

Diseño de Elementos Mecánicos

ME-5600

Capítulo 4

Deflexión y Rigidez

Alejandro Ortiz Bernardin

www.cec.uchile.cl/~aortizb

Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de Chile



fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Contenidos del Capítulo

- Constantes de Resorte
- Deflexión por Tensión, Compresión y Torsión
- Deflexión por Flexión
- Métodos para Calcular Deflexión en Vigas
- Deflexión de Elementos Curvos
- Columnas Largas con Carga Centrada
- Columnas de Longitud Intermedia con Carga Centrada
- Columnas con Carga Excéntrica
- Elementos Cortos Sometidos a Compresión
- Estabilidad Elástica



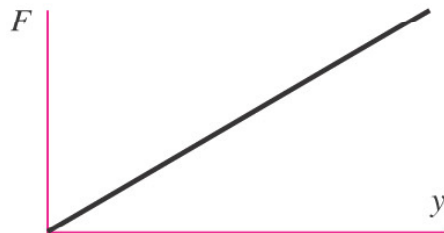
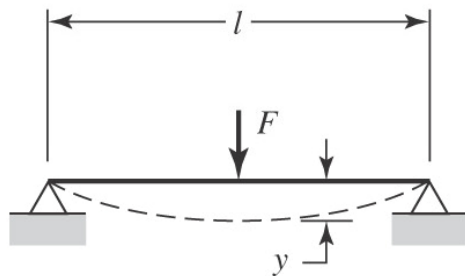
Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Deflexión y Rigidez

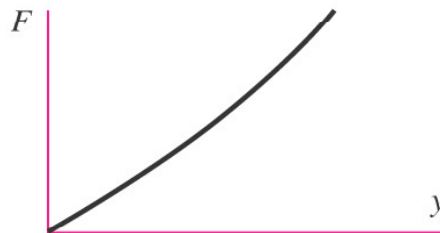
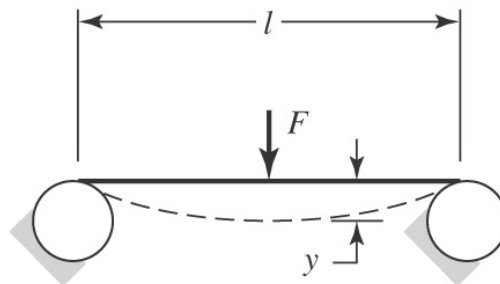
Constantes de Resorte

- **Elasticidad** – propiedad de un material que permite restablecer su configuración original después de haberse deformado
- **Resorte** – elemento mecánico que genera una fuerza cuando éste es deformado

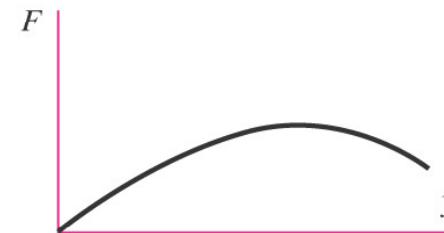
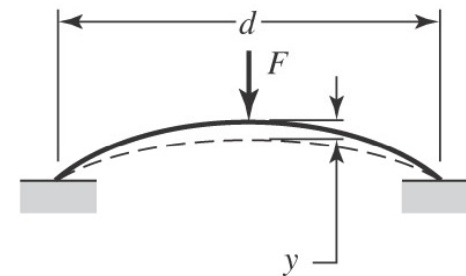
Resorte lineal



*Resorte no lineal
rígido*



*Resorte no lineal
suave*



Constantes de Resorte (Cont.)

- Constante de resorte

$$k(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta y} = \frac{dF}{dy}$$

- Para resortes lineales, k es una constante

$$k = \frac{F}{y}$$



Deflexión por Tensión, Compresión y Torsión

- Extensión o contracción de una barra uniforme en tensión o compresión pura

$$\delta = \frac{Fl}{AE} \quad ; \quad k = \frac{AE}{l}$$

- Deflexión angular (en radianes) de una barra uniforme sólida o tubular sujeta a momento torsor T

$$\theta = \frac{Tl}{GJ} \quad ; \quad k = \frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{l}$$



Deflexión por Flexión

- Curvatura de una viga sometida a un momento flector M

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

- Curvatura de una curva plana

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$

- Pendiente de la viga en un punto x

$$\theta = \frac{dy}{dx}$$

- Si la pendiente es muy pequeña, el denominador en la ecuación de la curvatura se aproxima a la unidad
- Eliminando el radio de curvatura, para vigas con pendientes pequeñas,

