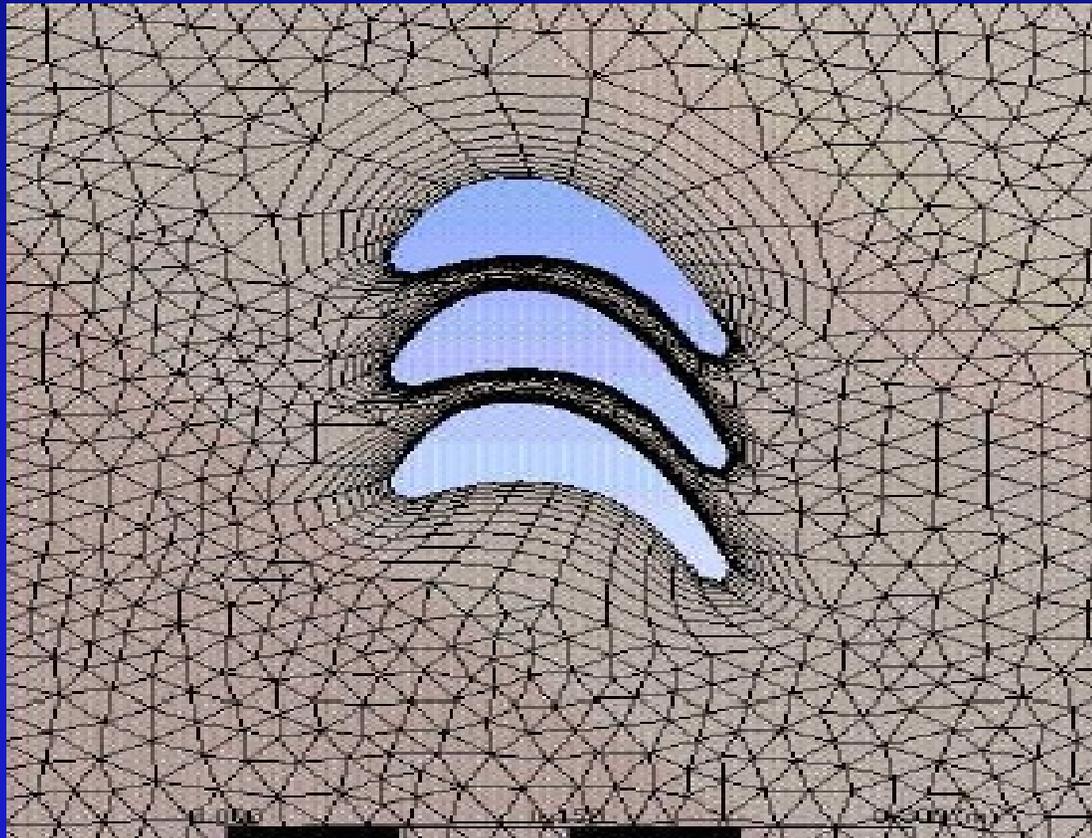


# Clase auxiliar ME-5600

## Diseño de Elementos Mecánicos

Mallado, Validación de Modelo y Uso inteligente del Software Ansys PARTE 2.



# Resumen última clase

- Revisión de Normas útiles al modelar con respecto al mallado.
- Comandos en Ansys para cumplir dichas normas.
- Validación de Modelo mediante el principio de la mínima Energía Potencial Total.

