A R_B$$

Si existen  $N$  componentes en esta configuración redundante de forma que todos pueden fallar excepto uno, entonces la expresión es,

$$R_S = 1 - (1 - R_A)(1 - R_B), \dots, (1 - R_N)$$

Si consideramos el caso de dos componentes idénticos en redundancia activa completa, la confiabilidad del sistema, luego de sustituir  $R = e^{-\lambda t}$  viene dada por:

$$R_S = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$$

Es importante notar, que a contrario del caso en serie, esta combinación de unidades con tasa de falla constante exhibe una confiabilidad que *no* se puede expresar en la forma  $e^{-Kt}$ . En otras palabras, aunque el sistema esta compuesto por componentes de tasa de falla constante, la tasa de falla del sistema es variable. El tiempo medio entre fallas (MTBF) se puede calcular solo como la integral de la confiabilidad:

$$MTBF = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} MTBF &= \int_0^{\infty} 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t} \\ &= \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} \\ &= \frac{3}{2\lambda} \\ &= \frac{3}{2}\theta \end{aligned}$$

(2.1)

Donde  $\theta = 1/\lambda$  es el MTBF de un componente, ya que los componentes considerados poseen tasa de falla constante. Se debe tener cuidado en no asumir que la tasa de falla del sistema es  $2\lambda/3$ . Invertir el MTBF para obtener la tasa de fallas, y viceversa, es válido sólo para *tasas de falla constante*.

La figura 2.5 muestra la confiabilidad y tasa de falla para casos de componentes en serie y paralelo. Para el caso redundante, la tasa de falla es inicialmente cero y aumenta asintóticamente. La confiabilidad, en un sistema redundante, se mantiene mayor que en el caso en serie en un principio, pero eventualmente disminuye más acentuadamente. A mayor número de componentes redundantes, mayor es el periodo de alta confiabilidad y más acentuada es la disminución.

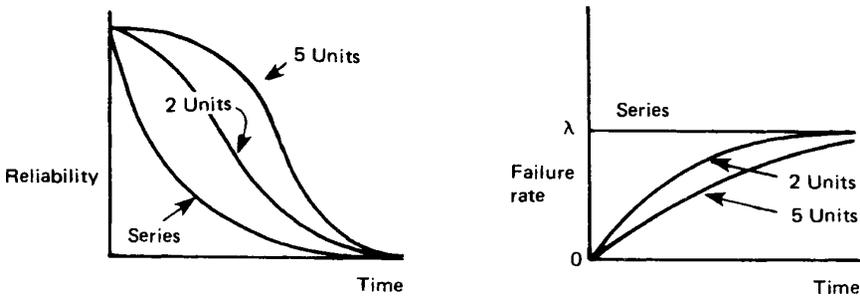


Figura 2.5: Efecto de la redundancia en la confiabilidad y la tasa de falla

### Redundancia activa parcial

En muchos casos de redundancia el número de componentes que pueden fallar antes que el sistema falle es menor que el caso de redundancia activa completa. Consideremos un ejemplo de tres componentes redundantes, redundancia completa sólo necesita un componente funcionando, en cambio sería redundancia parcial si se necesitan dos componentes funcionando y solo se permite la falla de uno.

Para determinar la confiabilidad en este caso, consideremos tres componentes idénticos con confiabilidad  $R$  cada uno. Definimos la probabilidad de falla  $Q$ , de modo que  $R+Q = 1$ . Existen cuatro situaciones en que el sistema sigue funcionando:

1. Ninguno de los tres componentes falla, probabilidad:  $R \cdot R \cdot R = R^3$
2. El primero componente falla y los otros no, probabilidad:  $Q \cdot R \cdot R = (1 - R)R^2$
3. El segundo componente falla y los otros no, probabilidad:  $R \cdot Q \cdot R = (1 - R)R^2$
4. El tercer componente falla y los otros no, probabilidad:  $R \cdot R \cdot Q = (1 - R)R^2$

Por lo tanto la confiabilidad del sistema es,

$$\begin{aligned}R_S &= R^3 + 3R^2(1 - R) \\ &= 3R^2 - 2R^3\end{aligned}$$

En general, si deben funcionar  $k$  componentes de un total de  $m$ , la confiabilidad viene dada por,

$$R_{k/m} = \sum_{i=k}^m \binom{m}{i} R^i (1 - R)^{m-i}$$

Donde,

$$\binom{m}{i} = \frac{m!}{(m-i)!i!}$$

$R_{k/m}$  es la confiabilidad de un sistema donde pueden fallar  $k$  componentes de un total de  $m$ .

$R$  es la confiabilidad de un componente.

### Redundancia pasiva

Hasta ahora, solo hemos visto casos de redundancia activa, en donde cada componente considerado esta operando y el sistema puede funcionar a pesar de la perdida de uno o mas componentes. Redundancia pasiva, considera componentes adicionales que son activados solo cuando el componente en operación falla.

La figura 2.6 muestra un sistema de  $n$  componentes idénticos con un componente activo. Si el componente activo falla, este es desactivado y el siguiente toma su lugar. Inicialmente, se asume lo siguiente:

1. El medio utilizado para detectar una falla y cambiar de un componente a otro, esta libre de fallas.
2. Los componentes pasivos tienen la misma tasa de falla que el componente principal.
3. Los componentes pasivos no fallan mientras están inactivos.

4. Como en los casos anteriores de redundancia activa, las unidades son reparadas. No se realizan reparaciones hasta que el sistema completo falla.

La confiabilidad del sistema es la probabilidad de que el número de fallas sea menor que  $n$ . Este problema se relaciona con la distribución de Poisson. Esta distribución expresa la probabilidad que un determinado número de eventos ocurran en un determinado periodo de tiempo, dada una frecuencia media conocida  $\lambda$  e independientemente del tiempo discurrido desde el último evento. De acuerdo a la distribución de Poisson, la probabilidad que ocurran menos de  $n$  eventos es,

$$R_S = e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^r}{r!}$$

Lo que se reduce para el caso de 2 unidades a,

$$R_S = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)$$

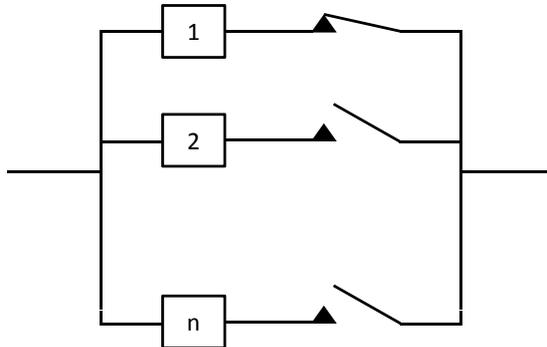


Figura 2.6: Sistema con redundancia pasiva

### 2.3. Sistemas reparables

Hemos visto hasta ahora las reglas básicas para sistemas en serie y redundantes. Sin embargo, las ecuaciones vistas para sistemas redundantes son válidas sólo cuando los componentes no son reparados. En otras palabras, la confiabilidad se calculó como la probabilidad de falla del sistema, dado que los componentes fallidos se mantienen así. A continuación se abarcan los casos de sistemas con reparaciones.

### 2.3.1. Sistemas en serie

Consideremos el sistema en serie de la Figura 2.7.



Figura 2.7: Sistema reparable en serie

La tasas de falla y tiempos medio de detención de cada equipo son  $\lambda_A$  y  $\lambda_B$ , y  $MDT_A$  y  $MDT_B$  respectivamente.

Para que el sistema falle basta con que uno de los dos equipos falle. Por lo tanto, la tasa de fallas del sistema viene dada por la suma de las tasas de falla individuales:

$$\lambda_S = \lambda_A + \lambda_B$$

El tiempo medio de detención del sistema es el promedio de los tiempos de detención de ambos equipos ponderados por su porcentaje de fallas:

$$MDT_S = \frac{MDT_A \lambda_A + MDT_B \lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}$$

La no disponibilidad del sistema se puede aproximar por  $\lambda_S MDT_S$ :

$$\bar{A}_S = MDT_A \lambda_A + MDT_B \lambda_B$$

Notar que estas expresiones se pueden extender fácilmente a sistemas con  $n$  equipos en serie.

### 2.3.2. Sistemas Redundantes

#### Redundancia activa

Consideremos un sistema redundante simple (uno de dos) como el de la Figura 2.8. Esto es, uno de los dos componentes debe funcionar. La falla del sistema requiere entonces que ambas unidades fallen.

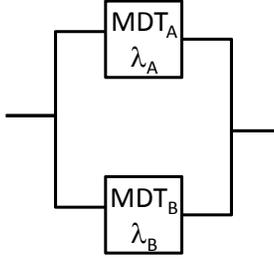


Figura 2.8: Sistema reparabile en paralelo

ara que el sistema falle se necesita que, simultáneamente, una unidad falle y la otra este en estado de falla. Es decir, que no este disponible. La no disponibilidad se puede aproximar a  $\lambda MDT$  (como vimos en la sección 1.1.9). Por lo tanto, la tasa de falla del sistema se puede estimar como:

$$\lambda_S = \lambda_A \times \lambda_B MDT_B + \lambda_B \times \lambda_A MDT_A = \lambda_A \lambda_B (MDT_A + MDT_B)$$

La expresión general para  $n$  unidades idénticas donde se requieren  $m$  operativas es,

$$\lambda_S = \frac{n!}{(n - m)!(m - 1)!} \lambda^{n-m+1} MDT^{n-m}$$

Lo que lleva a la siguiente tabla:

Número de unidades, n	1	$\lambda$			
	2	$2\lambda^2 MDT$	$2\lambda$		
	3	$3\lambda^3 MDT^2$	$6\lambda^2 MDT$	$3\lambda$	
	4	$4\lambda^4 MDT^3$	$12\lambda^3 MDT^2$	$12\lambda^2 MDT$	$4\lambda$
		1	2	3	4
		Número requerido para operar, m			

Figura 2.9: Tasa de falla en sistemas redundantes reparables

Para calcular la no disponibilidad del sistema, es necesario el MDT del sistema. Este no es el mismo que el MDT de un componente. Consideremos nuevamente el caso redundante simple (uno de dos). Cuando ocurra la segunda falla, el equipo de reparación estará en promedio a mitad de reparación del primer componente. Se puede demostrar que los tiempos medios de paradas vienen dados por la multiplicación de los MDT individuales divididos por su suma:

$$MDT_S = \frac{MDT_B \times MDT_A}{MDT_A + MDT_B}$$

El valor del tiempo de parada en general para  $n$  unidades idénticas donde se requieren  $m$  operativas es  $MDT/(n - m + 1)$ . Entonces, usando la tabla anterior y multiplicando cada celda por el tiempo de parada correspondiente lleva a:

$$\bar{A}_S = \frac{n!}{(n - m + 1)!(m - 1)!} \lambda^{n-m+1} MDT^{n-m+1}$$

Número de unidades, n	1	$\lambda$ MDT							
	2	$\lambda^2$ MDT <sup>2</sup>	$2\lambda$ MDT						
	3	$\lambda^3$ MDT <sup>3</sup>	$3\lambda^2$ MDT <sup>2</sup>	$3\lambda$ MDT					
	4	$\lambda^4$ MDT <sup>4</sup>	$4\lambda^3$ MDT <sup>3</sup>	$6\lambda^2$ MDT <sup>2</sup>	$4\lambda$ MDT				
		1	2	3	4				
		Número requerido para operar, m							

Figura 2.10: No disponibilidad en sistemas redundantes reparables

**Redundancia pasiva**

Consideremos el caso de la Figura 2.11, donde se tiene un sistema redundante pasivo:

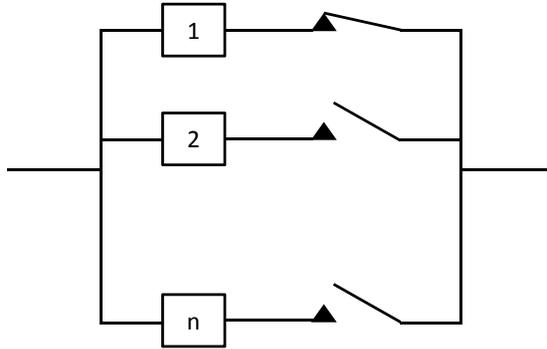


Figura 2.11: Sistema redundante pasivo con equipos reparables

Los equipos tiene una tasa de falla  $\lambda$  y un tiempo medio de detención  $MDT$ . En este caso, para que falle el sistema debe fallar el primer equipo y haber  $n - 1$  fallas en un tiempo menor a  $MDT$ .

La probabilidad de que el primer equipo falle viene dada por:

$$F(t) = (1 - e^{-\lambda t})$$

La probabilidad de que ocurran menos de  $n - 1$  fallas en  $MDT$ :

$$P(N \leq n - 2) = e^{-\lambda MDT} \sum_{r=0}^{n-2} \frac{(\lambda MDT)^r}{r!}$$

Por lo tanto, la probabilidad de falla del sistema es:

$$F_S(t) = (1 - e^{-\lambda t}) \left( 1 - e^{-\lambda MDT} \sum_{r=0}^{n-2} \frac{(\lambda MDT)^r}{r!} \right)$$

De donde se obtiene la siguiente expresión para la confiabilidad del sistema:

$$\begin{aligned} R_S(t) &= 1 - (1 - e^{-\lambda t}) \left( 1 - e^{-\lambda MDT} \sum_{r=0}^{n-2} \frac{(\lambda MDT)^r}{r!} \right) \\ &= e^{-\lambda t} + (1 - e^{-\lambda t}) e^{-\lambda MDT} \sum_{r=0}^{n-2} \frac{(\lambda MDT)^r}{r!} \end{aligned}$$

## 2.4. Configuración óptima

Para determinar la configuración óptima en sistemas redundantes. Se pueden tener dos situaciones distintas; la primera es minimizar los costos con una restricción de confiabilidad mínima a alcanzar, o en el segundo caso maximizar la confiabilidad teniendo una restricción de presupuesto máximo. Consideremos,

$c_i$  : costo del  $i$ -ésimo equipo

$n_i$  : numeros de equipos  $i$

Los problemas a resolver en cada caso son:

1. Minimizar costos con restricción de confiabilidad

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & n_i c_i \\ \text{s.a.} & R_S \geq R \end{array}$$

2. Maximizar confiabilidad con restricción de presupuesto

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & R_S \\ \text{s.a.} & n_i c_i \leq P \end{array}$$

## 2.5. Árboles de falla

Un árbol de falla es un método gráfico de describir combinaciones de eventos que llevan a una falla del sistema. La falla del sistema es conocida como evento superior.

Un árbol de fallas se construye con tres operaciones lógicas básicas AND, OR y *voting* OR, representados por dos símbolos. Cada símbolo tiene entradas en la parte inferior, cada entrada representa fallas. Las salidas se ubican en la parte superior y representan la propagación de la falla dependiendo de la naturaleza de la operación. Las operaciones lógicas son:

**OR:** El evento de salida ocurre si uno o más de los eventos de entrada ocurre.

**AND:** El evento de salida ocurre si y solo si todos los eventos de entrada ocurren.

**voting OR:** El evento de salida ocurre si  $n$  o más de los eventos de entrada ocurre.

La figura 2.12 muestra los símbolos para las operaciones AND y OR, también se muestra el equivalente a un diagrama de bloques. La operación AND modela el caso redundante y es por lo tanto equivalente a un diagrama de bloques paralelos.

La operación OR modela el caso en serie en donde cualquier falla produce el evento de salida.

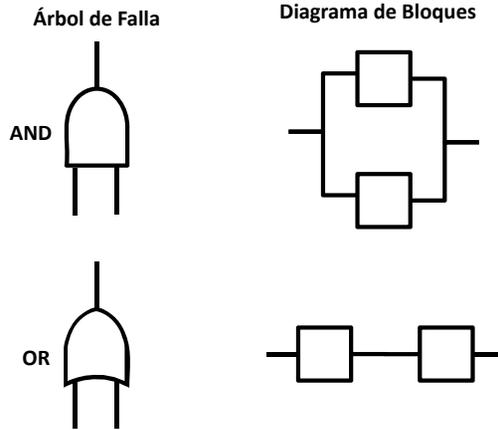


Figura 2.12: Operaciones lógicas árbol de falla

Para árboles de falla simples se utilizan las mismas ecuaciones que en diagramas de bloques, la diferencia es básicamente el método de modelamiento gráfico. En términos de probabilidad la operación AND multiplica las probabilidades de falla y la operación OR las suma. Mientras el diagrama de bloques muestra el camino para el funcionamiento del sistema, el árbol de fallas muestra el camino para la falla del sistema.

La figura 2.14 muestra un árbol de fallas de un sistema contra incendios. Se muestran dos símbolos adicionales. El rectángulo se utiliza para describir un evento de falla. Los círculos se ubican siempre en la parte más baja de una ruta y representan eventos de falla primarios.

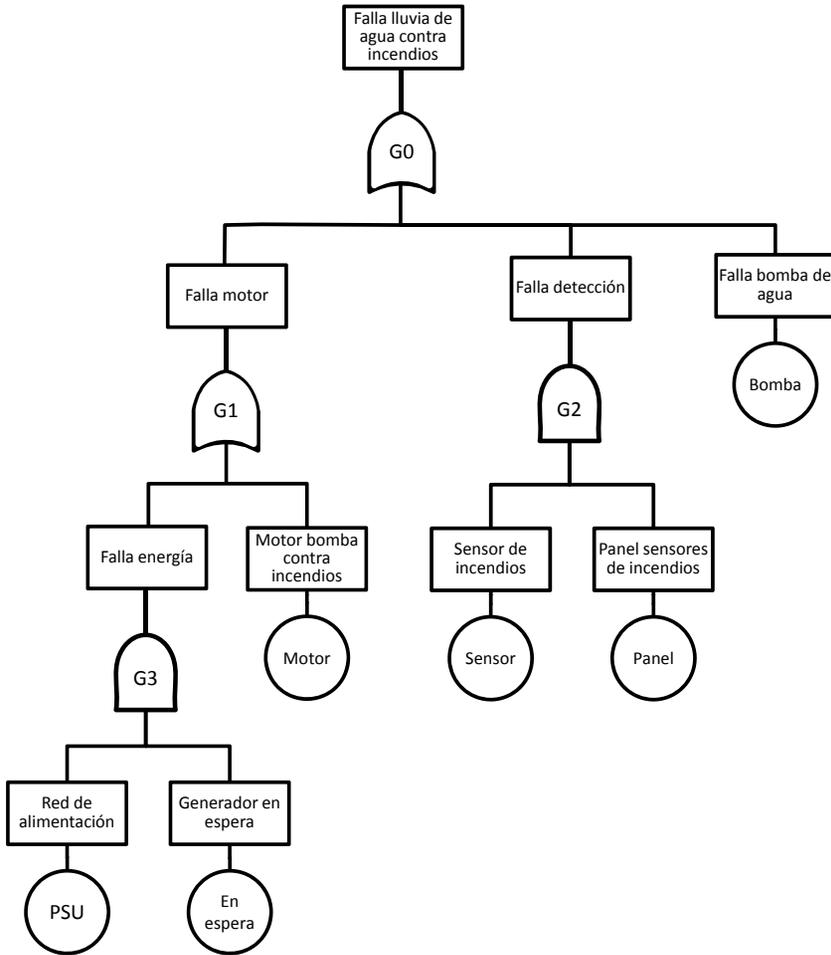


Figura 2.13: Árbol de falla de un sistema contra incendios

### 2.5.1. Cálculos

Una vez que se ha modelado el árbol de falla de un sistema, el paso siguiente es evaluar la frecuencia del evento superior. Como con diagramas de bloques, esto se puede realizar, para árboles simples, usando las formulas de las secciones 2.2.1, 2.2.2 y 2.3.

Consideremos el ejemplo de la figura 2.14, teniendo los siguientes datos:

	Tasa de falla ( $\times 10^{-6}$ fallas/hora)	MDT (horas)
PSU	100	24
En espera	500	168
Motor	50	168
Detector	5	168
Panel	10	24
Bomba	60	24

La tasa de falla resultante en operadores AND (G2 y G3) se obtiene de la formula  $\lambda_1 \times \lambda_2 \times (MDT_1 + MDT_2)$ . La tasa de falla resultante para los operadores OR (G1 y G0) se obtiene sumando las tasas de falla.