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

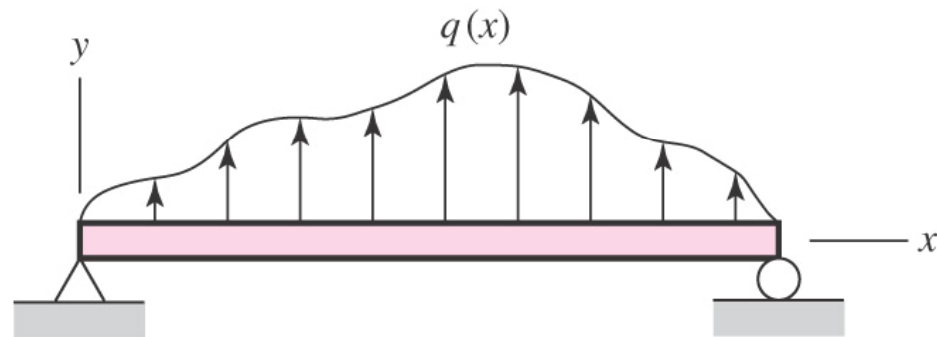


Deflexión por Flexión (Cont.)

- Recordando que

$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = q$$



- Diferenciando sucesivamente

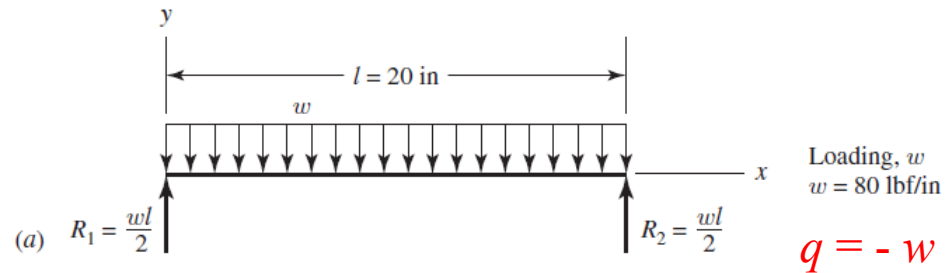
$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{V}{EI} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

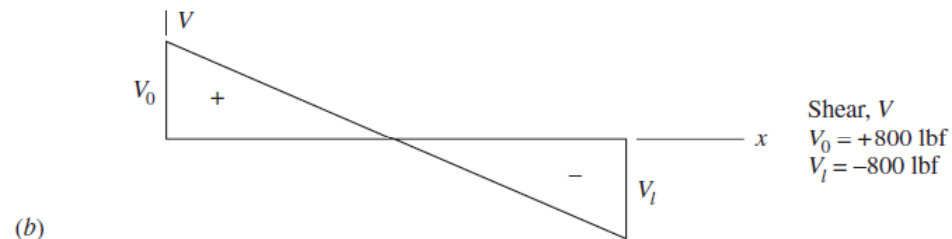
$$\frac{q}{EI} = \frac{d^4y}{dx^4}$$



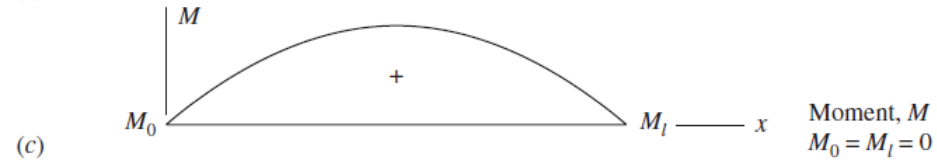
Deflexión por Flexión (Cont.)