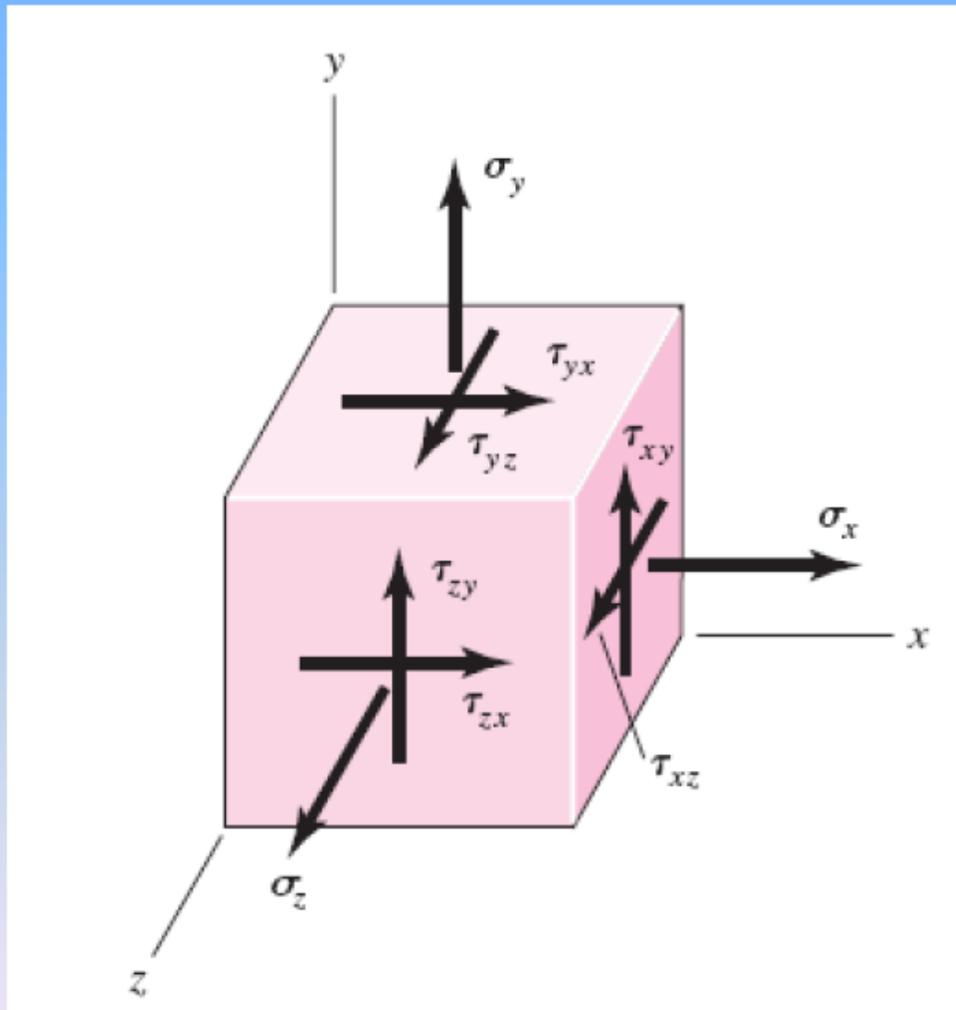
# Hasta ahora...

- Solo se han utilizado elementos 3-D a partir de la división de un sólido realizado en CAD.
- Es decir, estamos estudiando el cubo diferencial con todos sus vectores esfuerzo asociados.

# Simplificaciones en Elasticidad

- En la 2da parte de la Clase Auxiliar se realizará un problema 2-D en Ansys.
- Es hora de revisar las simplificaciones en Elasticidad Lineal para un Material Elástico Isotrópico.

# Tensor de esfuerzos



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

# Ecuación de equilibrio

$$\text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

Tensor de esfuerzos

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial \mathcal{B}_t$$

Condición para alguna  
fuerza externa

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}, \quad \text{en } \partial \mathcal{B}_u$$

Desplazamiento de  
borde

# Ecuación esfuerzo - deformación

➤ Tensor de deformación

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

➤ Ecuación esfuerzo - deformación

$$\mathbf{T} = \mathcal{C} \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

Ecuación complicada

# Principio de la Energía Potencial Estacionaria

## *Energía elástica de deformación*

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_V (\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \cdot \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \cdot \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \cdot \gamma_{yz}) dV$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_V \{\sigma\}^T \cdot \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \cdot \int_V \{\varepsilon\}^T \cdot [D] \cdot \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \cdot \{u_n\}^T \cdot \left( \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV \right) \cdot \{u_n\}$$

## *Trabajo hecho por las cargas*

$$W = \int_V (u \cdot g_x + v \cdot g_y + w \cdot g_z) dV + \int_A (u \cdot p_x + v \cdot p_y + w \cdot p_z) dA + \{u_n\}^T \cdot \{P_n\}$$

$$W = \{u_n\}^T \cdot \int_V [N]^T \cdot \{g\} dV + \{u_n\}^T \cdot \int_A [N]^T \cdot \{p\} dA + \{u_n\}^T \cdot \{P_n\}$$

## *Energía potencial total*

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \cdot \{u_n\}^T \cdot [K] \cdot \{u_n\} - \{u_n\}^T \cdot \{f\}$$