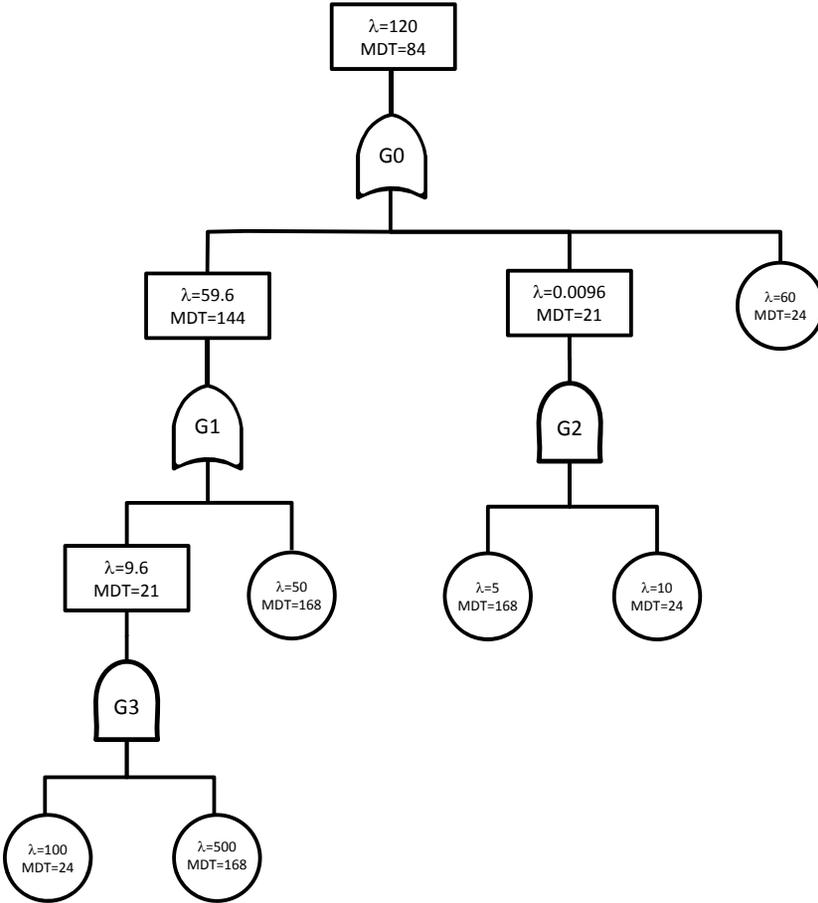


Figura 2.14:

Los tiempos medios de paradas en operaciones AND vienen dados por la multiplicación de los MDT individuales divididos por su suma. Por ejemplo, para G3 el resultado es,

$$\frac{(24 \times 168)}{(24 + 168)} = 21h$$

Para el caso de operaciones OR, el MDT se estima como el promedio ponderado de los MDT individuales ponderados por las tasas de falla. Por ejemplo, para G1 el tiempo de parada medio es,

$$\frac{(21 \times 9,6) + (168 \times 50)}{9,6 + 50} = 144h$$

## 2.6. Diagrama Causa y Efecto

Aunque los árboles de falla son la técnica más utilizada para análisis cuantitativo, están limitados a combinaciones lógicas AND/OR que contribuyen a un evento definido (el evento superior). Existen algunos casos difíciles de modelar con un árbol de falla. Por ejemplo, los árboles de falla no pueden modelar sistemas donde las fallas de los mismos componentes en distinto orden dan resultados distintos.

Los diagrama causa efecto (CCD) asemejan árboles de decisión. El elemento principal de un CCD, es la caja de decisión que contiene una pregunta/condición con respuesta SI/NO. Las opciones se conectan por líneas a cada caja de decisión o resultado.

Mediante un ejemplo simple se puede mostrar la diferencia entre un diagrama causa y efecto y un árbol de falla.

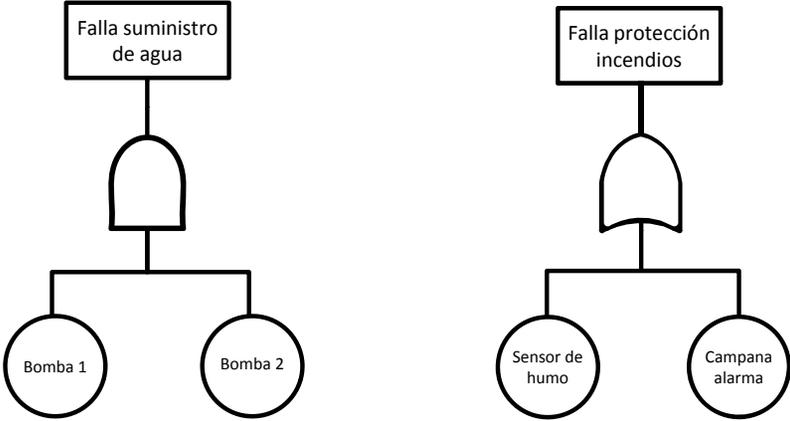


Figura 2.15:

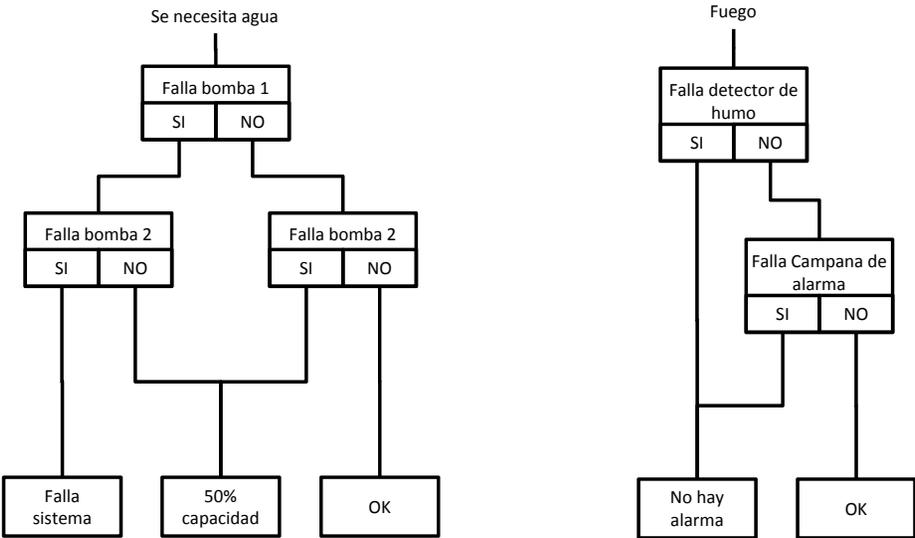


Figura 2.16:

### 2.6.1. Cálculos

Un diagrama de eventos simple, se puede evaluar por multiplicación simple de las probabilidades de los eventos SI/NO. Por ejemplo consideremos el caso de dos bombas en paralelo mostrado en la figura 2.17. Cada bomba tiene una confiabilidad de 0.975, y por lo tanto una probabilidad de falla del 0.025 %.

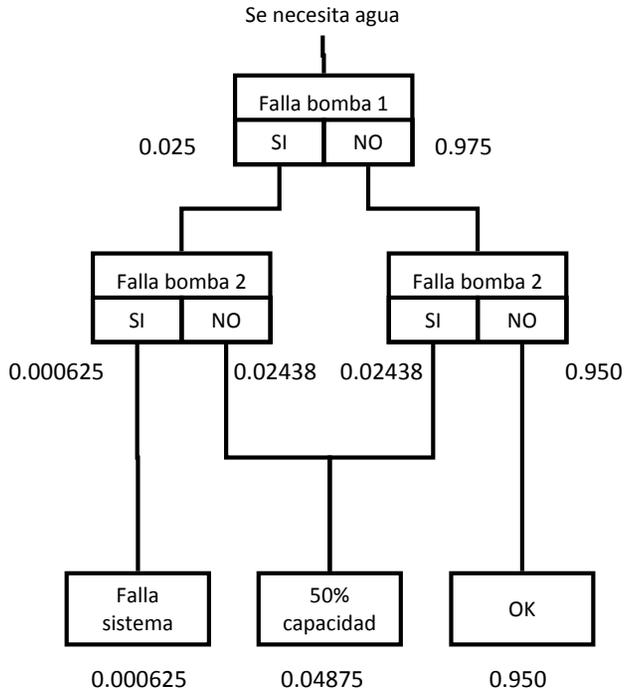


Figura 2.17:

La probabilidad de que el sistema falle es  $0,025 \times 0,025$ , la probabilidad de tener una capacidad del 50 % es  $0,025 \times 0,975 + 0,025 \times 0,975$ , y la confiabilidad del sistema es  $0,975 \times 0,975$ .

### 2.7. Análisis de Pareto

El diagrama de Pareto se denomina así por Wilfredo Pareto (1848-1923) un economista y sociólogo italiano. Pareto luego de hacer un estudio de la riqueza en Italia, encontró que el 20 % de las personas controla el 80 % de la riqueza. Esta

lógica de que los pocos poseen mucho y los muchos tienen poco ha sido aplicada en muchas situaciones y es conocida como el principio de Pareto.

J.M.Duran introdujo por primera vez el principio o diagrama de Pareto en el área de control de calidad. Duran afirmaba que siempre existen unos pocos defectos que causan los mayores costos. En otras palabras, cerca del 20 % de los problemas causan cerca del 80 % de los costos.

Para construir un diagrama de Pareto primero se colecta y clasifica los datos de fallas de un equipo. Las fallas se deben clasificar en grupos, esto se puede realizar de acuerdo al tipo de falla, causa, efecto, problema, etc. A cada grupo se le asocia un número total de fallas y los costos totales asociados a estas (costo de intervención, horas de detención, etc.). Como se muestra en la tabla a continuación,

Tipo	Horas de detención	Numero de fallas
1	100	4
2	32	15
3	50	4
4	19	14
5	4	3
6	30	8
7	40	12
8	80	2
9	55	3
10	150	5
11	160	4
12	5	3
13	10	8
14	20	8

Tabla 2.1: Registro de fallas

Luego la tabla se ordena por costos decrecientes y se representan gráficamente los costos acumulados (normalizados por la suma total de costos) vs la cantidad acumulada de fallas (normalizadas respecto de su total también). El resultado usual es de la forma mostrada en la figura 2.18. La curva se divide en tres zonas: A, B y C. La Zona A muestra usualmente que aproximadamente 20 % de las fallas producen el 80 % de los costos; se debe dar prioridad a las fallas en esta zona. En la zona B se concentran aproximadamente 15 % de los costos, los que son producidos por el 30 % de las fallas. La zona C solo concentra 5 % de los costos producidas por el 50 % de las fallas. Estas fallas tienen la menor prioridad.

$i$	$C_i$	$F_i$	$\sum C_i$	$\sum F_i$	$\frac{\sum C_i}{C_T}$	$\frac{\sum F_i}{F_T}$
11	160	4	160	4	21 %	4 %
10	150	5	310	9	41 %	10 %
1	100	4	410	13	54 %	14 %
8	80	2	490	15	65 %	16 %
9	55	3	545	18	72 %	19 %
3	50	4	595	22	79 %	24 %
7	40	12	635	34	84 %	37 %
2	32	15	667	49	88 %	53 %
6	30	8	697	57	92 %	61 %
14	20	8	717	65	95 %	70 %
4	19	14	736	79	97 %	85 %
13	10	8	746	87	99 %	94 %
12	5	3	751	90	99 %	97 %
5	4	3	755	93	100 %	100 %
$\sum$	755	93				

Tabla 2.2: Análisis de Pareto

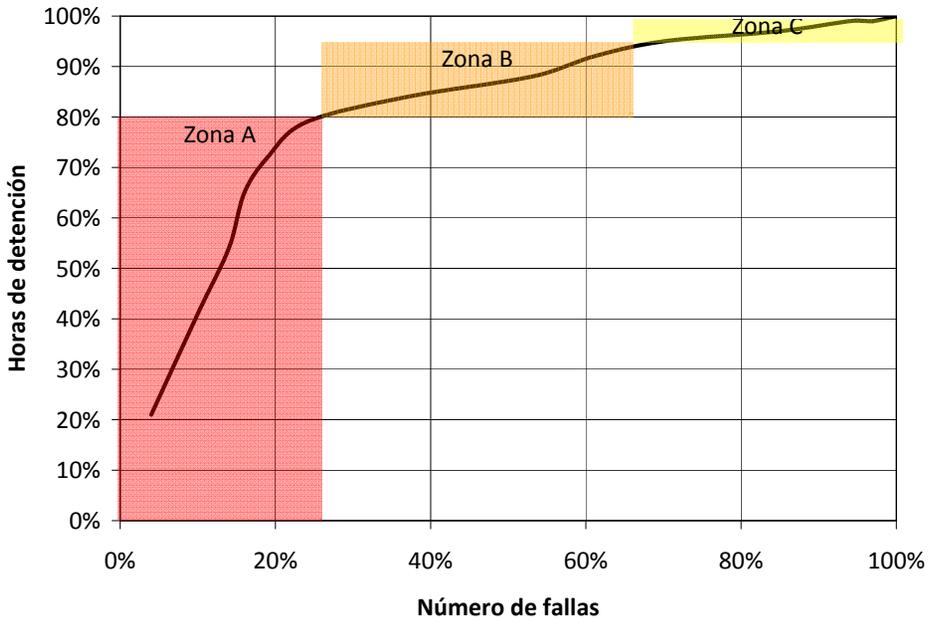


Figura 2.18: Diagrama de Pareto

# Capítulo 3

## Modelos de Confiabilidad

### 3.1. Distribuciones estadísticas

A continuación se describen las distribuciones estadísticas más utilizadas en análisis de confiabilidad.

#### 3.1.1. Distribución Binomial

Consideremos un experimento consistente en  $n$  intentos, cada intento puede resultar positivo o negativo con probabilidades  $p$  y  $q$  respectivamente. La probabilidad  $P_r$  de  $r$  positivos y  $(n - r)$  negativos es

$$P_r = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}$$

Donde,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Si  $X$  denota el número de positivos en  $n$  intentos, entonces  $X$  es una variable discreta con valor medio de  $(np)$  y varianza de  $(npq)$ .

Esta distribución se asocia al caso de  $n$  componentes con una probabilidad  $p$  de falla, entonces la probabilidad de encontrar  $r$  defectuosos de un total de  $n$  viene

dado por  $P_r$ . En el caso de sistemas redundantes donde se necesitan  $r$  componentes funcionando de un total de  $n$ , la confiabilidad del sistema viene dada por,

$$R_{r/n} = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i}$$

### 3.1.2. Distribución de Poisson

Para eventos continuos que ocurren a una tasa de  $\lambda$  eventos por unidad de tiempo, la probabilidad  $P_x(t)$  de que ocurran exactamente  $x$  eventos en el intervalo  $(0, t)$  esta dada por,

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

El numero de eventos  $x$  en  $(0, t)$  es una variable discreta con valor medio de  $(\lambda t)$  y varianza de  $(\lambda t)$ . Esta distribución entrega la confiabilidad de un sistema redundante pasivo,

$$R_S = e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^n \frac{(\lambda t)^r}{r!}$$

Donde  $n$  es el numero de componentes redundantes.

### 3.1.3. Distribución Exponencial

Los componentes con tasa de falla constante tienen una distribución exponencial.

Si  $\lambda(t) = \lambda$ , la confiabilidad viene dada por:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} = e^{-\lambda t}$$

El tiempo medio entre fallas:

$$\begin{aligned}MTTF &= \int_0^{\infty} R(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt \\ &= \left. \frac{-1}{\lambda e^{\lambda t}} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

La probabilidad de falla es:

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Y por último la función densidad de probabilidad de fallas,

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

### 3.1.4. Distribución de Weibull

En una distribución de Weibull, la tasa de fallas viene dada por,

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}$$

Donde,

$t - \gamma \geq 0$ , y  $\gamma$  es el parámetro de inicio

$\beta > 0$  es el parámetro de forma

$\eta > 0$  es el parámetro de escala

Siguiendo el mismo procedimiento de la sección anterior se obtiene que:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

$$MTTF = \gamma + \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

La función Gamma está definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$$

y tiene la propiedad que  $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ . Si  $n$  es un entero, entonces  $\Gamma(n+1) = n!$ .  
En excel  $\Gamma(x) = \text{EXP}(\text{GAMMA}.\text{LN}(X))$

## 3.2. Estimación de parámetros Weibull

### 3.2.1. $\gamma = 0$

Consideremos primero el caso  $\gamma = 0$ , queremos estimar los parámetros  $\eta$  y  $\beta$  de la función:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$$

Haciendo el cambio de variables:

$$x = \ln(t)$$

$$y = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right)$$

tenemos que:

$$\ln \left( \ln \left( \frac{1}{1 - F(t)} \right) \right) = \beta \ln(t) - \beta \ln(\eta)$$

$$y = ax + b$$

con  $a = \beta$  y  $b = -\beta \ln(\eta)$ . Los parámetros  $a$  y  $b$  se pueden estimar por medio de una regresión lineal simple:

$$\hat{b} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x}$$

De donde se obtiene que  $\hat{\beta} = \hat{a}$  y  $\hat{\eta} = e^{-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}}$ .

Si tenemos un registro de  $n$  fallas, el procedimiento es el siguiente:

1. Los  $n$  registros de tiempo de falla se ordenan de menor a mayor y se les asigna un número de orden  $i$  de 1 a  $n$ .
2. Se calcula para cada falla la función probabilidad de falla  $F(i)$ . Si la población es pequeña  $F(i)$  se puede utilizar el métodos de rangos medianos:

$$F(i) = \frac{i - 0,3}{n + 0,4}$$

o por el método de los rangos medios:

$$F(i) = \frac{i}{n + 1}$$

3. Se tabulan los datos  $(t_i, F(i))$
4. Se realiza el cambio de variables definido anteriormente y se estiman los parámetros  $\eta$  y  $\beta$  por medio de una regresión lineal.

Por ejemplo, consideremos la siguiente tabla con tiempos de falla de un componente:

Falla N <sup>o</sup>	Duración (horas)
1	726.044
2	615.432
3	508.077
4	807.863
5	755.223
6	848.953
7	384.558
8	666.686
9	515.201
10	483.331

Tabla 3.1: Tabla de duración hasta el fallo

Primero ordenamos los datos en forma ascendente, asignamos un número de orden  $i$ . Luego estimamos  $F(i)$  por medio del método de rangos medianos y determinamos  $x$  e  $y$ .