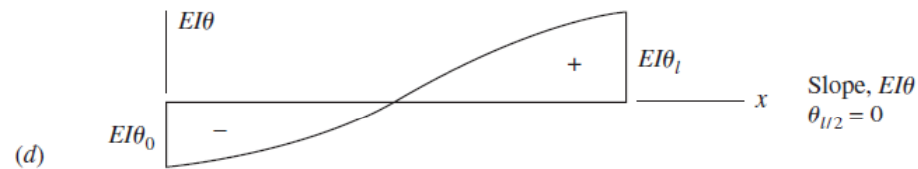
$$\frac{q}{EI} = \frac{d^4 y}{dx^4}$$



$$\frac{V}{EI} = \frac{d^3 y}{dx^3}$$



$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$



$$\theta = \frac{dy}{dx}$$



$$y = f(x)$$



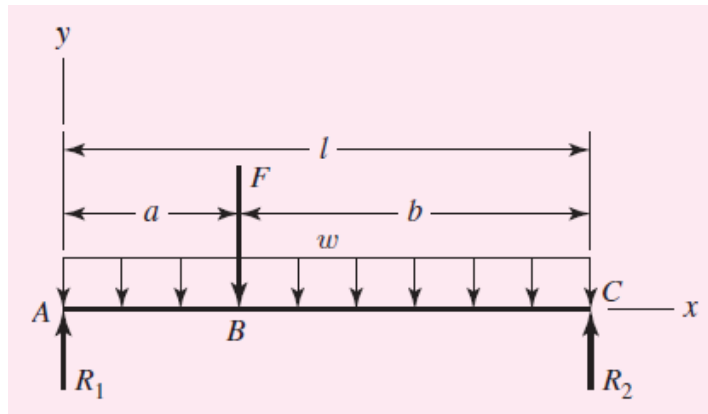
Métodos para Calcular Deflexión en Vigas

- Algunos métodos para resolver el problema de integración de las ecuaciones de deflexión en vigas
 - Superposición
 - Método de área-momento
 - Integración numérica
- Otros métodos basados en enfoques alternativos
 - Métodos de energía (ej. Teorema de Castigliano)
 - Método de Elemento Finito

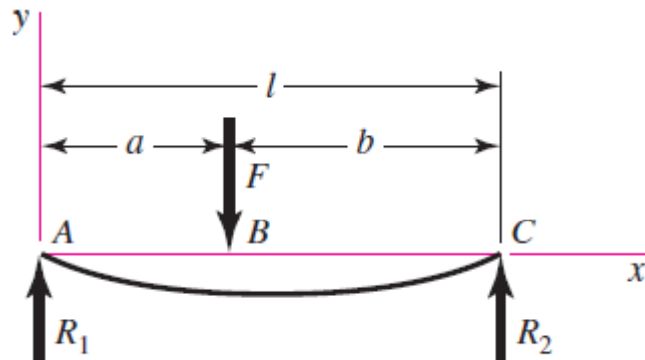
Deflexión de Vigas por Superposición

- El problema se separa en casos de carga simple (por ejemplo, casos de carga cuya solución es conocida)
- Se determinan los efectos de cada carga separadamente para luego sumarlos en el resultado final (superposición)
- Resultados para casos de carga simple con condiciones de contorno típicas están disponibles en la Tabla A-9 del Shigley. También disponibles en el *Roark's Formulas for Stress and Strain*
- Condiciones para la validez del método de superposición
 - Cada efecto está linealmente relacionado con la carga que lo produce
 - Las cargas no crean una condición que afecta el resultado de las otras cargas
 - Las deformaciones resultantes de las cargas son pequeñas

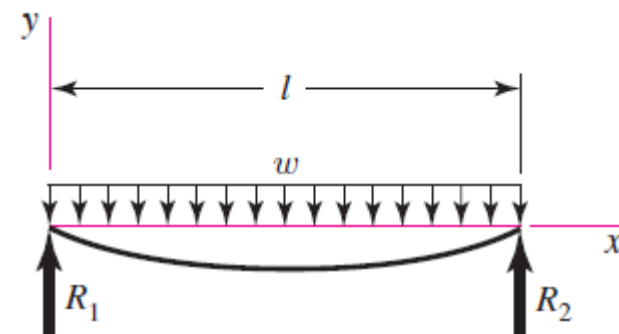
Deflexión de Vigas por Superposición (Cont.)