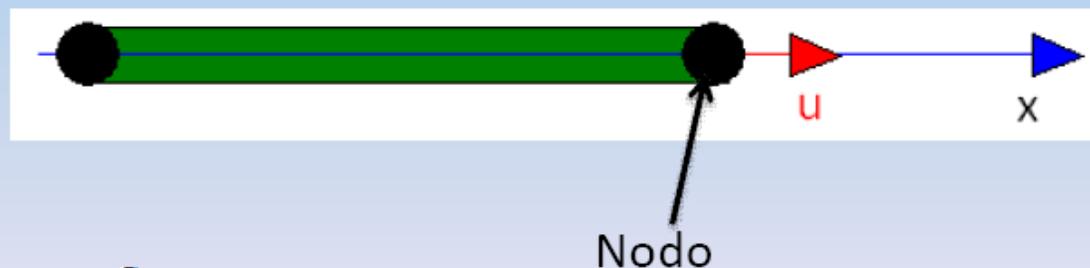
# Simplificaciones en elasticidad

## ➤ Barras

### ➤ Supuestos

- Longitud barra  $\gg$  dimensión en la sección.
- El desplazamiento solo ocurre en una dirección (alargamiento o acortamiento).

- Cada nodo tiene un grado de libertad.



$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Relación esfuerzo-desplazamiento

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}$$

Matriz de rigidez

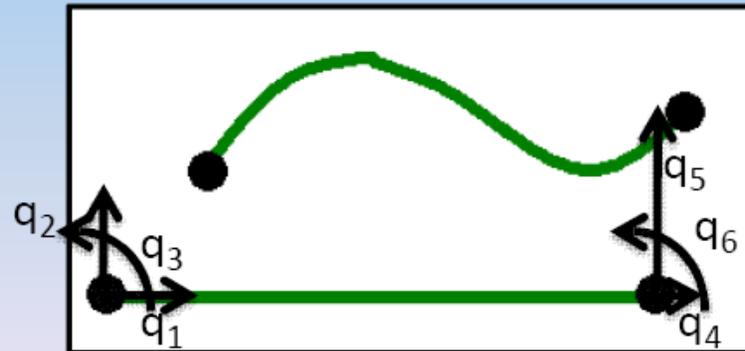
# Simplificaciones en elasticidad

## ➤ Viga (2D)

### ➤ Supuestos

- Longitud total  $\gg$  dimensión en la sección.
- Desplazamiento vertical, horizontal y rotación.
- “Curvatura” es pequeña.

- Cada nodo tiene tres grados de libertad (desplazamientos y rotación).



$$\kappa_{13} = -\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

Relación esfuerzo-desplazamiento

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} EI_z & \\ & E \end{bmatrix}$$