$i$	$t_i$	$F(i)$	$x_i = \ln(t_i)$	$y_i = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F(i)}\right)\right)$
1	384.558	0.0673	5.952	-2.664
2	483.331	0.1635	6.181	-1.723
3	508.077	0.2596	6.231	-1.202
4	515.201	0.3558	6.245	-0.822
5	615.432	0.4519	6.422	-0.509
6	666.686	0.5481	6.502	-0.230
7	726.044	0.6442	6.588	0.033
8	755.223	0.7404	6.627	0.299
9	807.863	0.8365	6.694	0.594
10	848.953	0.9327	6.744	0.993

La figura 3.1 muestra el resulta de la regresión lineal de los datos  $(x_i, y_i)$ . Se obtiene que  $a = 4,25$  y  $b = -27,82$ , por lo tanto:

$$\beta = 4,25$$

$$\eta = e^{\frac{27,82}{4,25}} = 696,4$$

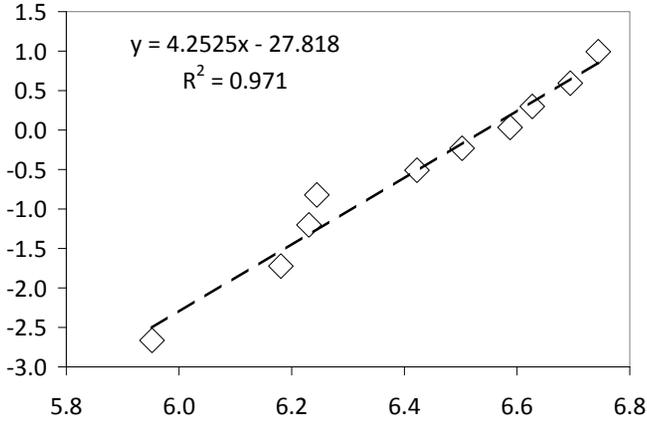


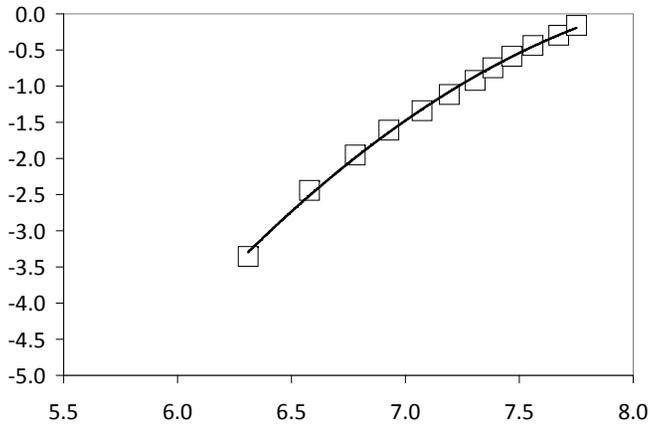
Figura 3.1: Regresión lineal de datos  $(x_i, y_i)$

**3.2.2.**  $\gamma \neq 0$

Cuando  $\gamma$  es mayor a cero, el gráfico de  $(x_i, y_i)$  no mostrará una recta como en el caso anterior, sino una curva con una asíntota vertical. El corte de la asíntota con el eje del tiempo indica el valor de  $\gamma$ . Como el valor obtenido es estimado, el proceso se hace iterativamente corrigiendo la escala de tiempo de modo que  $t_{i+1} = t_i - \gamma_i$

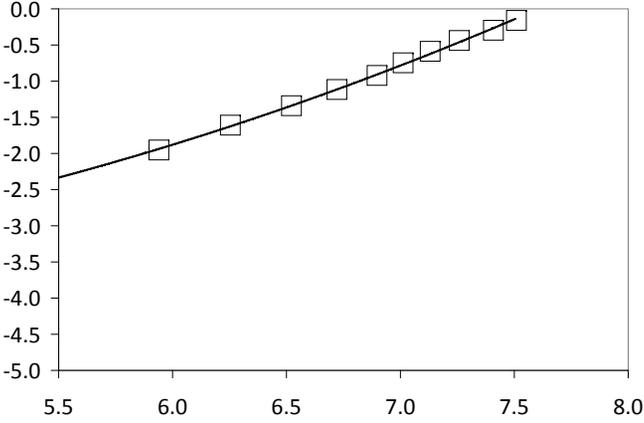
Como ejemplo, consideremos los siguientes datos:

Falla	Tiempo de	Rangos medianos		
Nº	falla	N=20	$\ln(t_i)$	$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F(i)}\right)\right)$
$i$	$t_i$	$F(i)$	$x_i$	$y_i$
1	550	0.03	6.310	-3.355
2	720	0.08	6.579	-2.442
3	880	0.13	6.780	-1.952
4	1020	0.18	6.928	-1.609
5	1180	0.23	7.073	-1.340
6	1330	0.28	7.193	-1.116
7	1490	0.33	7.307	-0.921
8	1610	0.38	7.384	-0.747
9	1750	0.43	7.467	-0.587
10	1920	0.48	7.560	-0.438
11	2150	0.52	7.673	-0.297
12	2325	0.57	7.751	-0.160
13-20	Datos censurados			



La curvatura del gráfico sugiere que el parámetro de inicio  $\gamma$  es mayor a 0. Si utilizamos  $\gamma = 500$ , se obtienen los siguientes datos corregidos:

Falla Nº $i$	Tiempo de falla $t_i$	Rangos medianos		
		N=20 $F(i)$	$\ln(t_i)$ $x_i$	$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F(i)}\right)\right)$ $y_i$
1	50	0.03	3.912	-3.355
2	220	0.08	5.394	-2.442
3	380	0.13	5.940	-1.952
4	520	0.18	6.254	-1.609
5	680	0.23	6.522	-1.340
6	830	0.28	6.721	-1.116
7	990	0.33	6.898	-0.921
8	1110	0.38	7.012	-0.747
9	1250	0.43	7.131	-0.587
10	1420	0.48	7.258	-0.438
11	1650	0.52	7.409	-0.297
12	1825	0.57	7.509	-0.160
13-20	Datos censurados			

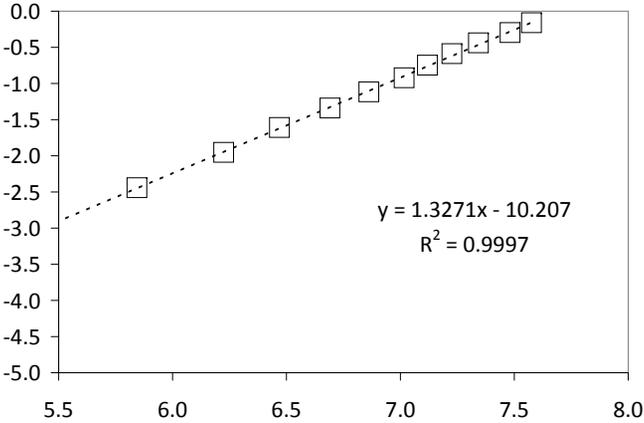


Ahora obtenemos una línea que se encuentra curvada en la otra dirección, lo que prueba que el parámetro  $\gamma$  tiene un valor entre 0 y 500. Si utilizamos  $\gamma = 375$  obtenemos una línea recta. Y los parámetros de Weibull son:

$$\gamma = 375$$

$$\beta = 1,33$$

$$\eta = 2189$$



### 3.2.3. Verificación de modelos mediante el test de Kolmogorov-Smirnov

El test se basa en comparar la verdadera función de distribución con la dada por la ley propuesta. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Determinar la función de distribución a la que se quiere ajustar los datos. Luego determinar los parámetros de la distribución elegida.
2. Elegir un grado de significación  $d_\alpha$  (usualmente 1, 5 o 10%). Esta es la probabilidad de rechazar la hipótesis que los datos siguen la distribución elegida, asumiendo que la hipótesis es cierta.
3. Determinar  $F(i)$  usando los parámetros asumidos en el paso 1.  $F(i)$  es el valor teórico de la función distribución para la falla  $i$ .
4. De los datos de falla determinar  $\hat{F}(i)$  utilizando rangos medianos u otro método.
5. Determinar el valor máximo de:

$$\left\{ \begin{array}{l} |F(i) - \hat{F}(i)| \\ |F(i) - \hat{F}(i-1)| \end{array} \right\} = d$$

Si  $d > d_\alpha$  la hipótesis es rechazada.  $d_\alpha$  se obtiene de la tabla mostrada en la figura 3.2.

Sample size $n$	K-S level of significance ( $d_\alpha$ )				
	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.783
5	0.446	0.474	0.510	0.565	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.410	0.490
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.285	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.21	0.22	0.24	0.27	0.32
30	0.19	0.20	0.22	0.24	0.29
35	0.18	0.19	0.21	0.023	0.27
Over 35	<u>1.07</u>	<u>1.14</u>	<u>1.22</u>	<u>1.36</u>	<u>1.63</u>
	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$

Figura 3.2: Valores críticos del test Kolmogorov-Smirnov

# Capítulo 4

## Mantenimiento preventivo

### 4.1. Intervalo óptimo entre reemplazos preventivos de componentes reparables sujetos a fallas

Se tiene un componente sujetos a fallas imprevistas, cuando las fallas ocurren el componente puede debe ser reparado. Una reparación no altera la vida del componente, por lo que la tasa de fallas es la misma antes y después de la reparación. Para reducir el numero el fallas, se pueden definir reemplazos preventivos a intervalos específicos. Luego de un reemplazo preventivo el componente es reemplazado por uno nuevo, y la tasa de falla disminuye a la de  $t = 0$ . Se busca un balance entre la frecuencia de los reemplazos preventivos y sus beneficios.

En la construcción del siguiente modelo se asume que el componente es operado por un periodo largo de tiempo y los intervalos entre reemplazos preventivos son cortos. En este caso se puede estudiar un ciclo entre dos reemplazos preventivos. Si el intervalo entre reemplazos preventivos fuera largo se debería estudiar todo el ciclo de vida del componente.

El modelo a continuación considera reemplazos preventivos a intervalos de tiempo fijos y reparaciones por fallas cuando se hace necesario. Se quiere determinar el intervalo óptimo entre reemplazos preventivos para minimizar el costo por unidad de tiempo.

#### Construcción del modelo

1.  $C_p$  es el costo de un mantenimiento preventivo
2.  $C_c$  es el costo de una reparación por falla

3.  $\lambda(t)$  es la tasa de fallas del componente.
4.  $t_p$  es el tiempo entre reemplazos preventivos. Las reparaciones por fallas ocurren cuantas veces sean necesarias en el intervalo  $(0, t_p)$ . Esto es ilustrado en la figura 4.1.
5. El objetivo es determinar el intervalo óptimo entre reemplazos preventivos,  $t_p^*$ , para minimizar el costo total esperado.

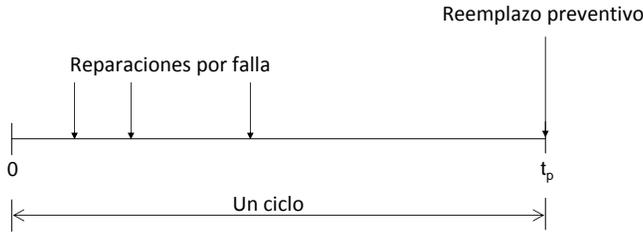


Figura 4.1:

El costo total esperado por unidad de tiempo es:

$$C(t_p) = \frac{\text{Costo total esperado en el intervalo } (0, t_p)}{\text{Largo del intervalo}}$$

Costo total esperado en el intervalo  $(0, t_p)$  = Costo de un reemplazo preventivo + costo esperado de reparaciones por fallas =  $C_p + C_c H(t_p)$ , donde  $H(t_p)$  es el numero de fallas esperado en el intervalo  $(0, t_p)$ . El largo del intervalo es  $t_p$ .

Por lo tanto se tiene que:

$$C(t_p) = \frac{C_p + C_c H(t_p)}{t_p}$$

El numero de fallas esperado  $H(t_p)$  se calcula como:

$$H(t_p) = \int_0^{t_p} \lambda(t) dt$$

El intervalo óptimo  $t_p^*$  se obtiene al resolver el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & C(t_p) \\ \text{s.a.} & t_p > 0 \end{array}$$

## 4.2. Intervalo óptimo entre mantenimientos preventivos de componentes sujetos a fallas

Se tiene un componente sujetos a fallas imprevistas, cuando las fallas ocurren el componente debe ser reparado. Dado que las fallas son imprevistas, es razonable suponer que el costo de reparar el componente debido a una falla es mayor que el de un mantenimiento preventivo. Por ejemplo, si el mantenimiento preventivo es planificado, se puede hacer los arreglos necesarios para evitar demoras innecesarias; una falla imprevista puede resultar en largos tiempos de detención o causar daño a otros componentes. Para reducir el numero el fallas, se pueden definir mantenimientos preventivos a intervalos específicos. Sin embargo, debe haber un balance entre la frecuencia de los mantenimientos preventivos y sus beneficios.

El instante en el que se realiza el reemplazo preventivo depende de la edad del componente. Cuando ocurren fallas, se realizan reparaciones por fallas. Este modelo considera que *cualquier intervención (correctiva o preventiva) es perfecta*, es decir, dejar al equipo como nuevo y la tasa de fallas vuelve a la de  $t = 0$ .

El problema es encontrar un equilibrio entre el costo de mantenimientos preventivos y sus beneficios. Para lograr esto debemos encontrar la edad óptima de mantención del componente para minimizar el costo total esperado por unidad de tiempo.

### Construcción del modelo

1.  $C_p$  es el costo de un mantenimiento preventivo
2.  $C_c$  es el costo de un mantenimiento por falla
3.  $\lambda(t)$  es la tasa de fallas del componente.
4. La política es realizar un mantenimiento preventivo una vez que el equipo ha alcanzado una edad específica  $t_p$ , más mantenimientos por fallas cuando es necesario. Esto es ilustrado en la figura 4.2.
5. El objetivo es determinar la edad óptima de mantención del componente,  $t_p^*$ , para minimizar el costo total esperado.



Figura 4.2:

En este problema, existen dos ciclos posibles: en el primer ciclo se realiza la mantención a la edad especificada  $t_p$ , en el segundo ciclo el componente falla antes del mantenimiento preventivo. Estas dos posibilidades son ilustradas en la figura 4.3.

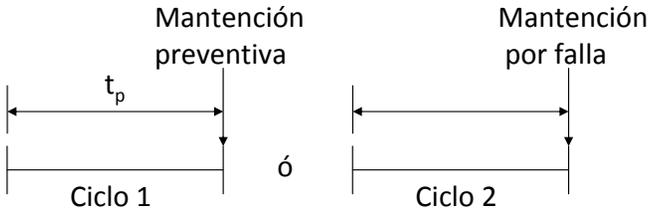


Figura 4.3:

El costo total esperado por unidad de tiempo es,

$$C(t_p) = \frac{\text{Costo total esperado por ciclo}}{\text{Largo esperado del ciclo}}$$

El costo total esperado por ciclo:

$$\begin{aligned} &= \text{Costo de un ciclo 1} \\ &\quad \times \text{Probabilidad de un ciclo 1} \\ &+ \text{Costo de un ciclo 2} \\ &\quad \times \text{Probabilidad de un ciclo 2} \\ &= C_p R(t_p) + C_c [1 - R(t_p)] \end{aligned}$$

El largo esperado del ciclo:

$$\begin{aligned}
 &= \text{Largo esperado de un ciclo 1} \\
 &\quad \times \text{Probabilidad de un ciclo 1} \\
 &\quad + \text{Largo esperado de un ciclo 2} \\
 &\quad \times \text{Probabilidad de un ciclo 2} \\
 &= t_p R(t_p) + (\text{Largo esperado de un ciclo 2}) [1 - R(t_p)]
 \end{aligned}$$

Para determinar el largo esperado de un ciclo por falla, consideremos la función densidad de probabilidad de falla mostrada en la figura 4.4.

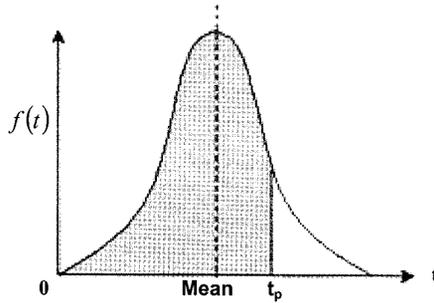


Figura 4.4:

El tiempo medio para una falla de la distribución completa es:

$$\int_0^{\infty} t f(t) dt$$

Si ocurre un mantenimiento preventivo en el tiempo  $t_p$ , entonces el tiempo medio para una falla es la media del área sombreada en la figura 4.4, dado que en el área sin sombra no pueden haber fallas. La media del área sombreada es,

$$M(t_p) = \int_0^{t_p} \frac{t f(t) dt}{1 - R(t_p)}$$

Por lo tanto el largo esperado el ciclo es  $= t_p \times R(t_p) + M(t_p) \times [1 - R(t_p)]$ , y el costo total por unidad de tiempo,

$$\begin{aligned} C(t_p) &= \frac{C_p R(t_p) + C_c [1 - R(t_p)]}{t_p \times R(t_p) + M(t_p) \times [1 - R(t_p)]} \\ &= \frac{C_p R(t_p) + C_c [1 - R(t_p)]}{t_p \times R(t_p) + \int_0^{t_p} t f(t) dt} \end{aligned}$$

Para simplificar la ecuación anterior anterior, podemos integrar  $\int_0^{t_p} t f(t) dt$  por partes,

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= f(t) \\ du &= dt & v &= F(t) = 1 - R(t) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_p} t f(t) dt &= t(1 - R(t)) \Big|_0^{t_p} - \int_0^{t_p} (1 - R(t)) dt \\ &= t_p - t_p R(t_p) - t_p + \int_0^{t_p} R(t) dt \\ &= -t_p R(t_p) + \int_0^{t_p} R(t) dt \end{aligned}$$

Reemplazando y simplificando obtenemos que:

$$C(t_p) = \frac{C_p R(t_p) + C_c [1 - R(t_p)]}{\int_0^{t_p} R(t) dt}$$

### 4.3. Selección de la estrategia de mantenimiento

Consideremos el caso de la sección anterior, una vez determinado el periodo óptimo entre mantenimientos preventivos queremos determinar cual es la estrategia óptima de mantenimiento: preventivo, correctivo o sintomático.

#### 4.3.1. Mantenimiento correctivo vs preventivo

En el caso de una estrategia de mantenimiento preventivo el costo total esperado por unidad de tiempo es:

$$C_P = \frac{C_p R(t_p) + C_c [1 - R(t_p)]}{\int_0^{t_p} R(t) dt}$$

Ahora, si se decide hacer solo mantenimiento correctivo. Tendríamos un solo ciclo posible (ciclo 2 en la figura 4.3). El costo total incurrido durante el ciclo es  $C_c$  y el largo del ciclo es el tiempo medio entre fallas,  $MTBF = \int_0^{\infty} R(t) dt$ .

Por lo tanto en el caso de mantenimiento correctivo el costo total esperado por unidad de tiempo es:

$$C_C = \frac{C_c}{\int_0^{\infty} R(t) dt}$$

Notar que se obtiene esta misma ecuación si hacemos  $t_p$  tender a infinito en la ecuación del costo total con mantenimiento preventivo.

La razón entre el costo total esperado de mantenimiento preventivo por unidad de tiempo  $C_P$  y el costo global de mantenimiento correctivo  $C_C$  está dada por:

$$\frac{C_P}{C_C} = (R(t_p)(\alpha - 1) + 1) \times \frac{\int_0^{\infty} R(t) dt}{\int_0^{t_p} R(t) dt}$$

donde,

$$\alpha = \frac{C_p}{C_c}$$

es la razón entre el costo de una intervención preventiva y de una intervención correctiva.

Si la razón  $\frac{C_P}{C_C}$  es mayor a 1, entonces es mejor realizar un mantenimiento correctivo, en caso contrario la mejor política es la de mantenimiento preventivo.

**Ejemplo**

Consideremos el caso de una distribución de Weibull de tres parámetros. En este caso es conveniente hacer el siguiente cambio de variables:

$$x = \frac{t - \gamma}{\eta}$$

Donde tenemos que,

$$R(x) = e^{-x^\beta}$$

$$\int_0^\infty R(x)dx = \Gamma(1 + 1/\beta)$$

$$\int_0^{x_p} R(x)dx = \int_0^{x_p} e^{-x^\beta} dx$$

reemplazando,

$$\frac{C_P}{C_C} = \left( e^{-x_p^\beta} (\alpha - 1) + 1 \right) \times \frac{\Gamma(1 + 1/\beta)}{\int_0^{x_p} e^{-x^\beta} dx}$$

La integral  $\int_0^{x_p} e^{-x^\beta} dx$  se puede calcular por medio de la siguiente expresión:

$$\int_0^{x_p} e^{-x^\beta} = \Gamma(1 + 1/\beta)\Gamma(x_p^\beta, 1/\beta)$$

La función  $\Gamma$ , viene dada por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$$

Se puede evaluar en Excel con la siguiente expresión: =EXP(GAMMA.LN( $\alpha$ ))

La función  $\Gamma(x, \alpha)$ , es la función Gamma incompleta que viene dada por:

$$\Gamma(x, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1} dt$$

La función Gamma incompleta se puede evaluar en Excel con la siguiente expresión: =DISTR.GAMMA(x; $\alpha$ ;1;VERDADERO)

Por lo tanto  $\frac{C_P}{C_C}$  para una distribución Weibull viene dado por:

$$\frac{C_P}{C_C} = \frac{e^{-x_p^\beta} (\alpha - 1) + 1}{\Gamma(x_p^\beta, 1/\beta)}$$

Como ejemplo, la figura 4.5 muestra un estudio de la curvas  $\frac{C_P}{C_C}$  para distintos valores de  $x_p$  y  $\alpha$ , cuando  $\beta$  es igual a 3. En este caso, para valores de  $\alpha$  menor a 0.7 conviene hacer mantenimiento preventivo. El periodo óptimo entre intervenciones preventivas es el mínimo de la curva  $\frac{C_P}{C_C}$ , al hacer el cambio de variables,

$$t_p = \eta x_p + \gamma$$

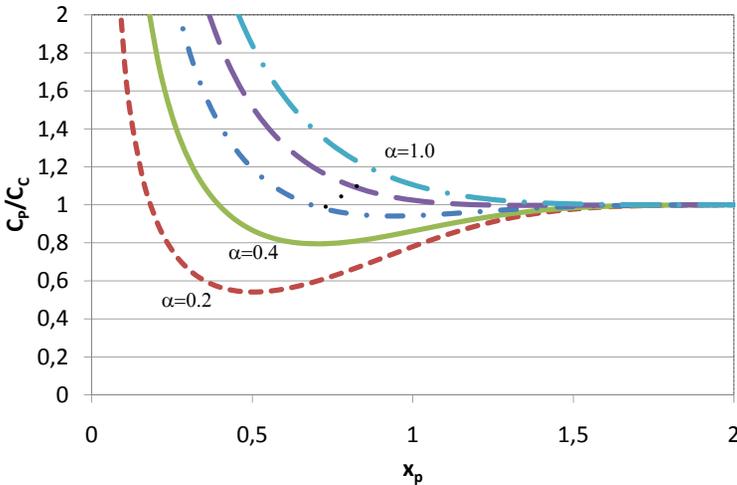


Figura 4.5:  $\frac{C_P}{C_C}$  para distintos valores de  $x_p$  y  $\alpha$ ,  $\beta = 3$

### 4.3.2. Mantenimiento predictivo vs correctivo

El mantenimiento predictivo ó sintomático trata de evitar fallas repentinas midiendo los síntomas observables sobre el componente. Si se usa la hipótesis de que el seguimiento de las variables de condición es perfecto, se pueden evitar completamente las fallas del componente.