=



+



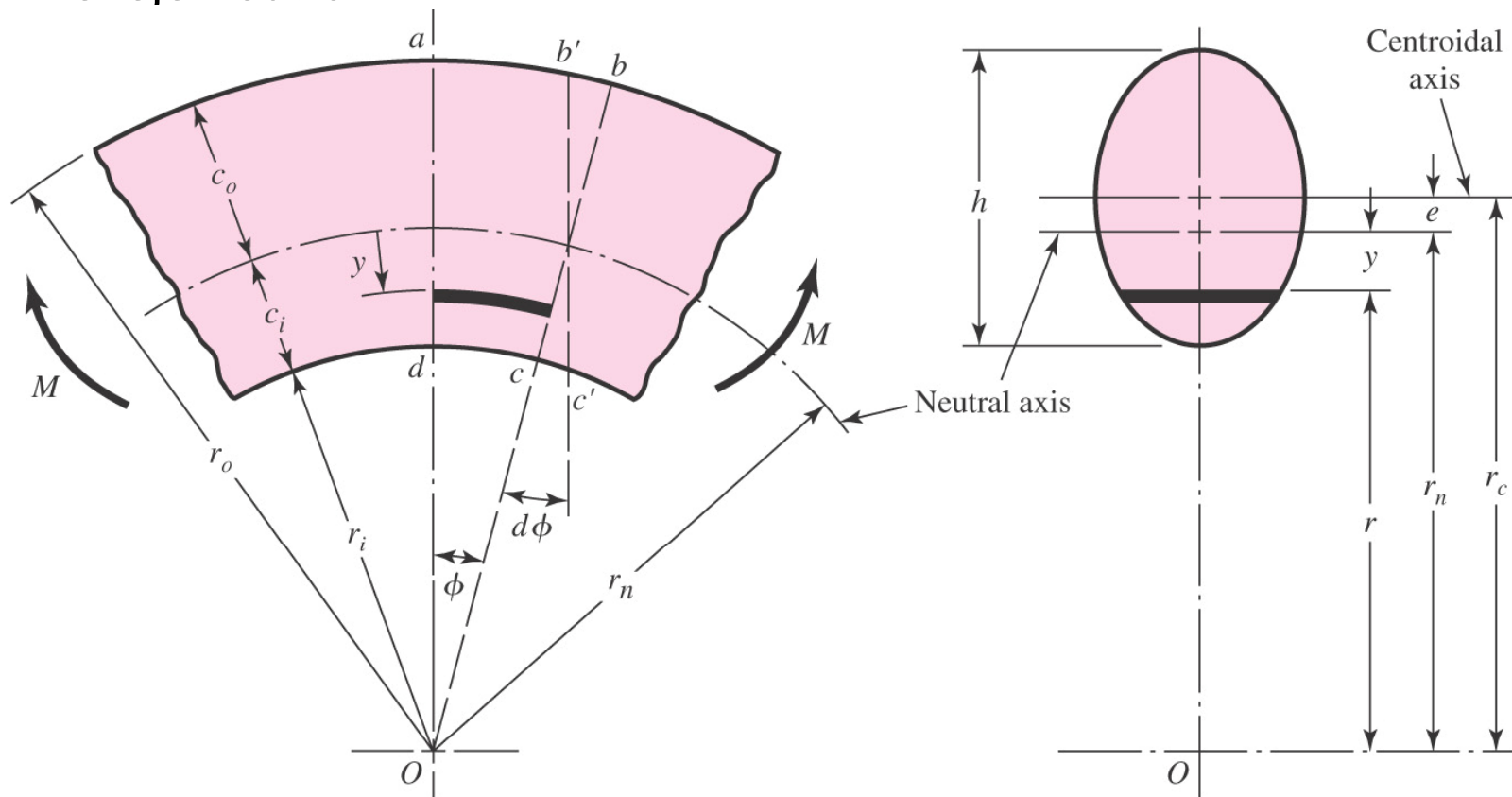
fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