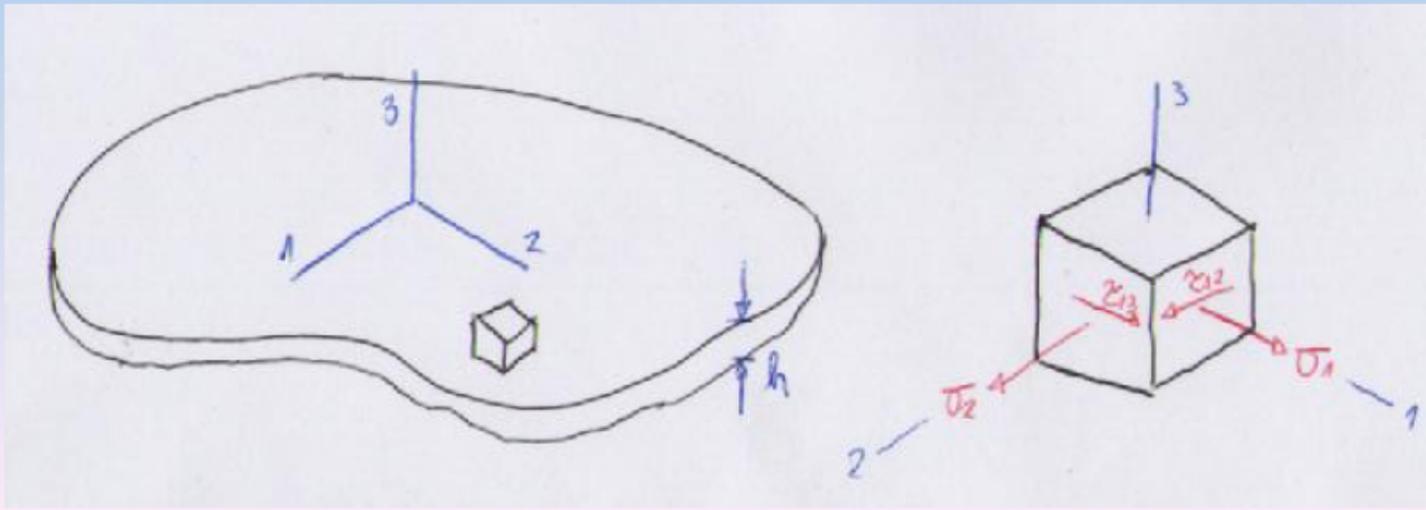
Matriz de rigidez

# Simplificaciones en elasticidad

## ➤ Esfuerzo plano

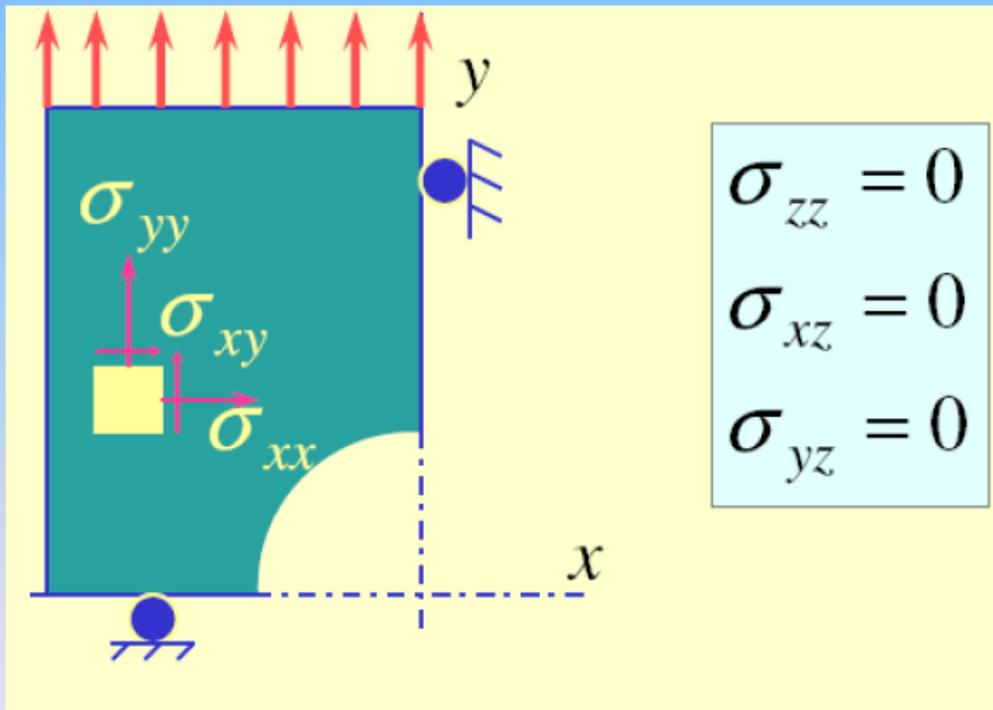
### ➤ Supuestos

- Menor longitud (espesor)  $\ll$  las otras 2 dimensiones .
- Todas las fuerzas externas de superficie o de cuerpo solo tienen componentes en el plano 1-2 y solo dependen de  $x$  e  $y$ .
- **$\tau_{33} \cong \tau_{13} \cong \tau_{23} \cong 0$**



# Simplificaciones en elasticidad

## ➤ Esfuerzo plano



➤ Esfuerzo plano

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

Relaciones esfuerzo-desplazamiento

$$\mathbf{c} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & \\ \nu & 1 & & \\ & & 1-\nu & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez

$$e_{33} = \frac{-\lambda}{(2\mu + \lambda)} (e_{11} + e_{22})$$

Importante!!