Si utilizamos mantenimiento sintomático, el tiempo entre intervenciones de mantención preventiva es aproximadamente el tiempo medio entre fallas MTBF. Definiendo por  $C_s$  como el costo del mantenimiento sintomático durante un ciclo

de duración MTBF, el costo por unidad de tiempo del mantenimiento sintomático es:

$$C_S = \int_0^\infty R(t) dt$$

La razón entre el costo total esperado de mantenimiento sintomático por unidad de tiempo  $C_S$  y el costo global de mantenimiento correctivo  $C_C$  está dada por:

$$\frac{C_S}{C_C} = \frac{C_s}{C_c}$$

Si esta fracción es menor que uno entonces conviene realizar mantenimiento sintomático.

La figura a continuación muestra el procedimiento a seguir para seleccionar una estrategia de mantenimiento.

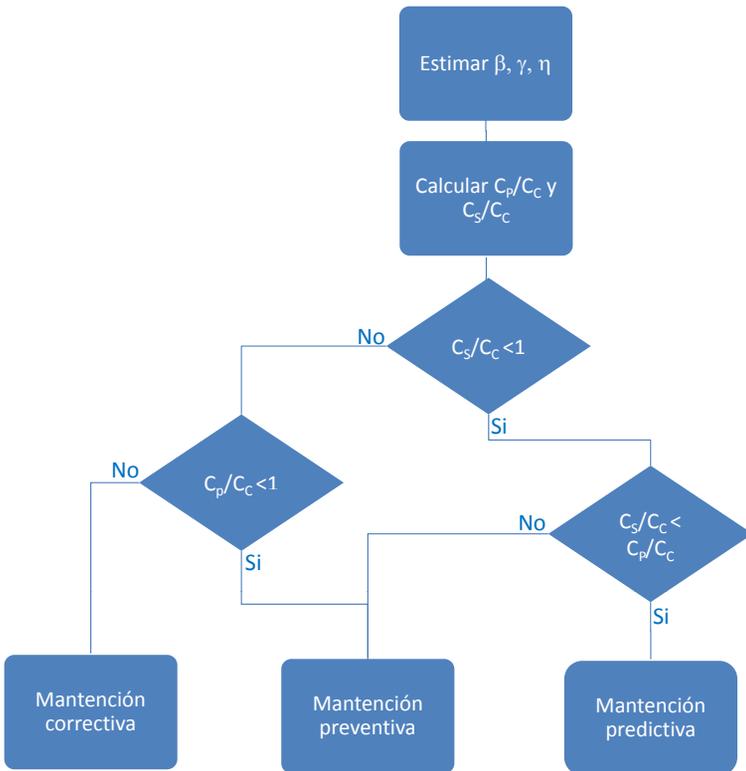


Figura 4.6: Selección de la estrategia de mantenimiento

### 4.4. Mantenimiento preventivo imperfecto y reemplazo

Los modelos de las secciones anteriores asumen que mantenimiento preventivo es perfecto, es decir, el componente queda como nuevo luego de una intervención. Lo que no es realista, lo que sucede en realidad es que el componente mejora luego de una intervención preventiva pero no queda como nuevo.

El presente modelo considera tres posibles escenarios: el componente es reemplazado (queda *como nuevo*), se realiza mantención preventiva quedando en algún punto entre *como nuevo* y *tan bueno como antes*, el componente es reparado (queda *tan bueno como antes* de la falla). La figura 4.7 ilustra los distintos escenarios. El objetivo del modelo es determinar la duración óptima entre mantenimientos y reemplazo del equipo.

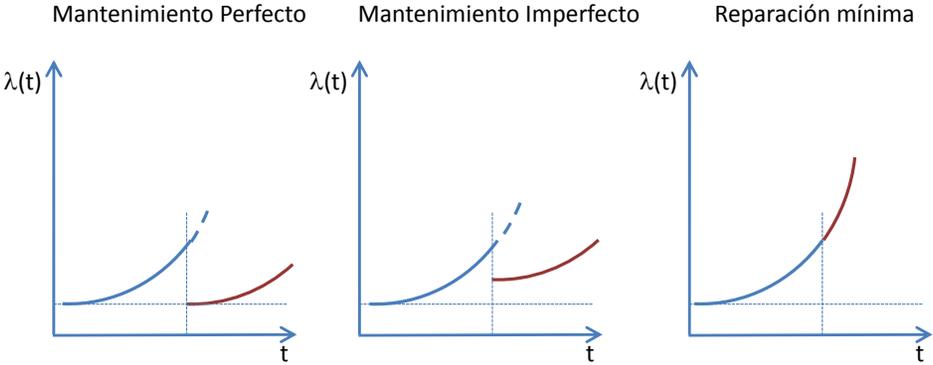


Figura 4.7:

#### Construcción del Modelo

1. El componente está sujeto a tres tipos de acciones: reparación mínima, mantenimiento imperfecto o reemplazo, con diferentes costos.
2. El sistema es reparado cuando falla.
3. Luego de un periodo de tiempo el componente es reemplazado.
4. El componente recibe  $n - 1$  mantenimientos durante su vida útil. El periodo entre estos mantenimientos preventivos  $T_s$  es constante.
5. Una mantención preventiva mejora al componente en términos de la tasa de falla, una reparación sólo deja al componente en su estado justo antes de la falla.

6. El tiempo gastado en mantenimientos y reparaciones es despreciable.
7. El costo de una reparación es  $C_c$ .
8. El costo de un mantenimiento preventivo es  $C_p$ .
9. El costo de un reemplazo es  $C_r$ .
10. La tasa de fallas del componente si no se interviene es  $\lambda(t)$ .
11. El objetivo es determinar el número de mantenimientos  $n$  y su periodo  $T_s$  que minimicen el costo total esperado por unidad de tiempo.

La figura 4.8 ilustra la evolución de la tasa de fallas si se realizan mantenimiento preventivos periódicos. Definimos  $\lambda_{k-1}(t)$  la tasa de fallas justo antes de un mantenimiento y  $\lambda_k(t)$  la tasa de fallas inmediatamente después de un mantenimiento y  $p$  un factor de mejora de la tasa de falla. La tasa de fallas  $\lambda_k(t)$  se puede definir como una tasa mejorada por el factor  $p$ ,

$$\lambda_k(t) = p\lambda_{k-1}(t - T_s) + (1 - p)\lambda_{k-1}(t)$$

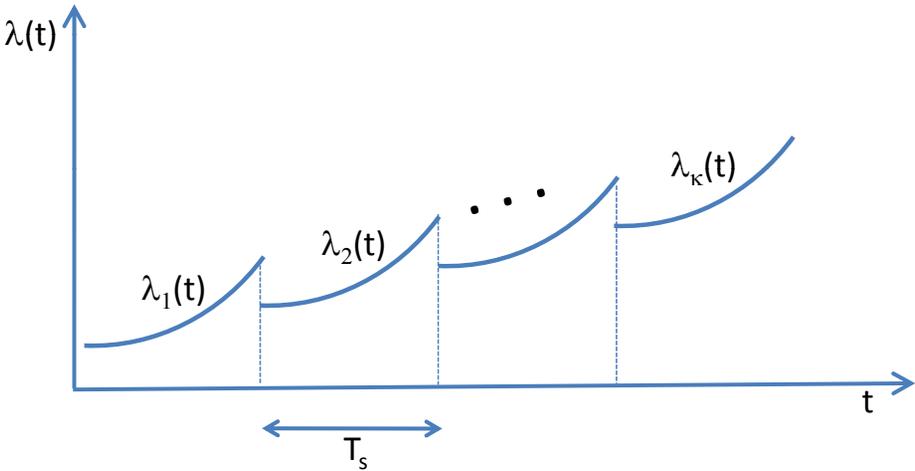


Figura 4.8:

Notar una reparación mínima es un caso especial con  $p = 0$ :

$$\lambda_k(t) = \lambda_{k-1}(t)$$

la tasa de fallas es la misma que justo antes de la falla.

Si el factor de mejora es 1,

$$\lambda_k(t) = \lambda_{k-1}(t - T_s)$$

el mantenimiento restaura la condición a la del periodo anterior, lo que equivale a un mantenimiento perfecto.

La figura 4.9 muestra un ciclo de vida del equipo. Definiendo por  $\hat{\lambda}(t)$  como la tasa de fallas esperada, el numero de fallas esperado en un ciclo se puede calcular como:

$$\hat{H}(nT_s) = \int_0^{nT_s} \hat{\lambda}(t) dt$$

El costo total esperado por unidad de tiempo es:

$$\begin{aligned} C(n, T_s) &= \text{Costo de los mantenimientos preventivos por unidad de tiempo} \\ &\quad + \text{Costo de las reparaciones por unidad de tiempo} \\ &\quad + \text{Costo de un reemplazo por unidad de tiempo} \\ &= \frac{C_p(n - 1) + C_c \hat{H}(nT_s) + C_r}{nT_s} \end{aligned}$$

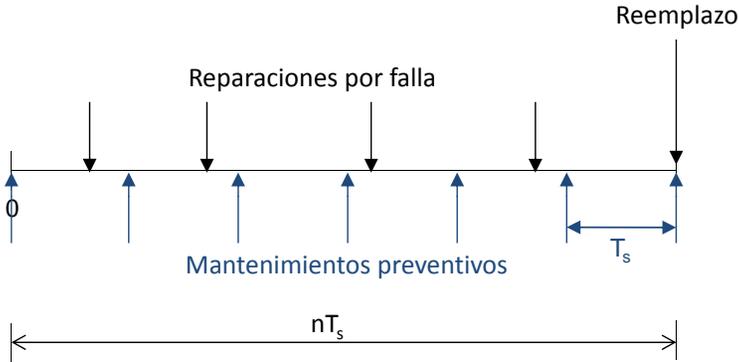


Figura 4.9:

Para calcular el numero esperado de fallas, tenemos que analizar primero en cada periodo. El numero de fallas esperado en un periodo  $k$  es:

$$H_k = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \lambda_k(kT_s + t) dt$$

De donde, el numero de fallas esperado en el ciclo completo es,

$$\hat{H}(nT_s) = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \lambda_k(kT_s + t) dt$$

Ahora es necesario determinar una expresión para  $\lambda_k(t)$ . Definiendo  $q = 1 - p$ , tenemos que,

$$\lambda_k(kT_s + t) = p\lambda_{k-1}((k - 1)T_s + t) + q\lambda_{k-1}(kT_s + t)$$

Procediendo iterativamente:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t + T_s) &= p\lambda(t) + q\lambda(t + T_s) \\ \lambda_2(t + 2T_s) &= p\lambda_1(t + T_s) + q\lambda_1(t + 2T_s) \\ &= p^2\lambda(t) + 2pq\lambda(t + T_s) + q^2\lambda(t + 2T_s) \\ \lambda_3(t) &= p^3\lambda(t) + 3p^2q\lambda(t + T_s) + 3pq^2\lambda(t + 2T_s) + q^3\lambda(t + 3T_s) \\ &\vdots = \vdots \\ \lambda_k(t) &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} p^{k-i} q^i \lambda(t + iT_s) \end{aligned}$$

Se puede demostrar que el numero esperado de fallas viene dado por:

$$\hat{H}(nT_s) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} q^{i-1} H(iT_s)$$

donde,

$$H(iT_s) = \int_0^{iT_s} \lambda(t) dt$$

Por lo tanto el costo global por unidad de tiempo es:

$$C(n, T_s) = \frac{C_p(n - 1) + C_c \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} q^{i-1} H(iT_s) + C_r}{nT_s}$$

**Caso Weibull**

Tenemos,

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

$$H(iT_s) = \int_0^{iT_s} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} dt$$

$$= \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \Big|_0^{iT_s}$$

$$= i^{\beta} \left(\frac{T_s}{\eta}\right)^{\beta}$$

de donde,

$$C(n, T_s) = \frac{C_p(n-1) + C_c \left(\frac{T_s}{\eta}\right)^{\beta} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} q^{i-1} i^{\beta} + C_r}{nT_s}$$

Se puede probar que  $C(n, T_s)$  es minimizado cuando  $n$  minimiza:

$$Q(n) = \frac{(C_r/C_p + n - 1)^{\beta-1} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} q^{i-1} i^{\beta}}{n^{\beta}}$$

Conocido  $n^*$ ,

$$T_s^* = \eta \sqrt{\beta} \sqrt{\frac{C_r + C_p(n^* - 1)}{(\beta - 1)C_c \sum_{i=0}^{n^*} \binom{n^*}{i} p^{n^*-i} q^{i-1} i^{\beta}}}$$

### Casos Especiales

$n \geq \beta, \beta = 1$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} q^{i-1} i^{\beta} = n$$

$n \geq \beta, \beta = 2$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} q^{i-1} i^{\beta} = n(nq + p)$$

$$n \geq \beta, \beta = 3$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} q^{i-1} i^\beta = n(n-1)(n-2)q^2 + 3n(n-1)q + n$$

$$p = 1$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} q^{i-1} i^\beta = n$$

por lo tanto,

$$C(n, T_s) = \frac{C_p(n-1) + C_c n \left(\frac{T_s}{\eta}\right)^\beta + C_r}{nT_s}$$

$$p = 0$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} q^{i-1} i^\beta = n^\beta$$

por lo tanto,

$$C(n, T_s) = \frac{C_p(n-1) + C_c n^\beta \left(\frac{T_s}{\eta}\right)^\beta + C_r}{nT_s}$$

### Ejemplo

Consideremos un componente con las siguientes características:

- $\eta = 100$
- $\beta = 2$
- $C_r = 200$  kUS/reemplazo
- $C_c = 2$  kUS/reparación
- $C_p = 8$  kUS/intervención

La tabla a continuación muestra los valores de  $n^*$  y  $T_s^*$  para distintos valores de  $p$ .

$p$	$n^*$	$T_s^*$	$n^*T_s^*$
0.1	1.6	632.5	1032.8
0.2	2.5	447.2	1095.4
0.3	3.2	365.1	1171.1
0.4	4.0	316.2	1264.9
0.5	4.9	282.8	1385.6
0.6	6.0	258.2	1549.2
0.7	7.5	239.0	1788.9
0.8	9.8	223.6	2190.9
0.9	14.7	210.8	3098.4
0.99	48.7	201.0	9798.0

Tabla 4.1:

# Capítulo 5

## Inspecciones

Los modelos presentados en éste capítulo buscan definir horarios óptimos de inspecciones, esto es los tiempos en los que se deben realizar inspecciones de un componente.

El objetivo de una inspección es determinar el estado del componente y realizar acciones preventivas para evitar una falla. Para determinar el estado de un componente se utilizan indicadores como, medidas de esfuerzos, desgaste, calidad de los productos, entre otros. Cuando se debe realizar una inspección depende de los costos de ésta y de sus beneficios, como detectar y corregir un defecto menor antes que ocurra una avería grave.

### 5.1. Frecuencia de inspecciones óptima: Minimización de los costos

Consideremos un componente sujetos a fallas, cuando se produce una falla se requieren insumos y horas hombre para repararla. También, mientras el componente esta siendo reparado hay una perdida de producción. Para reducir las fallas, se pueden realizar inspecciones y reparaciones menores. Estas inspecciones cuestan dinero en términos de materiales y perdidas de producción debido a paradas programadas.

Lo que se busca es determinar una política óptima de inspecciones que minimice el costo total esperado.

#### Construcción del modelo

1. La política de inspecciones es realizar  $n$  inspecciones por unidad de tiempo. La duración de una inspección sigue una distribución exponencial con media  $1/i$
2. El componente falla con una tasa de fallas constante en el tiempo  $\lambda(n)$ . Se asume que la frecuencia de las inspecciones afecta la tasa de fallas del componente. Mientras mayor es la tasa de inspecciones un mayor numero de fallas serán evitadas y por lo tanto la tasa de fallas disminuye.
3. Si se produce una falla el tiempo de reparación sigue una distribución exponencial con media  $1/\mu$ .
4. El valor del producto producido ininterrumpidamente por unidad de tiempo es  $V$  (por ejemplo, el precio de venta del producto menos el costo de producción). Esto es,  $V$  es la ganancia si no hay detenciones del equipo.
5. El costo promedio de una inspección por unidad de tiempo es  $I$ .
6. El costo promedio de una reparación por unidad de tiempo es  $R$ .
7. El objetivo es determinar la frecuencia óptima de inspecciones  $n$  que minimice el costo total esperado.

El costo total esperado por unidad de tiempo viene dado por:

$$\begin{aligned}
 C(n) = & \text{Pérdidas de producción debido a reparaciones por unidad de tiempo} \\
 & + \text{Pérdidas de producción debido a inspecciones por unidad de tiempo} \\
 & + \text{Costo de reparaciones por unidad de tiempo} \\
 & + \text{Costo de inspecciones por unidad de tiempo}
 \end{aligned}$$

*Pérdidas de producción debido a reparaciones por unidad de tiempo*

$$\begin{aligned}
 = & \text{Ganancia de producción ininterrumpida por unidad de tiempo} \\
 & \times \text{Número de reparaciones por unidad de tiempo} \\
 & \times \text{Tiempo medio para reparar} \\
 = & V\lambda(n)/\mu
 \end{aligned}$$

Notar que  $\lambda(n)/\mu$  es la proporción de tiempo que el componente está siendo reparado.

*Pérdidas de producción debido a inspecciones por unidad de tiempo*

$$\begin{aligned}
 &= \text{Ganancia de producción ininterrumpida por unidad de tiempo} \\
 &\quad \times \text{Número de inspecciones por unidad de tiempo} \\
 &\quad \times \text{Tiempo medio para inspeccionar} \\
 &= Vn/i
 \end{aligned}$$

*Costo de reparaciones por unidad de tiempo*

$$\begin{aligned}
 &= \text{Costo de reparar por unidad de tiempo} \\
 &\quad \times \text{Número de reparaciones por unidad de tiempo} \\
 &\quad \times \text{Tiempo medio para reparar} \\
 &= R\lambda(n)/\mu
 \end{aligned}$$

*Costo de inspecciones por unidad de tiempo*

$$\begin{aligned}
 &= \text{Costo de inspeccionar por unidad de tiempo} \\
 &\quad \times \text{Número de inspecciones por unidad de tiempo} \\
 &\quad \times \text{Tiempo medio para inspeccionar} \\
 &= In/i
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 C(n) &= \frac{V\lambda(n)}{\mu} + \frac{Vn}{i} + \frac{R\lambda(n)}{\mu} + \frac{In}{i} \\
 &= \frac{\lambda(n)}{\mu} (V + R) + \frac{n}{i} (V + I)
 \end{aligned}$$

Este modelo relaciona la frecuencia de inspecciones  $n$  con el costo total  $C(n)$ . El costo total mínimo se obtiene de  $C'(n) = 0$ ,

$$\frac{\partial C(n)}{\partial n} = \frac{\lambda'(n)}{\mu} (V + R) + \frac{1}{i} (V + I) = 0 \tag{5.1}$$

$$\implies \lambda'(n) = -\frac{\mu}{i} \left( \frac{V + I}{V + R} \right) \tag{5.2}$$

Si se conocen los valores de  $\mu$ ,  $i$ ,  $V$ ,  $R$ ,  $I$  y la forma de  $\lambda(n)$ , la frecuencia óptima  $n^*$  es la que hace que el lado derecho e izquierdo de la ecuación anterior sea el mismo.

**Primer modelo**

Se puede asumir que la tasa de fallas varía linealmente con el número de inspecciones,

$$\lambda(n) = \frac{k}{n}$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n} = -\frac{k}{n^2}$$

Sustituyendo, se obtiene que la frecuencia óptima de inspecciones es:

$$n = \sqrt{\frac{ik}{\mu} \left( \frac{V + R}{V + I} \right)}$$

**Segundo modelo**

El primer modelo no es muy bueno, ya que cuando la frecuencia de inspecciones tiende a 0, la tasa de fallas tiende a infinito. Un modelo más realista es el siguiente:

$$\lambda(n) = \frac{k_1}{n + k_2}$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n} = -\frac{k_1}{(n + k_2)^2}$$

Sustituyendo, se obtiene que la frecuencia óptima de inspecciones es:

$$n = \sqrt{\frac{ik_1}{\mu} \left( \frac{V + R}{V + I} \right)} - k_2$$

## 5.2. Frecuencia de inspecciones óptima con tasa de fallas variable en el tiempo: Minimización de los costos

Este modelo es el mismo de la sección anterior, excepto que ahora consideramos una tasa de fallas variable en el tiempo  $\lambda(n, t)$ .