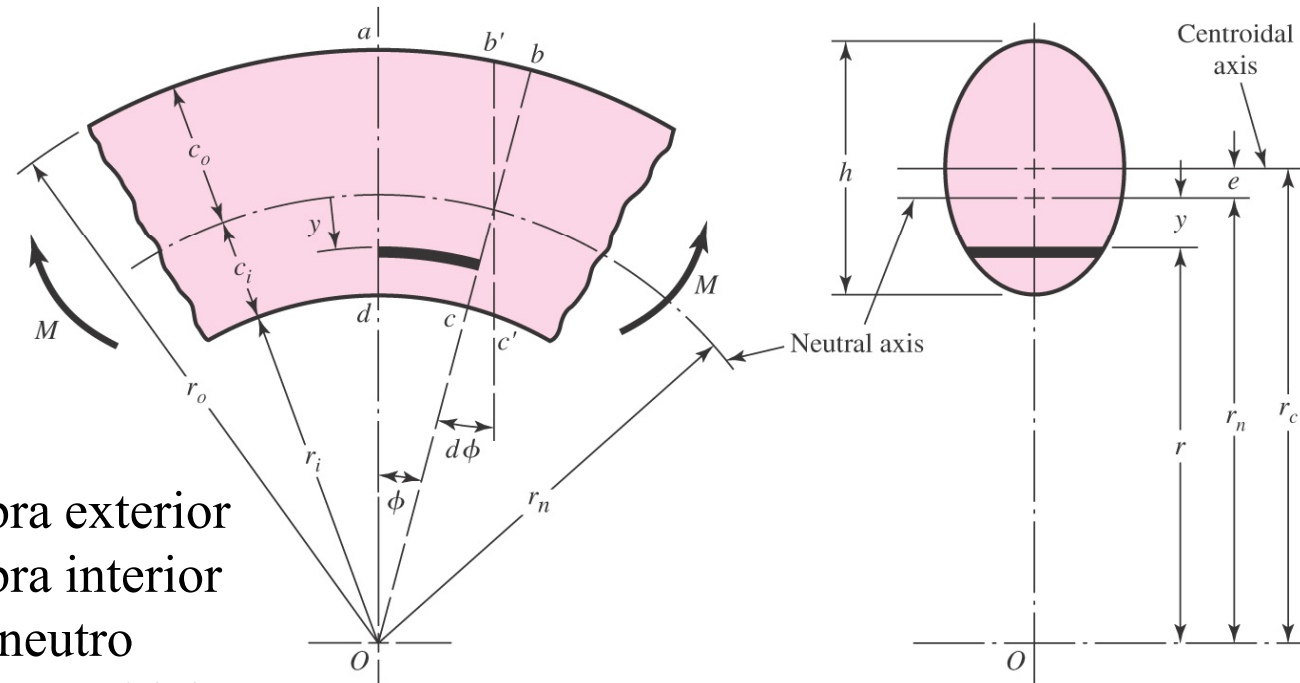
Deflexión y Rigidez

Vigas Curvas

- En vigas curvas gruesas
 - El eje neutro y el eje centroidal no coinciden
 - El esfuerzo de flexión no varía linealmente con la distancia desde el eje neutro



Vigas Curvas (Cont.)



r_o = radio de la fibra exterior

r_i = radio de la fibra interior

r_n = radio del eje neutro

r_c = radio del eje centroidal

h = altura de la sección

c_o = distancia desde el eje neutro a la fibra externa

c_i = distancia desde el eje neutro a la fibra interna

e = distancia desde el eje centroidal al eje neutro = $r_c - r_n$

M = momento flector



fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Deflexión y Rigidez

Vigas Curvas (Cont.)