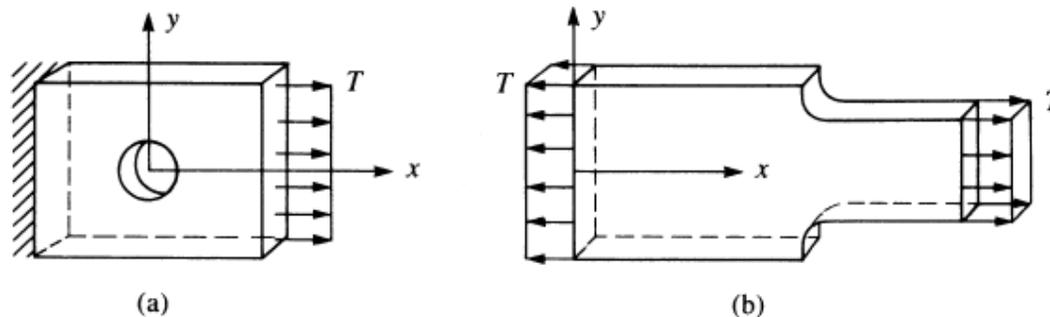
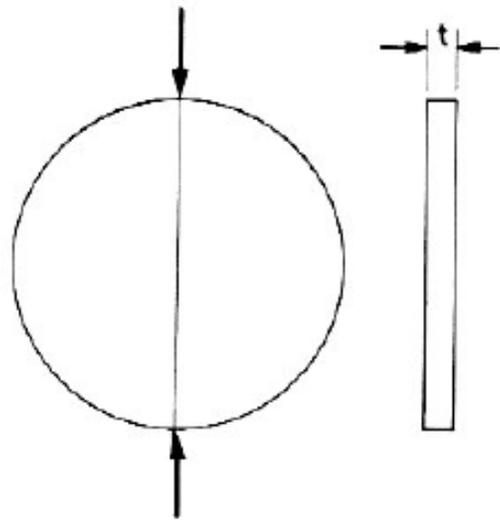
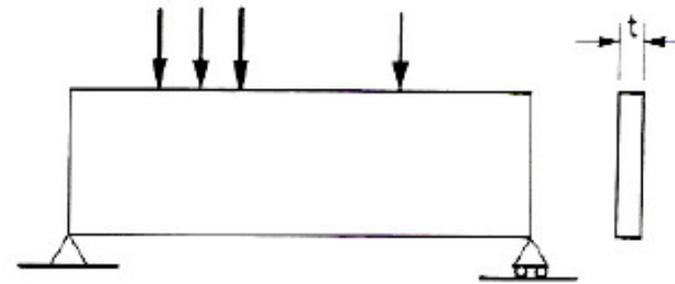


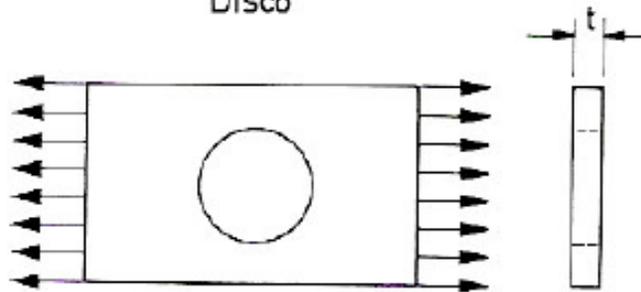
Figure 6-1 Plane stress problems: (a) plate with hole; (b) plate with fillet



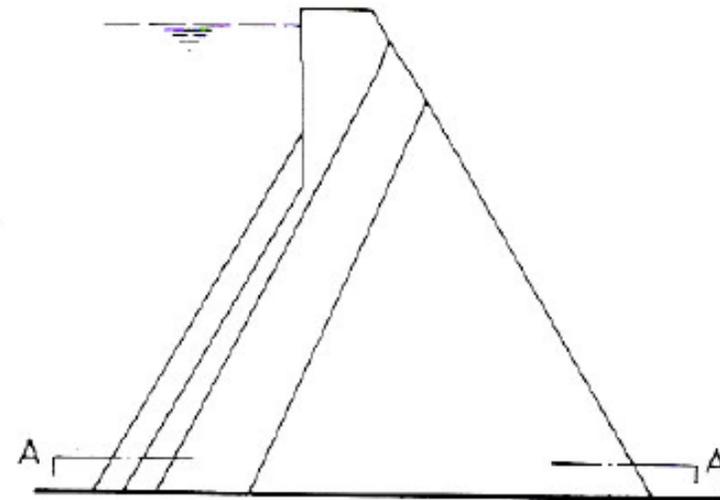
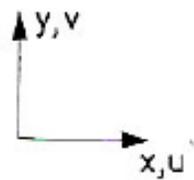
Disco