El modelo considera un horizonte de estudio  $T$ . Este horizonte puede el tiempo entre mantenciones preventivas o reemplazo del componente. Se asume que durante el periodo de tiempo  $T$  cualquier intervención o reparación no afecta la edad del componente, y por lo tanto no afecta su tasa de fallas.

Dado que la tasa de fallas varía en el tiempo, el numero de fallas esperados en el periodo  $T$  es de:

$$H(T) = \int_0^T \lambda(n, t) dt$$

El numero de fallas esperados en el periodo  $T$  por unidad de tiempo es  $\bar{\lambda}(T, n) = H(T)/T$ .

El costo total por unidad de tiempo,

$$\begin{aligned} C(n) &= \frac{V\bar{\lambda}(T, n)}{\mu} + \frac{Vn}{i} + \frac{R\bar{\lambda}(T, n)}{\mu} + \frac{In}{i} \\ &= \frac{\bar{\lambda}(T, n)}{\mu} (V + R) + \frac{n}{i} (V + I) \end{aligned}$$

La frecuencia óptima de inspecciones se obtiene de la solución de,

$$\frac{\partial \bar{\lambda}(T, n)}{\partial n} = -\frac{\mu}{i} \left( \frac{V + I}{V + R} \right)$$

**Ejemplo: Weibull**

Consideremos una distribución de Weibull de dos parámetros, con  $\beta$  independiente de  $n$ , mientras que el parámetro  $\eta$  depende de  $n$  según,

$$\eta(n) = \alpha n$$

La tasa de fallas viene dada entonces por:

$$\lambda(n, t) = \frac{\beta}{\alpha n} \left(\frac{t}{\alpha n}\right)^{\beta-1}$$

De donde se obtiene que,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(T, n) &= \frac{\int_0^T \lambda(n, t) dt}{T} \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{T}{\alpha n}\right)^\beta \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\lambda}(T, n)}{\partial n} = -\frac{\beta}{Tn} \left(\frac{T}{\alpha n}\right)^\beta$$

reemplazando,

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{Tn} \left(\frac{T}{\alpha n}\right)^\beta &= -\frac{\mu}{i} \left(\frac{V+I}{V+R}\right) \\ \implies n^* &= \left(\frac{\beta}{T} \left(\frac{T}{\alpha}\right)^\beta \frac{i}{\mu} \left(\frac{V+R}{V+I}\right)\right)^{\frac{1}{\beta+1}} \end{aligned}$$

### 5.3. Frecuencia de inspecciones óptima: Disponibilidad máxima

El problema es similar al de la sección anterior. El objetivo en este caso es establecer una política de inspecciones que minimice el tiempo que el componente se encuentra detenido por falla o inspecciones, en vez de minimizar el costo total.

#### Construcción del modelo

1. La política de inspecciones es realizar  $n$  inspecciones por unidad de tiempo. La duración de una inspección sigue una distribución exponencial con media  $1/i$
2. El componente falla con una tasa de fallas  $\lambda(n)$ . Se asume que la frecuencia de las inspecciones afecta la tasa de fallas del componente. Mientras mayor es la tasa de inspecciones un mayor numero de fallas serán evitadas y por lo tanto la tasa de fallas disminuye.
3. Si se produce una falla el tiempo de reparación sigue una distribución exponencial con media  $1/\mu$ .

El objetivo es determinar la frecuencia de inspecciones  $n^*$  que maximice la disponibilidad del equipo.

El tiempo que el componente se encuentra detenido por unidad de tiempo es función de la frecuencia de inspecciones  $n$  y viene dado por:

$$\begin{aligned}
 D(n) &= \text{Tiempo detenido debido a reparaciones por unidad de tiempo} \\
 &\quad + \text{Tiempo detenido debido a inspecciones por unidad de tiempo} \\
 &= \frac{\lambda(n)}{\mu} + \frac{n}{i}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la disponibilidad del componente es,

$$A(n) = 1 - \left( \frac{\lambda(n)}{\mu} + \frac{n}{i} \right)$$

**Modelo 1**

Asumiendo que la tasa de fallas varía inversamente con el número de inspecciones, se tiene que:

$$\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n} = -\frac{k}{n^2}$$

Derivando la disponibilidad e igualando a 0,

$$\frac{\partial A(n)}{\partial n} = \frac{k}{\mu n^2} - \frac{1}{i} = 0$$

Por lo tanto,

$$n^* = \sqrt{\frac{ki}{\mu}}$$

## Modelo 2

En este caso,

$$\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n} = -\frac{k_1}{(n + k_2)^2}$$

Derivando la disponibilidad e igualando a 0,

$$\frac{\partial A(n)}{\partial n} = \frac{k_1}{\mu(n + k_2)^2} - \frac{1}{i} = 0$$

Por lo tanto,

$$n^* = \sqrt{\frac{k_1 i}{\mu}} - k_2$$

## 5.4. Frecuencia óptima de inspecciones para maximizar la disponibilidad de equipos de emergencia

Equipos como extintores de incendios y armas militares se mantienen almacenados para ser utilizados en una emergencia. Los equipos se pueden deteriorar mientras están almacenados y existe el riesgo de que no funcionen en el momento que se necesiten. Para reducir la posibilidad que el equipo no este operativo cuando sea necesario, se pueden realizar inspecciones y si se encuentran fallas estas pueden ser reparadas o se puede reemplazar el equipo. El problema es determinar el intervalo óptimo entre inspecciones para maximizar la disponibilidad del equipo.

### Construcción del Modelo

1.  $f(t)$  es la función densidad de probabilidad de falla del equipo.
2.  $T_i$  es el tiempo requerido para realizar una inspección. Luego de la inspección si no se encuentran defectos se asume que el equipo queda como “nuevo”.
3.  $T_r$  es el tiempo requerido para realizar una reparación o reemplazo. Luego de la reparación se asume que el equipo queda como “nuevo”.
4. El objetivo es determinar el intervalo  $t_r$  entre inspecciones para maximizar la disponibilidad del equipo.

La siguiente figura ilustra los dos ciclos posibles de operación.

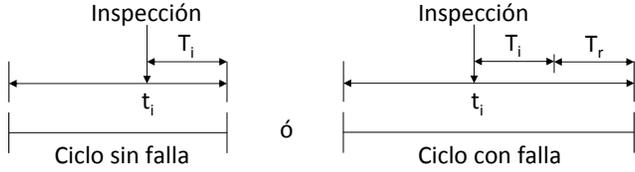


Figura 5.1:

La disponibilidad por unidad de tiempo es una función del intervalo entre inspecciones  $t_i$ :

$$A(t_i) = \frac{\text{Disponibilidad esperada por ciclo}}{\text{Largo esperado del ciclo}}$$

La disponibilidad esperada por ciclo:

- = Disponibilidad de un ciclo sin falla
- × Probabilidad de un ciclo sin falla
- + Disponibilidad de un ciclo con falla
- × Probabilidad de un ciclo con falla

La disponibilidad de un ciclo sin falla equivale a  $t_i$ . Si se detecta una falla durante la inspección la disponibilidad se puede definir como el tiempo medio de falla del equipo en el periodo  $(0, t_p)$  que se determino en la sección 4.2 como  $\int_0^{t_i} t f(t) dt / [1 - R(t_i)]$ .

Por lo tanto la *disponibilidad esperada por ciclo* es,

$$\begin{aligned} & t_i R(t_i) + \frac{\int_0^{t_i} t f(t) dt}{[1 - R(t_i)]} [1 - R(t_i)] \\ = & t_i R(t_i) + \int_0^{t_i} t f(t) dt \\ = & \int_0^{t_i} R(t) dt \end{aligned}$$

El *largo esperado del ciclo* es:

$$(t_i + T_i)R(t_i) + (t_i + T_i + T_r) [1 - R(t_i)]$$

Por lo tanto,

$$A(t_i) = \frac{\int_0^{t_i} R(t)dt}{t_i + T_i + T_r [1 - R(t_i)]}$$

# Capítulo 6

## Gestión de repuestos

En este capítulo veremos modelos para optimizar la gestión de repuestos en una bodega, es decir, definir tiempos entre pedidos, niveles de seguridad y alarma, para minimizar los costos esperados.

En un caso ideal se tendría una bodega con todos los repuestos necesarios disponibles en caso de falla de un componente. Si los repuestos están disponibles en bodega se evitan detenciones innecesarias de los equipos por tiempos de entrega de los repuestos. Por otro lado, el tener almacenados los repuestos tiene costos asociados como son los costos de almacenamiento, costo de oportunidad del capital detenido, etc. Los modelos a continuación buscan definir los tiempos entre pedidos de repuestos y los niveles mínimos en bodega, para minimizar los costos esperados.

### 6.1. Minimización de los costos desde el punto de vista de la bodega

#### Construcción del modelo

1.  $\lambda(t)$  es la tasa de fallas del componente en cuestión. Esto equivale a la demanda de repuestos en bodega.
2.  $q$  es el número de repuestos ordenados por compra.
3.  $p_u$  es el precio unitario.
4.  $\tau$  es la tasa de descuento de referencia.

5.  $C_{ad}$  es el costo de adquisición por pedido (recepción, control de calidad, flete, contabilidad, etc)
6.  $T$  es el periodo entre pedidos

Consideremos el ciclo de operación de la bodega mostrado en la figura 6.1: Llega un pedido de  $q$  repuestos, estos van disminuyendo a una tasa de  $\lambda$  hasta llegar a 0 en el tiempo  $T$  donde se realiza un nuevo pedido. De esta relación se obtiene que:

$$\lambda = \frac{q}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{q}{\lambda}$$

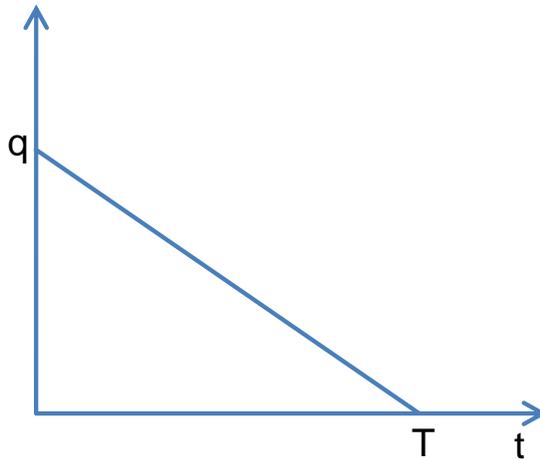


Figura 6.1:

El *costo total esperado por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 C(q) = & \text{Costo de almacenamiento por unidad de tiempo} \\
 & + \text{Costo de los repuestos por unidad de tiempo} \\
 & + \text{Costo de adquisición por unidad de tiempo}
 \end{aligned}$$

El *Costo de almacenamiento por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 &= \text{Numero promedio de repuestos en bodega} \\
 &\quad \times \text{Costo de los repuestos} \\
 &\quad \times \text{Tasa de descuento por unidad de tiempo} \\
 &= \frac{1}{2}qp_u\tau
 \end{aligned}$$

El *Costo de los repuestos por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 &= \text{Numero de repuestos} \\
 &\quad \times \text{Precio de los repuestos} \\
 &\quad \div \text{Periodo entre compras} \\
 &= \frac{p_uq}{T} = p_u\lambda
 \end{aligned}$$

El *Costo de adquisición por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 &= \text{Costo de adquisición} \\
 &\quad \div \text{Periodo entre compras} \\
 &= \frac{C_{ad}}{T} = C_{ad}\frac{\lambda}{q}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el costo total esperado es:

$$C(q) = p_u\lambda + C_{ad}\frac{\lambda}{q} + \frac{1}{2}qp_u\tau$$

Derivando e igualando a cero se obtiene el tamaño óptimo de los pedidos:

$$q_w = \sqrt{\frac{2\lambda C_{ad}}{p_u\tau}}, \quad T_w = \frac{q^*}{\lambda}$$

**Demora en pedidos**

En general, una vez que se realiza un pedido la entrega no es inmediata, sino que hay un tiempo de entrega  $T_d$ . Considerando esto el pedido se debe realizar con un tiempo  $T_d$  antes que se acaben los repuestos.

Durante el tiempo  $T_d$  se consumen  $\lambda T_d$  repuestos. Por lo tanto, ahora los pedidos se deben realizar una vez que se llegue al nivel de alarma  $\lambda T_d$ , como se ilustra en la siguiente figura.

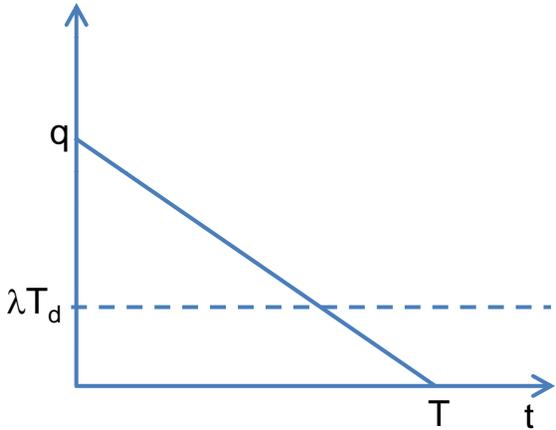


Figura 6.2:

Se puede definir un nivel de alarma un poco mayor y así asegurar que no se acaben los repuestos en bodega. Si definimos un nuevo nivel de alarma  $q_a$ , entonces la probabilidad que el consumo sea menor que el nivel de alarma en el periodo  $T_d$  es:

$$P(\text{consumo} \leq q_a) = \sum_{i=0}^{q_a} \frac{e^{-\lambda T_d} (\lambda T_d)^i}{i!}$$

esta probabilidad se puede calcular en excel como: =POISSON( $q_a$ ;  $\lambda T_d$ ; VERDADERO)

## 6.2. Minimización del costo global con costo de falla

En esta sección vamos a estudiar el caso en que se permite un periodo de tiempo que la bodega está sin repuestos en stock. Si llegase a haber demanda de repuestos durante este periodo, se va a incurrir en un costo de falla por la detención de un equipo en espera de los repuestos.

El objetivo es determinar el tamaño óptimo de los pedidos y la fracción del tiempo que la bodega esta sin repuestos.

## Construcción del modelo

1. Definimos por  $c_f$  al costo de falla incurrido por la falta de un repuesto en bodega por unidad de tiempo. Este costo está compuesto principalmente por las pérdidas de producción.
2. El parámetro  $\alpha$  con  $0 \leq \alpha \leq 1$  mide la proporción del tiempo entre pedidos que la bodega tiene repuestos disponibles. Es decir, durante el periodo  $\alpha T$  hubo inventario en la bodega, mientras que en el periodo  $(1 - \alpha)T$  no habían repuestos disponibles. Se asume que los repuestos solicitados en el periodo  $(1 - \alpha)T$  son consumidos tan pronto llegan en el instante  $T$ .
3.  $\lambda(t)$  es la tasa de fallas del componente en cuestión. Esto equivale a la demanda de repuestos en bodega.
4.  $q$  es el número de repuestos ordenados por compra.
5.  $p_u$  es el precio unitario.
6.  $\tau$  es la tasa de descuento de referencia.
7.  $C_{ad}$  es el costo de adquisición por pedido (recepción, control de calidad, flete, contabilidad, etc)
8.  $T$  es el periodo entre pedidos

Consideremos el ciclo de operación de la bodega mostrado en la figura 6.4: Llega un pedido de  $q$  repuestos, estos van disminuyendo a una tasa de  $\lambda$  hasta llegar a 0 en el tiempo  $\alpha T$ . La bodega se encuentra sin inventario desde el tiempo  $\alpha T$  hasta  $T$  donde llega el nuevo pedido de  $q$  repuestos. Sabemos que:

$$\lambda = \frac{q}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{q}{\lambda}$$

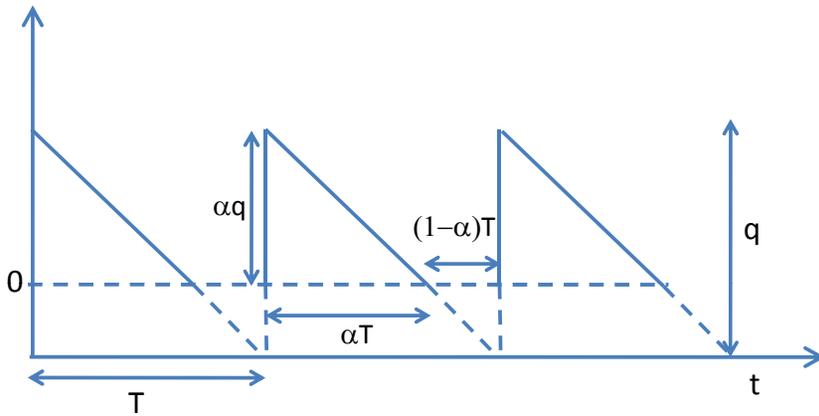


Figura 6.3:

El *costo total esperado por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 C(q, \alpha) = & \text{Costo de almacenamiento por unidad de tiempo} \\
 & + \text{Costo de los repuestos por unidad de tiempo} \\
 & + \text{Costo de adquisición por unidad de tiempo} \\
 & + \text{Costo por pérdidas de producción por unidad de tiempo}
 \end{aligned}$$

El *Costo de almacenamiento por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 = & \text{Numero promedio de repuestos en bodega en el periodo } T \\
 & \times \text{Costo de los repuestos} \\
 & \times \text{Tasa de descuento por unidad de tiempo} \\
 = & \frac{1}{2} \alpha^2 q p_u \tau
 \end{aligned}$$

**Nota:** el numero promedio de repuestos en el periodo  $T$  es  $\frac{1/2 \alpha T \times \alpha q}{T} = \frac{1}{2} \alpha^2 q$

El *Costo de los repuestos por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 &= \text{Numero de repuestos} \\
 &\quad \times \text{Precio de los repuestos} \\
 &\quad \div \text{Periodo entre compras} \\
 &= \frac{p_u q}{T} = p_u \lambda
 \end{aligned}$$

El *Costo de adquisición por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 &= \text{Costo de adquisición} \\
 &\quad \div \text{Periodo entre compras} \\
 &= \frac{C_{ad}}{T} = C_{ad} \frac{\lambda}{q}
 \end{aligned}$$

El *Costo por pérdidas de producción por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 &= \text{Deficit promedio de repuestos} \\
 &\quad \times \text{Costo de falla por repuesto por unidad de tiempo} \\
 &= \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 q c_f
 \end{aligned}$$

**Nota:** el deficit promedio de repuestos en el periodo  $T$  es  $\frac{1/2(1-\alpha)T \times (1-\alpha)q}{T} = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 q$

Por lo tanto, el costo total esperado por unidad de tiempo es:

$$C(q, \alpha) = p_u \lambda + C_{ad} \frac{\lambda}{q} + \frac{1}{2} \alpha^2 q p_u \tau + \frac{1}{2} (1 - \alpha)^2 q c_f$$

Derivando con respecto a  $\alpha$  e igualando a 0 obtenemos que:

$$\alpha^* = \frac{c_f}{\tau p_u + c_f}$$

Derivando con respecto a  $q$  e igualando a 0:

$$q^2 = \frac{2\lambda C_{ad}}{(1 - \alpha)^2 c_f + \alpha^2 p_u \tau}$$

Reemplazando  $\alpha^*$  se obtiene que:

$$q^* = \sqrt{\frac{2\lambda C_{ad}}{\alpha^* p_u \tau}}$$

### 6.2.1. Repuestos no consumidos al llegar

Consideremos el caso mostrado en la figura ???. Se hace un pedido de tamaño  $q$ , este inventario es consumido en un periodo  $T$ . Y se permite un periodo  $\alpha T$  donde no hay repuestos en bodega. Durante este intervalo sin repuestos la producción es detenida y por lo tanto no hay demanda de repuestos. Sabemos que,

$$\lambda = \frac{q}{T}$$

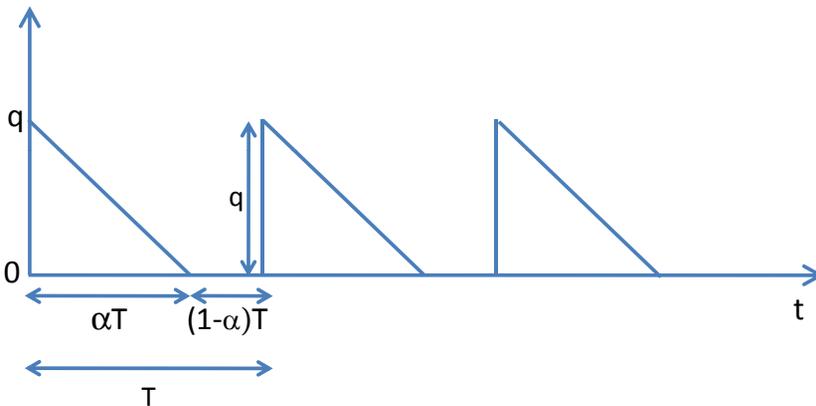


Figura 6.4:

#### Construcción del modelo

1. Definimos por  $c_f$  al costo de falla incurrido por la detención de la producción por unidad de tiempo.
2.  $\alpha T$  es el periodo de tiempo que la bodega no tiene repuestos disponibles.
3.  $\lambda(t)$  es la tasa de fallas del componente en cuestión. Esto equivale a la demanda de repuestos en bodega.
4.  $q$  es el numero de repuestos ordenados por compra.