Viga de gran canto



Placa



Sección A-A

Presa de contrafuertes

# Simplificaciones en Elasticidad

- Deformación Plana

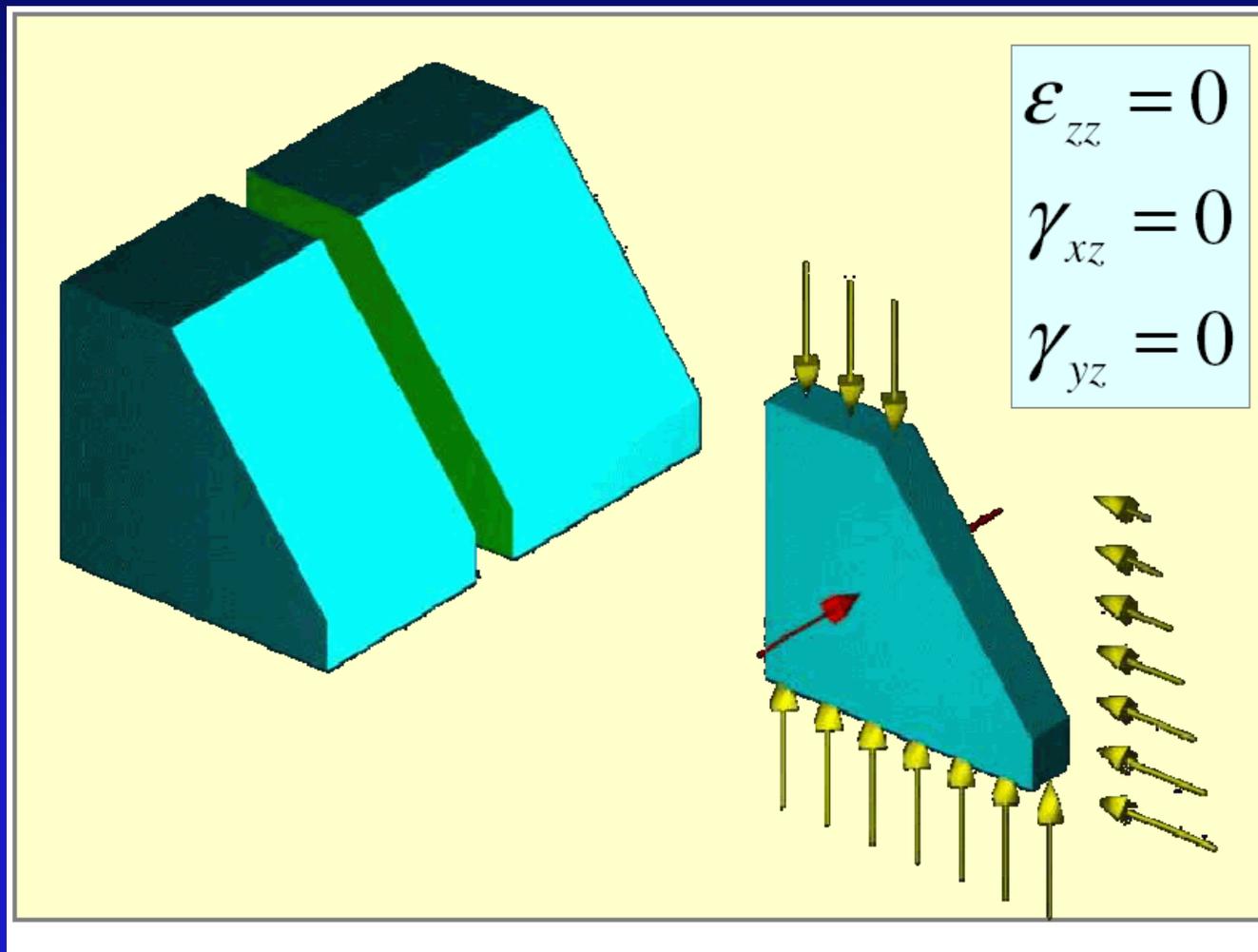
– Supuestos

- Menor longitud (espesor)  $\ll$  las otras 2 dimensiones.

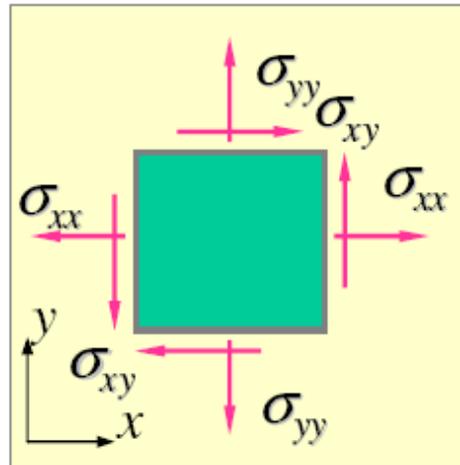
- Se asume  $\epsilon_{i3} = 0$ .

# Simplificaciones en Elasticidad

- Deformación Plana



# Simplificaciones en Elasticidad



*Relaciones  
deformación-  
desplazamiento*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

*Relaciones esfuerzo-deformación*

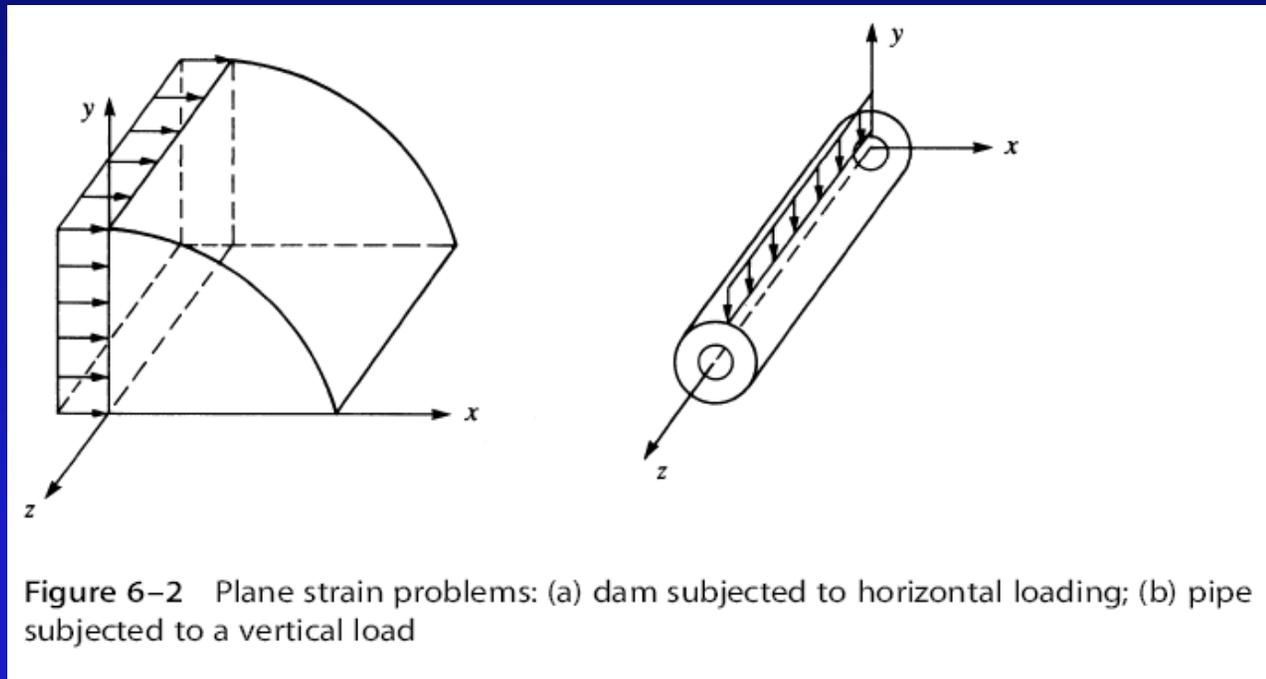
$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & 0 \\ e_2 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \quad e_2 = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \quad e_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\sigma_{zz} = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