5.  $p_u$  es el precio unitario.
6.  $\tau$  es la tasa de descuento de referencia.
7.  $C_{ad}$  es el costo de adquisición por pedido (recepción, control de calidad, flete, contabilidad, etc)
8.  $T$  es el periodo entre pedidos

El *costo total esperado por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 C(q, \alpha) = & \text{Costo de almacenamiento por unidad de tiempo} \\
 & + \text{Costo de los repuestos por unidad de tiempo} \\
 & + \text{Costo de adquisición por unidad de tiempo} \\
 & + \text{Costo por perdidas de producción por unidad de tiempo}
 \end{aligned}$$

El *Costo de almacenamiento por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 = & \text{Numero promedio de repuestos en bodega en el periodo } T \\
 & \times \text{Costo de los repuestos} \\
 & \times \text{Tasa de descuento por unidad de tiempo} \\
 = & \frac{1}{2} \alpha q p_u \tau
 \end{aligned}$$

**Nota:** el numero promedio de repuestos en el periodo  $T$  es  $\frac{1/2 \alpha T \times q}{T} = \frac{1}{2} \alpha q$

El *Costo de los repuestos por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 = & \text{Numero de repuestos} \\
 & \times \text{Precio de los repuestos} \\
 & \div \text{Periodo entre compras} \\
 = & \frac{p_u q}{T} = \alpha p_u \lambda
 \end{aligned}$$

El *Costo de adquisición por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 &= \text{Costo de adquisición} \\
 &\quad \div \text{Periodo entre compras} \\
 &= \frac{C_{ad}}{T} = C_{ad} \frac{\alpha\lambda}{q}
 \end{aligned}$$

El *Costo por pérdidas de producción por unidad de tiempo* es:

$$\begin{aligned}
 &= \text{Costo de falla por unidad de tiempo} \\
 &\quad \times \text{Periodo sin repuestos} \\
 &\quad \div \text{Periodo total} \\
 &= \frac{(1 - \alpha)Tc_f}{T} = (1 - \alpha)c_f
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el costo total esperado por unidad de tiempo es:

$$C(q, \alpha) = p_u\alpha\lambda + C_{ad} \frac{\alpha\lambda}{q} + \frac{1}{2}\alpha qp_u\tau + (1 - \alpha)c_f$$

Derivando con respecto a  $q$  e igualando a 0:

$$q = \sqrt{\frac{2\lambda C_{ad}}{p_u\tau}} = q_w$$

$C(\alpha)$  es una recta, si la pendiente es positivo entonces  $\alpha^* = 0$ , si la pendiente es negativa  $\alpha^* = 1$ .

La pendiente es positiva si,

$$p_u\lambda + \frac{C_{ad}\lambda}{q} + \frac{1}{2}qp_u\tau - c_f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Q(q_w) > c_f$$

Es decir, si el costo de falla  $c_f$  es menor al costo de mantener los repuestos en bodega por unidad de tiempo. Entonces es preferible no tener repuestos en bodega y comprarlos al momento de la falla.

# Capítulo 7

## Taller de mantenimiento

Hasta ahora hemos visto modelos que optimizan los costos esperados de mantención asumiendo que existe un equipo de mantenimiento disponible para reparar o mantener los componentes. Sin embargo, también existen decisiones que tomar desde un punto de vista del taller de mantenimiento:

1. Determinar que instalaciones son necesarias (equipos, herramientas, mano de obra)
2. Determinar como se deben utilizar estas instalaciones, tomando en consideración posibles sub-contrataciones.

En este capítulo veremos como la teoría de colas y el uso de simulaciones puede ayudar en la toma de decisiones respecto de tamaño, capacidad y organización de las instalaciones.

### 7.1. Teoría de Colas

La teoría de colas trata el problema de congestión en que los “clientes” llegan a una “instalación servicio”, tal vez tengan que esperar en una cola, son atendidos por “servidores” y luego dejan el servicio. En problemas de mantenimiento los clientes toman la forma de ordenes de trabajo que llegan a un taller, provenientes de distintos equipos en la línea de producción, mientras que los servidores son los equipos y técnicos de mantenimiento. La teoría de colas permite responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cual es el tiempo promedio que un trabajo debe espera en una cola?

- Para un tiempo dado, ¿Cual es el numero promedio de trabajos en el sistema?
- ¿Cual es la probabilidad de que el tiempo de espera sea superior a  $T$ ?
- ¿Cual es la probabilidad que uno de los servidores no este disponible?

Disponiendo de esta información es posible identificar el tamaño óptimo de las instalaciones para minimizar el costo total. En el costo total intervienen el costo de las instalaciones y el costo de falla asociado a trabajos esperando en las colas para ser atendidos. La situación se gráfica en la figura 7.1.

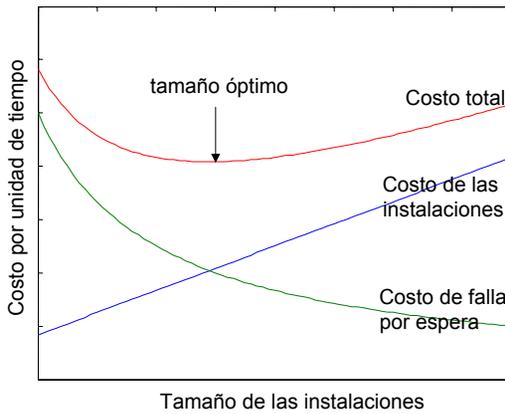


Figura 7.1:

### 7.1.1. Resultados de la teoría de colas

Las figuras 7.2 y 7.3 muestran los sistemas de colas mas usuales. En el primer caso, existe un solo servidor y solo se puede atender a un cliente a la vez. Todos los clientes deben esperar en una cola para ser atendidos, a menos que el servidor este desocupado. En el segundo caso, hay un sistema con multiples servidores, en donde, los clientes esperan en una cola y luego van desde la cola al primer servidor que se encuentre libre.

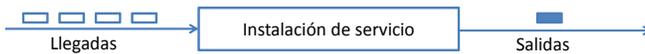


Figura 7.2: Un solo servidor



Figura 7.3: Varios servidores

El análisis de sistemas de colas que se verá en este capítulo asume lo siguiente:

- La llegada de clientes sigue una distribución exponencial con media  $\lambda$ . Por lo tanto, la probabilidad que lleguen  $r$  clientes en un tiempo  $t$  viene dada por la distribución de Poisson:

$$P(r) = (\lambda t)^r \frac{e^{-\lambda t}}{r!}$$

- El tiempo de atención en la estación de servicio sigue una distribución exponencial.
- Los clientes son atendidos en el orden de llegada (*FIFO*, *First In, First Out*).

Los casos con sistemas de colas más complejos, que utilicen otro tipo de distribuciones, pueden ser resueltos a través de simulaciones.

### Sistema con un solo servidor

Considerando las siguientes variables:

- $\lambda$ : tasa de arribo de trabajos por unidad de tiempo
- $1/\lambda$ : tiempo medio entre arribos
- $\mu$ : tasa media de servicio de trabajos por unidad de tiempo (si la estación de servicio se mantiene ocupada)

Se pueden determinar las siguientes estadísticas para el caso *estacionario*:

- Tiempo medio de espera de un trabajo en el sistema:  $W_s = 1/(\mu - \lambda)$

- Tiempo medio que un trabajo espera en la cola:  $W_q = \rho/(\mu - \lambda)$

donde  $\rho = \lambda/\mu$  es denominado la intensidad de trafico.

Nota: Para asegurar que no se cree una cola infinita, el valor de  $\rho$  debe ser menor a 1. Los valores anteriores de  $W_s$  y  $W_q$  dependen de esta condición.

### Sistemas con multiples servidores

Aunque existen expresiones analíticas para los tiempos de espera en sistemas con multiples servidores para ciertos casos particulares, estas están fuera del alcance de este capitulo. Sin embargo, existen tablas y gráficos que permiten determinar directamente los tiempos de espera. El gráfico a continuación se utiliza para determinar el tiempo de espera medio en sistemas con multiples servidores.

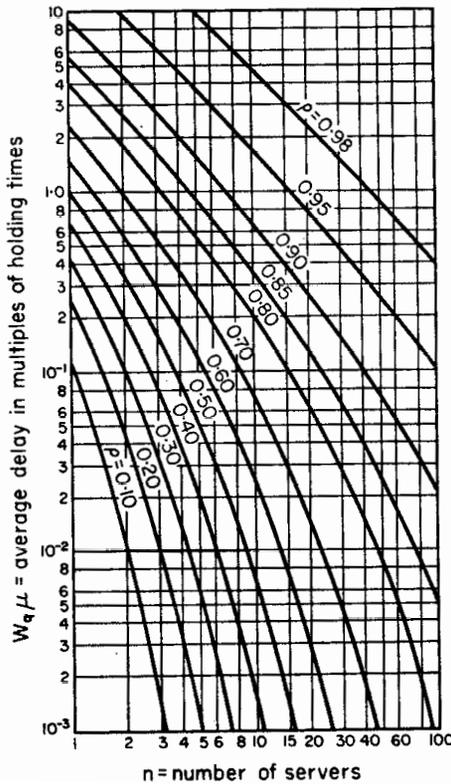


Figura 7.4:

## 7.2. Numero óptimo de estaciones de trabajo para satisfacer la demanda

### 7.2.1. Definición del problema

Supongamos el caso en que llegan trabajos de mantención al taller, provenientes de distintos sectores en la empresa. Dependiendo de la carga de trabajo, estos trabajos serán terminados y entregados a producción en un lapso de tiempo. Se quiere determinar el numero óptimo de estaciones de trabajo en el taller, que minimice el costo total del sistema. Este costo tiene dos componentes: (1) el costo de las instalaciones de trabajo y (2) el costo de falla debido a trabajos esperando a ser atendidos en el taller.

### 7.2.2. Construcción del modelo

1. La tasa de llegada de trabajos sigue una distribución exponencial con media  $\lambda$ .
2. El tiempo de servicio sigue una distribución exponencial con media  $1/\mu$ .
3. El costo asociado a la detención de producción por un trabajo en espera a ser reparado es  $C_f$ .
4. El costo de operación por unidad de tiempo de una estación de trabajo es  $C_l$  (si esta ocupada o no).
5. El objetivo es determinar el numero óptimo de estaciones de trabajo que minimice el costo total por unidad de tiempo del sistema  $C(n)$ .

El costo total por unidad de tiempo viene dado por:

$$\begin{aligned}
 C(n) = & \text{Costo por unidad de tiempo de las estaciones de trabajo} \\
 & + \text{Costo de falla por unidad de tiempo debido a trabajos en espera}
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

*Costo por unidad de tiempo de las estaciones de trabajo*

$$\begin{aligned}
 &= \text{Numero de estaciones de trabajo} \\
 &\quad \times \text{Costo por unidad de tiempo por unidad de trabajo} \\
 &= nC_l
 \end{aligned}$$

*Costo de falla por unidad de tiempo debido a trabajos en espera*

$$\begin{aligned}
 &= \text{Tiempo de espera promedio para un trabajo} \\
 &\quad \times \text{Tasa de arribo de trabajos por unidad de tiempo} \\
 &\quad \times \text{Costo de falla por unidad de tiempo por trabajo} \\
 &= W_s \lambda C_f
 \end{aligned}$$

Donde  $W_s$  es el tiempo de espera promedio de un trabajo en el taller. Por lo tanto,

$$C(n) = nC_l + W_s \lambda C_f$$

Esta ecuación relaciona el numero de estaciones de trabajo con el costo total  $C(n)$ .

### 7.2.3. Ejemplo numérico

Definamos  $\lambda = 30$  trabajos/semana,  $\mu = 5.5$  trabajos/semana (para una estación de trabajo),  $C_f = 500\text{USD/semana/trabajo}$ ,  $C_l = 200\text{USD/semana/estación de trabajo}$ .

Cuando  $n = 1$  a  $5$ , entonces la intensidad de trafico,  $\rho = \lambda/n\mu$ , es mayor a  $1$ . Esto significa que eventualmente se formaría una cola infinita, ya que la tasa de arribos es mayor a la tasa de trabajos que pueden ser procesados. Por lo tanto, se deben considerar los casos con  $n$  mayor o igual a  $6$ .

De la Figura 7.4, se tiene que cuando  $n = 6$  y  $\rho = 0.91$ , entonces  $W_q\mu = 1.4$ . Entonces el tiempo medio de espera en la cola es  $W_q = 1,4/5,5 = 0,255$  semanas.

De donde se obtiene que,

$$W_s = W_q + \text{ tiempo medio de servicio} = 0,255 + 0,182 = 0,437 \text{ semanas}$$

$$C(6) = 6 \times 200 + 0,437 \times 30 \times 500 = 7755USD$$

Siguiendo el mismo procedimiento para  $n = 7 - 12$ , se llega a la tabla a continuación:

N de estaciones de trabajo, $n$	Tiempo medio de espera para un trabajo en el taller, $W_s$	Costo total por semana, $C(n)$
6	0.437	7755
7	0.237	4955
8	0.198	4570
9	0.189	4635
10	0.185	4775
11	0.183	4945
12	0.182	5130

Por lo tanto, el numero óptimo de estaciones de trabajo para minimizar el costo total por unidad de tiempo es 8.

También es interesante determinar la fracción de tiempo promedio que una estación esta ocupada:

*Fracción de tiempo que una estación esta ocupada*

$$\begin{aligned}
 &= \text{Numero promedio de trabajos por estación por unidad de tiempo} \\
 &\quad \times \text{tiempo promedio de un trabajo en una estación de trabajo} \\
 &= \frac{\lambda}{n} \times \frac{1}{\mu}
 \end{aligned}$$

*Fracción de tiempo que una estación esta desocupada*

$$= 1 - \frac{\lambda}{n\mu}$$

Calculando para  $n = 1 - 12$ , se obtiene que:

N de estaciones de trabajo, $n$	Fracción de tiempo que una estación es ocupada	Fracción de tiempo que una estación es desocupada
6	0.91	0.09
7	0.78	0.22
8	0.68	0.32
9	0.61	0.39
10	0.55	0.45
11	0.50	0.50
12	0.45	0.55

Notar que para el número óptimo  $n = 8$ , la tasa de utilización de una estación es el 68%. Muchas veces se piensa que los equipos están operando eficientemente solo si se utilizan al máximo, pero muchas veces no es así como en el caso estudiado.

## 7.3. Esfuerzo óptimo del grupo de mantenimiento

### 7.3.1. Definición del problema

Consideremos que el grupo encargado de las reparaciones puede aumentar la tasa de trabajo a un costo, ya sea por la provisión de equipos nuevos o por el pago de incentivos. El grupo tiene a cargo la mantención de un grupo de máquinas. Si una máquina falla y el grupo está disponible, se atiende inmediatamente a la máquina, en caso contrario espera en una cola hasta que es atendida por el grupo. Mientras una máquina espera a ser atendida o mientras está siendo atendida, hay una pérdida de producción asociada. El problema es determinar la mejor tasa de trabajo del grupo para minimizar el costo total por unidad de tiempo.

### 7.3.2. Construcción del modelo

1. La tasa de llegada de trabajos sigue una distribución exponencial con media  $\lambda$ .
2. El tiempo de servicio sigue una distribución exponencial con media  $1/\mu$ .
3. El costo asociado a la detención de una máquina en espera a ser reparada es  $C_f$  por unidad de tiempo.
4. El costo por unidad de tiempo del grupo de mantenimiento es función de la tasa de servicio y es  $C_g(\mu)$

5. El objetivo es determinar la tasa de trabajo óptima  $\mu$  que minimice el costo total por unidad de tiempo del sistema  $C(\mu)$ .

El costo total por unidad de tiempo viene dado por:

$$\begin{aligned}
 C(\mu) = & \text{Costo de falla por unidad de tiempo debido a maquinas esperando en una cola} \\
 & + \text{Costo de falla por unidad de tiempo debido a maquinas siendo reparadas} \\
 & + \text{Costo del grupo de mantenimiento}
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

*Costo de falla por unidad de tiempo debido a maquinas esperando en una cola*

$$\begin{aligned}
 = & \text{Costo de falla por maquina por unidad de tiempo} \\
 & \times \text{Tiempo medio que una maquina espera en la cola} \\
 & \times \text{Tasa de arribo de trabajos} \\
 = & C_f \left( \frac{\rho}{\mu - \lambda} \right) \lambda
 \end{aligned}$$

*Costo de falla por unidad de tiempo debido a maquinas siendo reparadas*

$$\begin{aligned}
 = & \text{Costo de falla por maquina por unidad de tiempo} \\
 & \times \text{Tiempo medio que una maquina esta siendo reparada} \\
 & \times \text{Tasa de arribo de trabajos} \\
 = & C_f \left( \frac{1}{\mu} \right) \lambda
 \end{aligned}$$

*Costo del grupo de mantenimiento*

$$= C_g(\mu)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 C(\mu) &= C_f \left( \frac{\rho}{\mu - \lambda} \right) \lambda + C_f \left( \frac{1}{\mu} \right) \lambda + C_g(\mu) \\
 &= \frac{C_f \lambda}{\mu - \lambda} + C_g(\mu)
 \end{aligned}$$

Para encontrar el mínimo diferenciamos con respecto a  $\mu$ , lo que da:

$$\frac{\partial C_g(\mu)}{\partial \mu} = \frac{C_f \lambda}{(\mu - \lambda)^2}$$

### 7.3.3. Ejemplo numérico

1. La tasa de arribo de trabajos es  $\lambda=20$ .
2. El costo de falla por maquina por semana es  $C_f = 10000USD$
3. El costo del grupo de reparación por semana, viene dado por:

$$C_g(\mu) = K\mu$$

donde  $K$  es una constante de valor 500.

$C'_g(\mu) = K$  y la tasa de trabajo óptima es:

$$\mu_{opt} = \sqrt{\frac{10000 \times 20}{500}} + 20 = 40 \text{ maquinas / semana}$$

## 7.4. Numero óptimo de maquinas por grupo de mantenimiento

### 7.4.1. Definición del problema

Consideremos a un grupo de mantenimiento encargado de mantener  $n$  maquinas. Por lo que existe un numero máximo de posibles trabajos  $n$ , que requieran atención del grupo de mantenimiento. La tasa de arribo de trabajos va a depender, en parte, del numero de maquinas asignadas y cuantas de estas maquinas están esperando a ser reparadas o están siendo reparadas. En este modelo se asume grupo de mantenimiento solo puede reparar una maquina a la vez. Se quiere determinar el numero óptimo de maquinas que se debe asignar a un grupo de mantenimiento.

### 7.4.2. Construcción del modelo

1. La distribución de fallas de una maquina sigue una distribución exponencial con tasa de fallas  $\lambda$ .
2. El tiempo requerido para reparar una maquina sigue una distribución exponencial con media  $1/\mu$ .
3. Dados  $\lambda$  y  $\mu$ , el tiempo medio invertido por el grupo de mantenimiento para mantener una maquina operativa por una unidad de tiempo es  $\rho = \lambda/\mu$ . Esto se ilustra en la Figura 7.5, se tiene que  $a + b + c + d$  equivale a una unidad de tiempo de la maquina operativa, entonces el tiempo que el grupo de mantenimiento invierte en mantener la maquina operativa por esa unidad de tiempo es: Tasa media de fallas por unidad de tiempo  $\times$  1 unidad de tiempo  $\times$  Tiempo medio de reparación =  $\lambda \times 1/\mu$ .

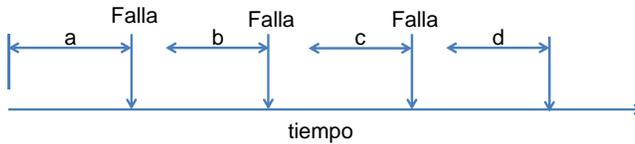


Figura 7.5:

4. Del punto (3) se tiene que el grupo de mantenimiento invierte  $\rho$  unidades de tiempo por unidad de tiempo de la maquina en operación. Entonces, para mantener la maquina operativa por 1 unidad de tiempo se requiere invertir  $1/\rho$  unidades de tiempo por el grupo de mantenimiento.
5. El costo asociado a la detención de una maquina en espera a ser reparada es  $C_f$  por unidad de tiempo.
6. El costo fijo del grupo de mantenimiento por unidad de tiempo es R.
7. El objetivo es determinar el numero óptimo de maquinas que se debe asignar al grupo de mantenimiento para minimizar los costos totales por unidad de tiempo.

El costo total por unidad de tiempo viene dado por:

$$C(n) = \text{Costo de reparación por unidad de tiempo} \\ + \text{Costo de falla por unidad de tiempo debido a maquinas siendo reparadas o en}$$

*Costo de reparación por unidad de tiempo*

$$= R/n$$

*Costo de falla por unidad de tiempo debido a maquinas siendo reparadas o espera a ser reparadas*

$$= (1 - \text{Disponibilidad de una maquina})$$

$$\times \text{Costo de falla por maquina por unidad de tiempo}$$

$$(7.4)$$

Definiendo  $U_c$  como la tasa de utilización del grupo de mantenimiento para las  $n$  maquinas (fracción de tiempo que el grupo de mantenimiento esta reparando alguna maquina), el tiempo medio invertido por el grupo de mantenimiento por maquina por unidad de tiempo es  $U_c/n$ , lo que entrega  $U_c/n\rho$  unidades de tiempo operativo por maquina, lo que a su vez es la disponibilidad por unidad de tiempo de una maquina. Por lo tanto,

$$C(n) = \frac{R}{n} + \left(1 - \frac{U_c}{n\rho}\right) \times C_f$$

**Tasa de utilización del grupo de mantenimiento ( $U_c$ )**

La tasa de utilización es la proporción de tiempo en que al menos una maquina está siendo reparada por el grupo de mantenimiento. Esta tasa es una función de  $\rho$  y  $n$ . Con las tablas a continuación se pueden determinar valores aproximados de  $U_c$ . Para valores específicos de  $\rho$  y  $n$ , puede ser necesario interpolar los valores de la tabla.

n	$\rho$				
	0.8	0.7	0.6	0.4	0.2
1	0.444	0.412	0.375	0.286	0.167
2	0.742	0.704	0.658	0.528	0.324
3	0.903	0.876	0.840	0.718	0.470
4	0.971	0.958	0.938	0.850	0.602
6	0.998	0.997	0.994	0.972	0.808
8	1.000	1.000	1.000	0.997	0.930
10				1.000	0.982
12					0.997

Tabla 7.1: Tasa de utilización del grupo de mantenimiento,  $U_c$

n	$\rho$				
	0.18	0.16	0.14	0.12	0.10
2	0.298	0.271	0.242	0.212	0.180
4	0.560	0.515	0.465	0.412	0.353
6	0.767	0.718	0.660	0.592	0.516
8	0.902	0.864	0.813	0.746	0.662
10	0.969	0.949	0.916	0.863	0.785
12	0.993	0.986	0.970	0.939	0.880
14	0.999	0.997	0.992	0.978	0.943

Tabla 7.2: Tasa de utilización del grupo de mantenimiento,  $U_c$

### 7.4.3. Ejemplo numérico

1. La tasa de fallas es  $\lambda = 0,4$  fallas por semana, y el tiempo medio de reparación es  $1/\mu = 0,5$  semanas, entonces  $\rho = \lambda/\mu = 0,2$
2. El costo de falla es  $C_f = 500USD$  por semana, el costo del grupo de mantenimiento es  $800USD$  por semana. El costo total esperado viene dado por,

$$C(n) = \frac{800}{n} + \left(1 - \frac{U_c}{0,2n}\right) \times 500$$

Tenemos que  $\rho = 0,2$ , utilizando la tabla 7.1 para  $n=1-8$ , se obtiene:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$C(n)$	882	495	375	323	307	296	309	310

Por lo tanto, el óptimo es  $n = 6$  maquinas asignadas al grupo de trabajo.

# Capítulo 8

## Reemplazo de equipos

### 8.1. Reemplazo óptimo de equipos: minimización del costo total

El objetivo de este problema es determinar el intervalo entre reemplazos del equipo que minimicen el costo total de mantenimiento y reemplazo.

#### 8.1.1. Construcción del modelo

1. El costo de adquisición del equipo es  $A$ .
2. La vida del equipo es  $n$  periodos antes de ser reemplazado.
3. El costo de mantenimiento para el periodo  $i$  es  $C_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$
4. El costo de venta del equipo al final del periodo  $i$  es  $S_i$ .
5.  $\tau$  es la tasa de interés de referencia. Se define  $r = 1/(1 + \tau)$
6. El objetivo es determinar el número óptimo de periodos  $n$  entre reemplazos para minimizar el costo total,  $C(n)$ .

La Figura 8.1 ilustra la política de reemplazos.

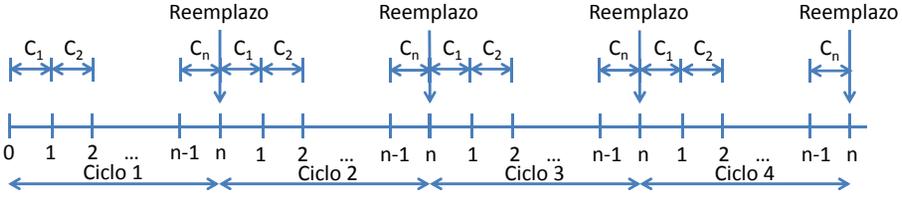


Figura 8.1:

Consideremos un ciclo de operación. El costo total de un ciclo al principio del ciclo de operación es:

$$\begin{aligned}
 C_i(n) &= C_1r + C_2r^2 + C_3r^3 + \dots + C_n r^n + Ar^n - S_n r^n \\
 &= \sum_{i=1}^n C_i r^i + r^n(A - S_n)
 \end{aligned}$$

Entonces el costo total en  $t = 0$  considerando todos los ciclos es:

$$C(n) = C_1(n) + C_2(n)r^n + C_3(n)r^{2n} + C_4(n)r^{3n} + \dots$$

Dado de que  $C_1(n) = C_2(n) = C_3(m) = C_4(m) = \dots$ , se obtiene una progresión geométrica, cuyo valor en un periodo infinito es:

$$C(n) = \frac{C_i(n)}{1 - r^n} = \frac{\sum_{i=1}^n C_i r^i + r^n(A - S_n)}{1 - r^n}$$

**8.1.2. Ejemplo numérico**

1. El costo de adquisición de un equipo es 5000USD
2. Los costos estimados de mantenimiento en los próximos 5 años son:

Año	1	2	3	4	5
$C_i$ (USD)	500	1000	2000	3000	4000

3. El valor estimado de venta en los próximos 5 años es:

Año	1	2	3	4	5
$S_i$ (USD)	3000	2000	1000	750	500

4. La tasa de referencia es del 11.1 % anual, por lo tanto,  $r = 0,9$ .

Evaluando los costos totales:

$$C(1) = \frac{500(0,9) + (0,9)(5000 - 3000)}{1 - 0,9}$$

$$= 22500USD$$

$$C(2) = \frac{500(0,9) + 1000(0,9)^2 + (0,9)^2(5000 - 2000)}{1 - 0,9^2}$$

$$= 19421USD$$

$$C(3) = \frac{500(0,9) + 1000(0,9)^2 + 2000(0,9)^3 + (0,9)^3(5000 - 1000)}{1 - 0,9^3}$$

$$= 20790USD$$

De donde se obtiene que el mejor tiempo para reemplazar al equipo es cuando este ha sido usado por 2 años.

## 8.2. Reemplazo de equipo considerando mejora tecnológica: Horizonte de tiempo fijo

Al considerar reemplazar un equipo, se debe tener en cuenta equipos que cumplen con las mismas funciones, pero que consideran una mejora tecnológica. Por ejemplo, equipos con menores costos de mantenimiento, con mejor productividad, etc. El modelo propuesto en esta sección determina cuando, si es necesario, se debe reemplazar el equipo existente por uno más avanzado.

Se considera un horizonte de tiempo fijo, en donde se considera la operación del primer equipo, su reemplazo por uno nuevo, y la operación del equipo nuevo. El objetivo es determinar cuando realizar el reemplazo para minimizar los costos totales de mantenimiento y reemplazo.

**8.2.1. Construcción del modelo**

1. El equipo será operado por  $n$  periodos de tiempo.
2.  $C_{p,i}$  es el costo de mantenimiento del equipo actual en el periodo  $i$ .
3.  $S_{p,i}$  es el precio de venta del equipo actual en el periodo  $i$ .
4. El costo de adquisición del equipo nuevo es  $A$ .
5.  $C_{t,i}$  es el costo de mantenimiento del equipo nuevo en el periodo  $i$ .
6.  $S_{t,i}$  es el precio de venta del equipo nuevo en el periodo  $i$ .
7.  $\tau$  es la tasa de interés de referencia. Se define  $r = 1/(1 + \tau)$
8. El objetivo es determinar el periodo  $T$ , en el que se debe realizar el reemplazo del equipo actual por el equipo nuevo. La Figura 8.2 muestra un esquema de la situación.

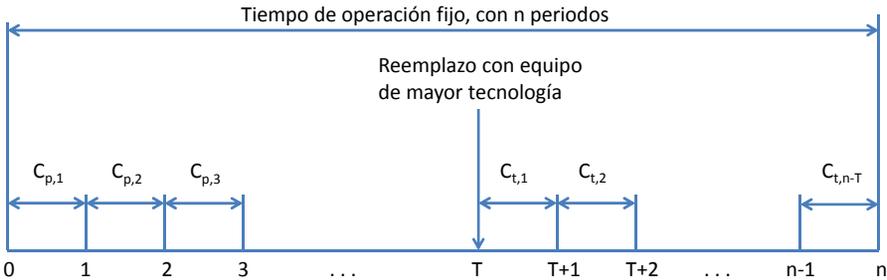


Figura 8.2:

El costo total en los  $n$  periodos viene dado por:

$$\begin{aligned}
 C(T) &= \text{Costo de mantenimiento del equipo actual en el periodo } (0,T) \\
 &= + \text{Costo de mantenimiento del equipo nuevo en el periodo } (T,n) \\
 &= + \text{Costo de adquisición del equipo nuevo} \\
 &= - \text{Precio de venta del equipo actual en el periodo } T \\
 &= - \text{Precio de venta del equipo nuevo al final del periodo } n
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$C(T) = \sum_{i=1}^T C_{p,i}r^i + \sum_{j=1}^{n-T} C_{t,i}r^{j+T} + Ar^T - (S_{p,T}r^T + S_{t,n-T}r^n)$$

### 8.2.2. Ejemplo numérico

1. El numero de periodos futuros en operación es n=6.
2. Los costos de mantenimiento estimados para el equipo actual son:

Periodo (i)	1	2	3	4	5	6
$C_{p,i}$ (USD)	5000	6000	7000	7500	8000	8500

3. Los costos de venta estimados para el equipo actual son los siguientes:

Periodo (i)	1	2	3	4	5	6
$S_{p,i}$ (USD)	3000	2000	1000	500	500	500

4. El costo de adquisición de un equipo nuevo mejorado es de A=10000USD.
5. El costo de mantenimiento estimado para el equipo mejorado es:

Periodo (j)	1	2	3	4	5	6
$C_{t,j}$ (USD)	100	200	500	750	1000	1200

6. El precio de venta estimado del equipo mejorado es el siguiente:

Periodo (j)	0	1	2	3	4	5	6
$S_{t,j}$ (USD)	10000	8000	7000	6000	5000	4500	4000

7. La tasa de referencia es del 11.1% anual, por lo tanto,  $r = 0,9$ .

Utilizando los datos anteriores se puede evaluar el costo total esperado. Los resultados se muestran en la tabla a continuación:

T	0	1	2	3	4	5	6
C(T) (USD)	7211	10836	14891	18649	22062	25519	28359

En este caso, el costo se minimiza cuando  $T = 0$ , esto significa que el equipo actual debería ser reemplazado ahora el equipo mejorado y este último debería ser utilizado durante los 6 periodos de tiempo. Se debe notar que si el mínimo hubiese ocurrido cuando  $n = 6$ , esto hubiese significado que no es necesario reemplazar el equipo actual en el horizonte de tiempo considerado.

*Ejemplo de calculo para  $T=3$*

$$\begin{aligned}
 C(3) &= \sum_{i=1}^3 C_{p,i}r^i + \sum_{j=1}^3 C_{t,i}r^{j+3} + Ar^3 - (S_{p,T}r^3 + S_{t,n-Tr}r^6) \\
 &= 5000(0,9) + 6000(0,9)^2 + 7000(0,9)^3 + 100(0,9)^4 + 200(0,9)^5 \\
 &= + 500(0,9)^6 + 10000(0,9)^3 - [500(0,9)^3 + 6000(0,9)^6] \\
 &= 18649
 \end{aligned}$$

### 8.3. Reemplazo de equipo considerando mejora tecnológica: Horizonte de tiempo infinito

Este problema es idéntico al de la sección anterior, excepto que cuando se ha tomado la decisión de reemplazar el equipo actual por uno nuevo de mayor tecnología, este último seguirá siendo ocupado y se adoptara una política de reemplazos periódicos. Se asume que estos reemplazos se seguirán haciendo con el equipo mejorado.

#### 8.3.1. Construcción del modelo

1. Se utilizan los mismos parámetros definidos en la sección anterior.
2. El modelo de reemplazos es ilustrado en la Figura a continuación.

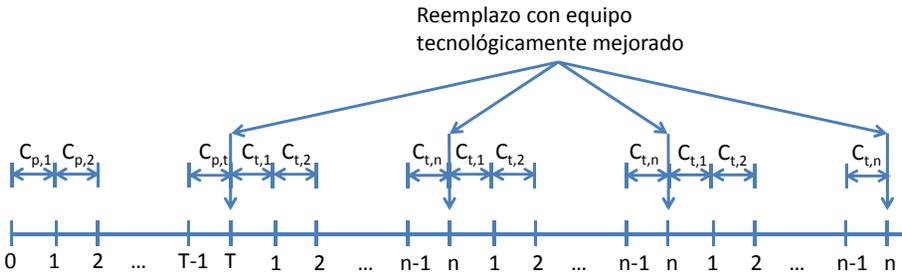


Figura 8.3:

El costo total viene dado por:

$$C(T, n) = \text{Costos en el intervalo } (0, T) + \text{Costos futuros}$$

Costo en el intervalo  $(0, T)$ :

$$\sum_{i=1}^T C_{p,i} r^i - S_{p,T} r^T + Ar^T$$

Los costos futuros se obtienen utilizando el mismo método de la sección 9.1, reemplazando  $C_i$  por  $C_{t,j}$ :

$$C_f(n) = \frac{\sum_{j=1}^n C_{t,j} r^j + r^n (A - S_n)}{1 - r^n}$$

Por lo tanto, los costos totales viene dados por:

$$C(T, n) = \sum_{i=1}^T C_{p,i} r^i - S_{p,T} r^T + Ar^T + \left( \frac{\sum_{j=1}^n C_{t,j} r^j + r^n (A - S_n)}{1 - r^n} \right) r^T$$

### 8.3.2. Ejemplo numérico

Utilizando los datos de la sección 8.2.2 se puede determinar el periodo óptimo de reemplazos para el equipo nuevo, a partir de la ecuación para los costos futuros  $C_f(n)$ . Los resultados para distintos valores de  $n$  se muestran en la tabla a continuación:

Periodo de reemplazos	1	2	3	4	5	6
$C_f(n)$ (USD)	18900	14116	13035	12834	11920	12063

Por lo tanto, el numero de periodos óptimo para el reemplazo del equipo nuevo es 5 y el costo futuro asociado es de 11920USD. Utilizando este valor y  $A=10000$ USD se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 C(T, 5) &= \sum_{i=1}^T C_{p,i}r^i - S_{p,T}r^T + 10000r^T + 11920r^T \\
 &= \sum_{i=1}^T C_{p,i}r^i - S_{p,T}r^T + 21920r^T
 \end{aligned}$$

Consideremos los siguientes valores para el mantenimiento y la venta del equipo actual:

Periodo (i)	1	2	3
$C_{p,i}$ (USD)	1500	3000	4000

Periodo (i)	0	1	2	3
$S_{p,i}$ (USD)	2750	2500	1500	1000

El costo total para T=0, 1, 2, 3 es:

T	0	1	2	3
$C(T, 5)$ (USD)	19170	18828	20120	20946

Entonces conviene reemplazar el equipo actual por un equipo nuevo mejorado en el periodo T=2, y posteriormente reemplazar periódicamente el equipo mejorado cada 5 periodos.

*Ejemplo de calculo para T=2*

$$\begin{aligned}
 C(2, 5) &= 1500(0,9) + 3000(0,9)^2 - 1500(0,9)^2 + 21920(0,9)^2 \\
 &= 20120USD
 \end{aligned}$$

# Capítulo 9

## Planificación y secuenciación de tareas

### 9.1. Decisiones de secuencia

Un ejemplo de secuenciación es decidir en que orden los trabajos deben ser atendidos en el taller. Para ilustrar la complejidad de este problema consideremos un ejemplo muy simple en donde hay tres trabajos esperando a ser atendidos por el taller A. En este caso, existen  $3! = 6$  secuencias posibles para realizar los tres trabajos.

Si consideráramos ahora que cada trabajo de reparación debe pasar por dos estaciones de mantenimiento A y B, en cualquier orden, ya habrían  $(3!)^2 \times 2 = 72$  secuencias posibles. En general, si hay  $n$  trabajos que requieren el servicio de  $m$  estaciones de trabajo, hay  $(n!)^m \times m!$  maneras posibles de completar los  $n$  trabajos.

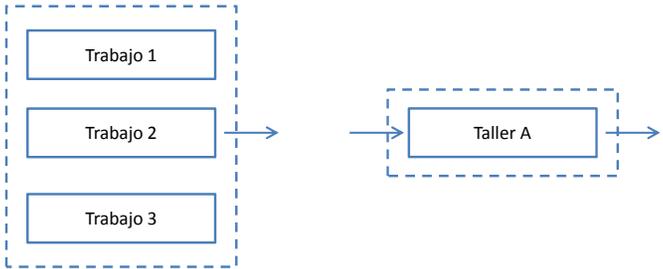


Figura 9.1:

La secuencia a adoptar depende de que es lo que se entienda por óptimo. Una secuencia óptima puede ser aquella que minimize el tiempo total (tiempo desde que comienza el primer trabajo hasta que se termina el último), o una secuencia que minimize los atrasos, se entiende por atraso al término de un trabajo después de una fecha límite. Es importante notar que hay casos en donde no todas las  $(n!)^m \times m!$  secuencias son posibles. Por ejemplo, puede ser necesario realizar algunos trabajos en un orden específico.

## 9.2. Regla para la secuenciación óptima de trabajos que deben pasar por 2 estaciones

### 9.2.1. Definición del problema

Existen  $n$  trabajos esperando a ser procesados por 2 estaciones de trabajo A y B, y no está permitido pasarse. El que no esté permitido pasarse, significa que si un trabajo es procesado primero en la estación A debe ser procesado primero en la estación B. El problema es determinar la secuenciación que minimize el tiempo total para procesar los  $n$  trabajos.

### 9.2.2. Construcción del modelo

1. Se asume que todos los trabajos deben pasar primero por la estación A y luego por la estación B.
2. Se define:

$A_i$  = tiempo requerido para el trabajo  $i$  en la estación A

$B_i$  = tiempo requerido para el trabajo  $i$  en la estación B

$T$  = tiempo total para procesar los trabajos  $1, 2, \dots, n$ .

$I_i$  = tiempo que la estación B está desocupada desde el final del trabajo  $i - 1$

donde  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Estos parámetros se ilustran en la Figura 9.2, en donde hay tres trabajos siendo procesados en las estaciones A y B, y la secuencia es: trabajo 1, trabajo 2 y trabajo 3.

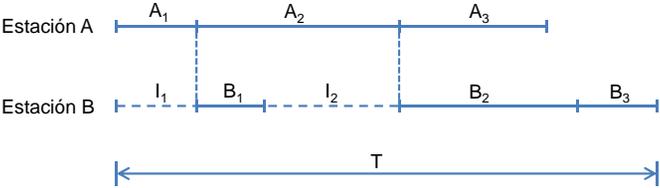


Figura 9.2:

3. El diagrama de Figura 9.3 es un algoritmo que permite determinar la secuencia óptima que minimiza el tiempo total de procesamiento de  $n$  trabajos que deben pasar por la estación A y luego por la estación B.