# Simplificaciones en Elasticidad

- Deformación Plana



# Simplificaciones en Elasticidad

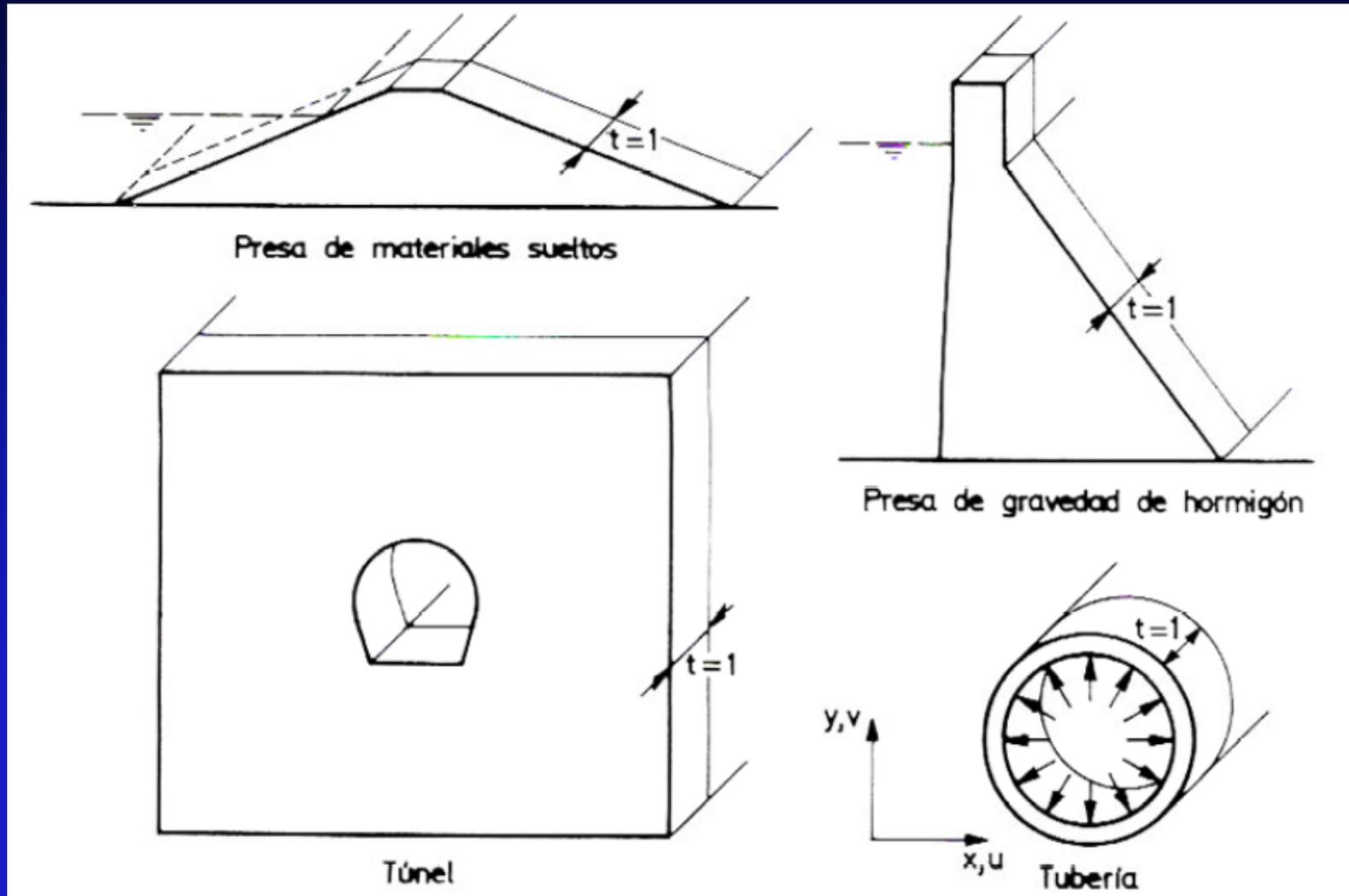


Figura 5.2 Ejemplos de problemas de deformación plana.

# Problema

- Modelar el problema siguiente (Fig.A15-6 del anexo del Shigley).
  - Dibujar el Modelo 2D en el módulo Design-Modeler de Ansys.
  - Utilizar una malla inteligente, probando valores de Relevance y manejando otros
- Validar con la teoría que aparece en Shigley.
- Validar con el principio de la Energía Potencial Total mínima.

## Figure A-15-6

Rectangular filleted bar in bending.  $\sigma_0 = Mc/I$ , where  $c = d/2$ ,  $I = td^3/12$ ,  $t$  is the thickness.