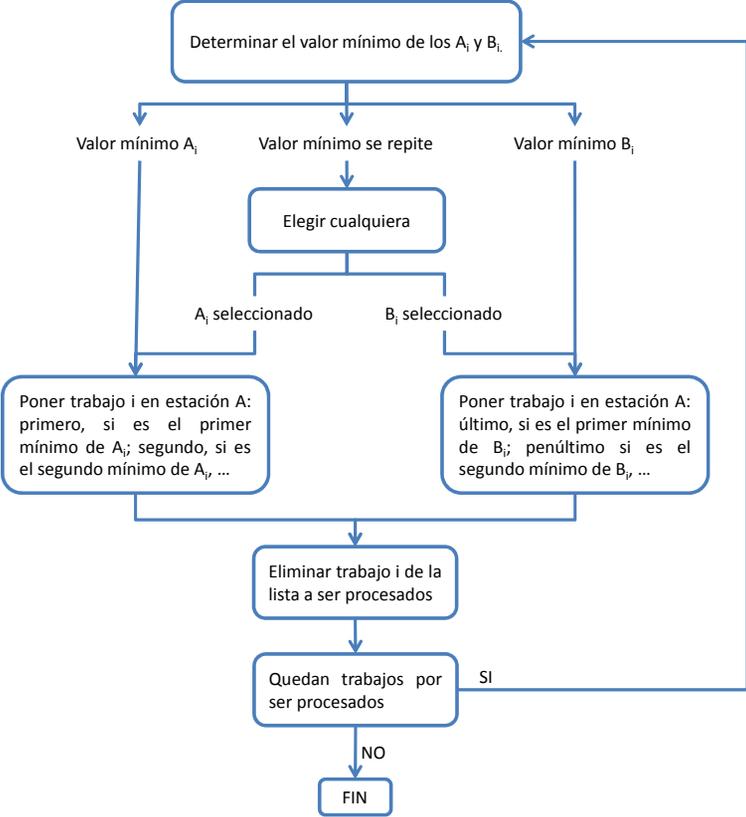


Figura 9.3:

### 9.2.3. Ejemplo numérico

Consideremos 4 trabajos a ser procesados, primero por la estación A y luego por la estación B. Se quiere determinar la secuenciación óptima que minimize el tiempo total de procesamiento. Los tiempo de procesamiento de cada trabajo en cada maquina están dados en la tabla a continuación:

Trabajo N <sup>o</sup>	$A_i$	$B_i$
1	3	1
2	8	1
3	5	8
4	2	9

Usando el diagrama de la Figura 9.3:

**Paso 1:**  $\min(3,8,5,2,1,1,8,9)=1$  y ocurre para los trabajos 1 ó 2 en la estación B.

**Paso 2:** Se selecciona el trabajo 1 en la estación B

**Paso 3:** Se asigna el trabajo 1 como último trabajo en la estación A.

**Paso 4:** Borrar trabajo 1 de la lista.

**Paso 5:**  $\min(-,8,5,2,-,1,8,9)=1$  y ocurre para el trabajo 2 en la estación B.

**Paso 6:** Se asigna el trabajo 2 como penúltimo en la estación A.

**Paso 7:** Borrar trabajo 2 de la lista.

**Paso 8:**  $\min(-,-,5,2,-,-,8,9)=2$  y ocurre para el trabajo 4 en la estación A.

**Paso 9:** Asignar trabajo 4 como primero en la estación A.

**Paso 10:** Borrar trabajo 4 de la lista.

**Paso 11:**  $\min(-,-,5,-,-,-,8,-)=5$  y ocurre para el trabajo 3 en la estación A.

**Paso 12:** Asignar trabajo 3 como segundo en la estación A

La secuencia de este ejemplo se ilustra en la Figura 9.4, en donde se deduce que el tiempo mínimo para procesar los 4 trabajos es de 21 unidades de tiempo.

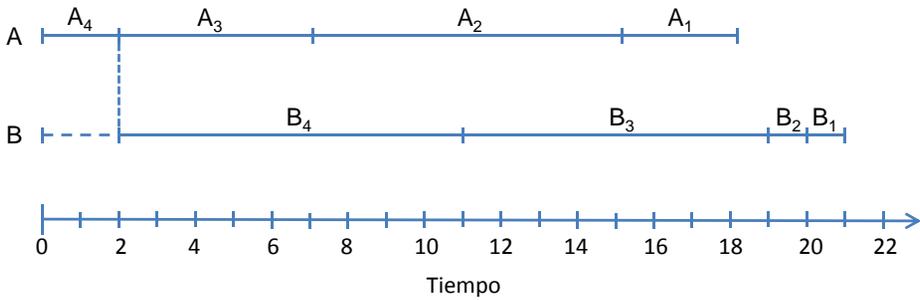


Figura 9.4:

### 9.3. Secuencia óptima de trabajos que deben pasar por tres estaciones de mantenimiento

#### 9.3.1. Construcción del modelo

1. Hay  $n$  trabajos que requieren la atención de tres estaciones de mantenimiento A, B y C.
2.  $A_i, B_i$  y  $C_i$  son los tiempos que requiere el trabajo  $i$  en las estaciones A, B y C respectivamente,
3. Se cumple al menos una de las siguientes condiciones:
  - $\text{mín } A_i \geq \text{máx } B_i$
  - $\text{mín } C_i \geq \text{máx } B_i$

Entonces el diagrama de la Figura 9.3 se puede utilizar para determinar la secuencia óptima de tener los  $n$  completados por las tres estaciones de trabajo. Se calculan las sumas  $D_i = A_i + B_i$  y  $E_i = B_i + C_i$  y  $D_i$  y  $E_i$  reemplazan a  $A_i$  y  $B_i$  en el diagrama.

#### 9.3.2. Ejemplo numérico

Se tienen 6 máquinas que requieren pasar por tres estaciones de mantenimiento. Los tiempo requeridos por cada grupo de mantenimiento son los siguientes:

Máquina N <sup>o</sup>	$A_i$	$B_i$	$C_i$
1	8	3	6
2	6	2	5
3	12	4	8
4	4	1	4
5	6	2	5
6	8	3	6

Dados estos valores y verificando que se cumple las condiciones  $\min A_i \geq \max B_i$  y  $\min C_i \geq \max B_i$ , se pueden calcular los valores de  $D_i$  y  $E_i$ :

Máquina N <sup>o</sup>	$D_i = A_i + B_i$	$E_i = B_i + C_i$
1	11	9
2	8	7
3	16	12
4	5	5
5	8	7
6	11	9

Utilizando los valores de  $D_i$  y  $E_i$  se obtiene la siguiente secuencia óptima: Máquinas 4, 3, 6, 1, 5 y 2.

Esta secuencia es ilustrada en la Figura 9.5. Se obtiene que el tiempo mínimo para procesar las 6 máquinas es de 51 unidades de tiempo.

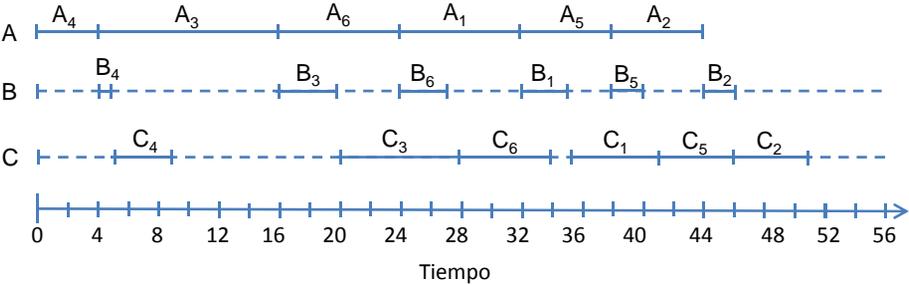


Figura 9.5:

## 9.4. Planificación de tareas, método PERT-CPM

El método PERT (Program Evaluation and Review Technique) - CPM (critical path method) permite planificar y controlar las actividades necesarias para llevar a cabo un proyecto.

El objetivo es representar gráficamente un proyecto de forma que sea posible determinar su duración mínima, conocer cuáles son las actividades sobre las que deberá ejercerse un mayor control (actividades críticas), y obtener información sobre el estado del proyecto en cada una de sus fases. Las características que debe tener un proyecto para que pueda ser programado mediante esta técnica son las siguientes:

- Todas las actividades del proyecto deben estar perfectamente definidas.
- Debe existir un orden de relación entre las actividades.
- Cada actividad debe tener una duración determinada.
- Las actividades han de ser independientes entre ellas.

La herramienta básica de este método es la técnica de grafos, mediante ella se esquematiza la realización del proyecto en diferentes situaciones y actividades. En el grafo se representan las actividades con flechas y las situaciones en nudos; a cada actividad se le asigna su tiempo de duración, y se establecen las relaciones entre actividades y situaciones mediante una secuenciación.

### 9.4.1. Terminología utilizada

#### Diagrama de red o PERT

Es una red de eventos numerados y conectados con flechas donde se muestran todas las actividades necesarias y eventos que intervienen en un determinado proyecto.

#### Actividad

Corresponde a un trabajo, acción u operación necesaria en el proyecto, se representa mediante una flecha en el diagrama PERT.

**Evento**

Corresponde a un momento en el tiempo. Se identifican al comienzo o termino de una actividad. Se dice que se realiza un evento, cuando todas las actividades que llegan a un mismo nodo han sido terminadas. Se representan con círculos numerados y forman parte del diagrama PERT.

**Predecesoras**

Son actividades que deben preceder (estar antes) a una actividad determinada.

**Ruta crítica o camino crítico**

Un camino es una serie de actividades sucesivas conectadas, que conduce del principio del proyecto al final del mismo. El camino que requiera el mayor tiempo de ejecución se denomina camino o ruta crítica. La duración del camino crítico, es el tiempo necesario para terminar el proyecto.

**Holgura o margen**

Es el tiempo libre en al red, es decir, la cantidad de tiempo que se puede retrasar o demorar una actividad sin afectar la fecha de terminación del proyecto.

**9.4.2. Construcción de la Red**

Para construir la red se deben seguir las siguientes reglas:

1. Una actividad parte de un nodo inicial i hacia un nodo terminal j, se representa por una flecha solo una vez en la red.



Figura 9.6:

2. Entre dos eventos sucesivos: inicial y terminal debe haber una sola actividad. Por ejemplo, el siguiente diagrama es incorrecto:

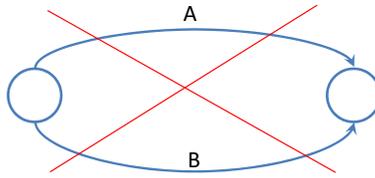


Figura 9.7:

Para resolver el caso anterior se introduce una actividad ficticia D.

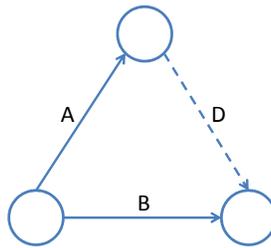


Figura 9.8:

3. Existen algunos casos, en donde es necesario el uso de actividades ficticias para representar las actividades correctamente en la red. Por ejemplo, consideremos el caso en que las actividades A y B preceden a C, pero E es precedida solamente por B. Una representación incorrecta sería:

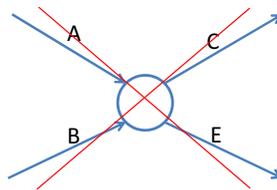


Figura 9.9:

La forma correcta de representación es incluyendo una actividad ficticia D.

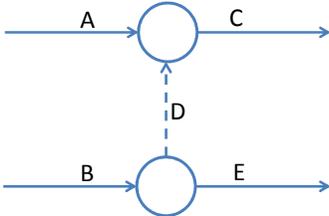


Figura 9.10:

**9.4.3. Ejemplo 1**

Consideremos la siguiente lista de tareas:

Tarea	Predecesoras	Tiempo (días)
A	B, D, E	3
B	-	1
C	E	2
D	-	1
E	F	4
F	B	3

La Figura 9.11 muestra la red PERT. En esta red se dibujan primero las tareas que no tienen predecesoras, en este caso B y D. Una vez dibujadas estas tareas, se buscan las tareas que sus predecesoras ya han sido dibujadas y se añaden a la red, se continua así hasta que todas las tareas han sido dibujadas en la red.

En este caso la ruta crítica es B-F-E-G-A, cuya duración es de 11 días.

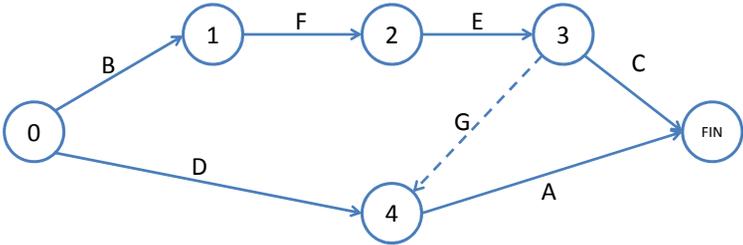


Figura 9.11:

### 9.4.4. Ejemplo 2

Tarea	Predecesoras	Tiempo (días)
A	J	2
B	I, G, H	4
C	H	1
D	C, E, H	2
E	A, F	5
F	H	3
G	J	1
H	-	2
I	A, F, H	4
J	-	2

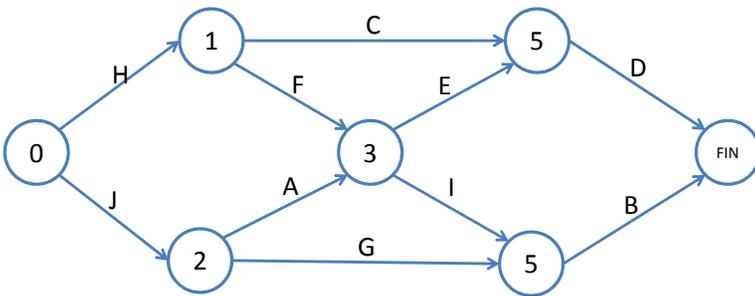


Figura 9.12:

La ruta crítica es H-F-I-B con un tiempo de 13 días.

### 9.4.5. Reducción de los tiempos

En general, se espera tener beneficios económicos al reducir el tiempo para completar un proyecto. Por ejemplo, reducir el tiempo para realizar el mantenimiento de un equipo puede reducir los costos de falla asociados a la detención del equipo.

Para decidir que acciones se deben tomar, es necesario estudiar la relación entre reducir la duración del proyecto y los beneficios que ello conlleva.

Consideremos que el tiempo que demora cada actividad se puede reducir si se hace una mayor inversión, para ello se consideran dos extremos:

**Tiempo límite:** Es el tiempo mínimo que puede durar una actividad y tiene asociado un incremento en los costos de intervención.

**Tiempo normal:** Es el tiempo que normalmente dura una actividad.

El gradiente de los costos de intervención puede ser aproximado por:

$$\frac{\text{costo límite} - \text{costo normal}}{\text{tiempo normal} - \text{tiempo mínimo}}$$

Para reducir la duración del proyecto, se deben reducir los tiempos de las actividades de la ruta crítica, entre estas actividades, se debe empezar con aquellas que tienen el menor gradiente de costos. Se debe tener cuidado que al reducir el tiempo de una actividad, la ruta crítica puede cambiar, en ese caso es necesario analizar nuevamente la red antes de reducir el tiempo de la siguiente actividad.

**Ejemplo**

El plan de mantenimiento de un equipo consta de 5 actividades básicas que se relacionan de acuerdo al diagrama mostrado en la Figura 9.13. Los costos de intervención normales y límites para cada actividad se dan en la tabla a continuación:

Actividad	Tiempo normal	Costo normal	Tiempo límite	Costo límite
A	3	40	1	80
B	2	50	1	120
C	6	100	4	140
D	4	80	2	130
E	3	60	1	140

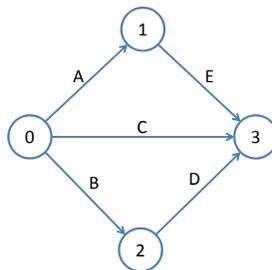


Figura 9.13:

Para este ejemplo la ruta crítica es A-E con una duración normal de 7 días y un costo de 330. Para reducir el proyecto a 6 días se pueden acortar las tareas A ó E. El gradiente de los costos en cada caso es:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = \frac{80 - 40}{2} = 20$$

$$\frac{\partial C_E}{\partial t} = \frac{130 - 80}{2} = 25$$

Por lo tanto, conviene más acortar la tarea A. En este caso la duración del proyecto es de 6 días con un costo de 350.

### 9.4.6. Planificación de cargas

Un método útil para determinar la mano de obra necesaria en cada etapa, es el uso de una carta Gantt. Esta carta ayuda a decidir el orden en que las tareas deben ser realizadas. Por ejemplo, la carta gantt a continuación representa al diagrama de la Figura 9.12.

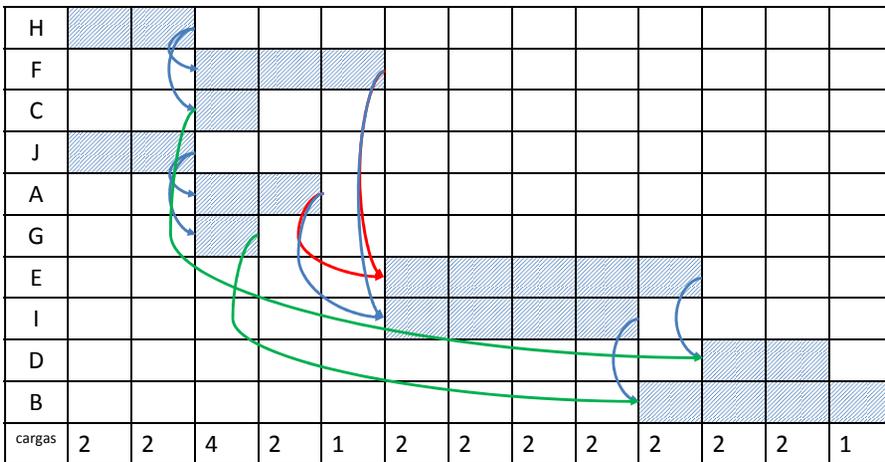


Figura 9.14:

Se puede notar que hay un instante en el que se están realizando cuatro actividades al mismo tiempo, mientras que hay dos instantes en los que se realiza una sola actividad. En la carta Gantt se puede ver que las actividades C, A, G y D, tienen

holgura, si se mueve las actividades C, G y D se puede obtener una carga de trabajo equilibrada:

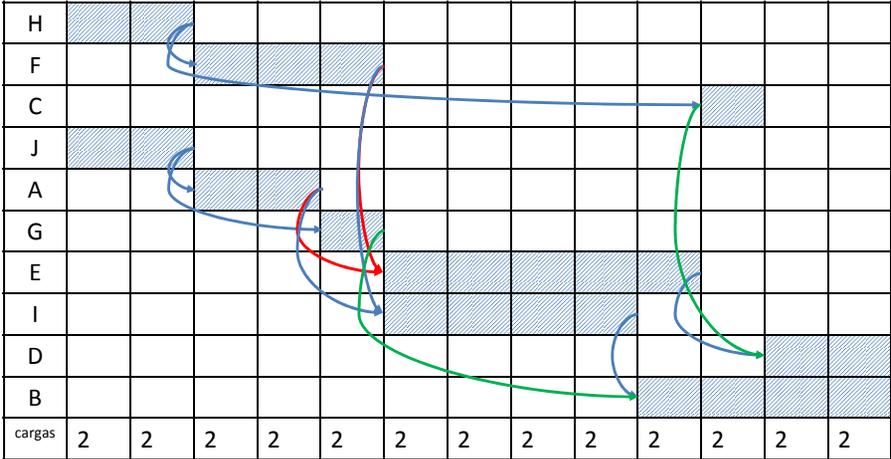


Figura 9.15:

# Bibliografía

- [1] A. Birolini. *Reliability engineering: theory and practice*. Springer, 2010.
- [2] J.D. Campbell and A.K.S. Jardine. *Maintenance excellence: Optimizing equipment life-cycle decisions*. CRC, 2001.
- [3] J. Moder, C. Phillips, and E. Davis. *Project management with CPM, PERT and project diagramming*. Van Nostrand Reinhold Publishers, 1983.
- [4] B.V. Gnedenko and I.A. Ushakov. *Probabilistic reliability engineering*. Wiley-Interscience, 1995.
- [5] A.K.S. Jardine and A.H.C. Tsang. *Maintenance, replacement, and reliability: theory and applications*. CRC Press, 1973.
- [6] W. Kuo and M.J. Zuo. *Optimal reliability modeling: principles and applications*. Wiley, 2003.
- [7] Rodrigo Pascual. *El Arte de mantener: un marco conceptual y varios modelos para la gestión de activos físicos*. 2011.
- [8] D.J. Smith. *Reliability, maintainability and risk: practical methods for engineers*. Butterworth-Heinemann, 2005.
- [9] F. Zhang and A.K.S. Jardine. Optimal maintenance models with minimal repair, periodic overhaul and complete renewal. *IIE transactions*, 30(12):1109–1119, 1998.