- Ubicación del eje neutro

$$r_n = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}}$$

- Distribución del esfuerzo

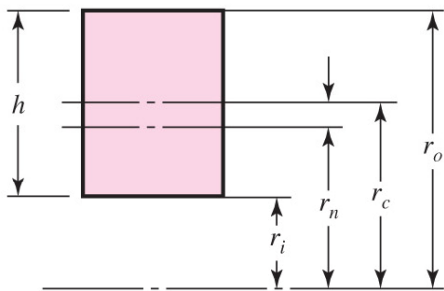
$$\sigma = \frac{My}{Ae(r_n - y)}$$

- Esfuerzo en las superficies interna y externa

$$\sigma_i = \frac{Mc_i}{Aer_i} \quad \sigma_o = -\frac{Mc_o}{Aer_o}$$

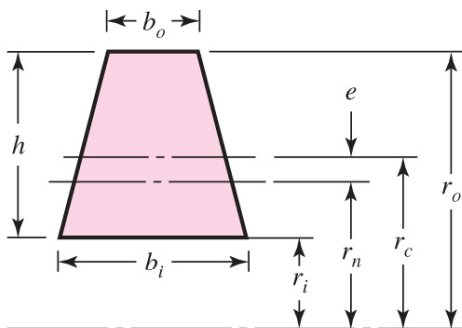


Fórmulas para Secciones de Vigas Curvas



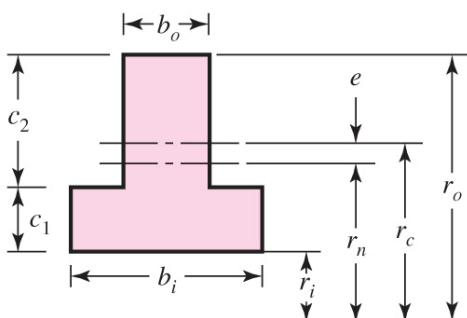
$$r_c = r_i + \frac{h}{2}$$

$$r_n = \frac{h}{\ln(r_o/r_i)}$$



$$r_c = r_i + \frac{h}{3} \frac{b_i + 2b_o}{b_i + b_o}$$

$$r_n = \frac{A}{b_o - b_i + [(b_i r_o - b_o r_i)/h] \ln(r_o/r_i)}$$

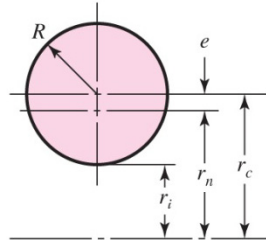


$$r_c = r_i + \frac{b_i c_1^2 + 2b_o c_1 c_2 + b_o c_2^2}{2(b_o c_2 + b_i c_1)}$$

$$r_n = \frac{b_i c_1 + b_o c_2}{b_i \ln[(r_i + c_1)/r_i] + b_o \ln[r_o/(r_i + c_1)]}$$

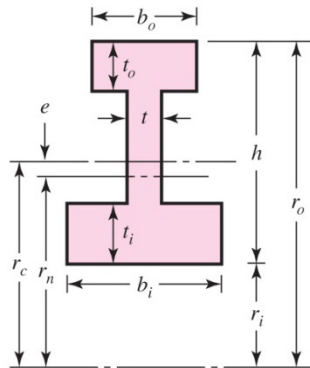


Fórmulas para Secciones de Vigas Curvas



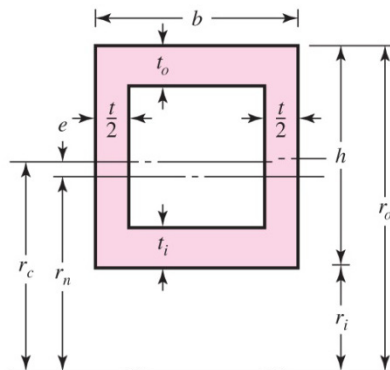
$$r_c = r_i + R$$

$$r_n = \frac{R^2}{2 \left(r_c - \sqrt{r_c^2 - R^2} \right)}$$



$$r_c = r_i + \frac{\frac{1}{2}h^2t + \frac{1}{2}t_i^2(b_i - t) + t_o(b_o - t)(h - t_o/2)}{t_i(b_i - t) + t_o(b_o - t) + ht}$$

$$r_n = \frac{t_i(b_i - t) + t_o(b_o - t) + ht_o}{b_i \ln \frac{r_i + t}{r_i} + t \ln \frac{r_o - t_o}{r_i + t_i} + b_o \ln \frac{r_o}{r_o - t_o}}$$



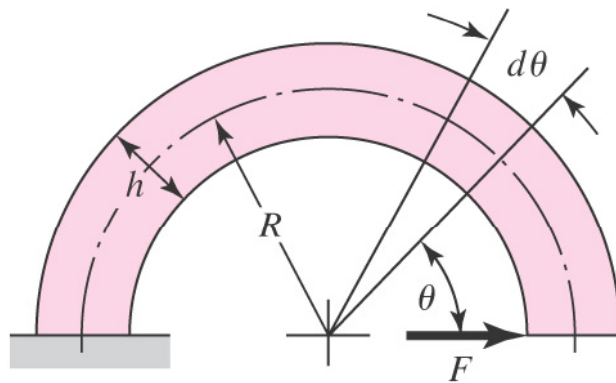
$$r_c = r_i + \frac{\frac{1}{2}h^2t + \frac{1}{2}t_i^2(b - t) + t_o(b - t)(h - t_o/2)}{ht + (b - t)(t_i + t_o)}$$

$$r_n = \frac{(b - t)(t_i + t_o) + ht}{b \left(\ln \frac{r_i + t_i}{r_i} + \ln \frac{r_o}{r_o - t_o} \right) + t \ln \frac{r_o - t_o}{r_i + t_i}}$$

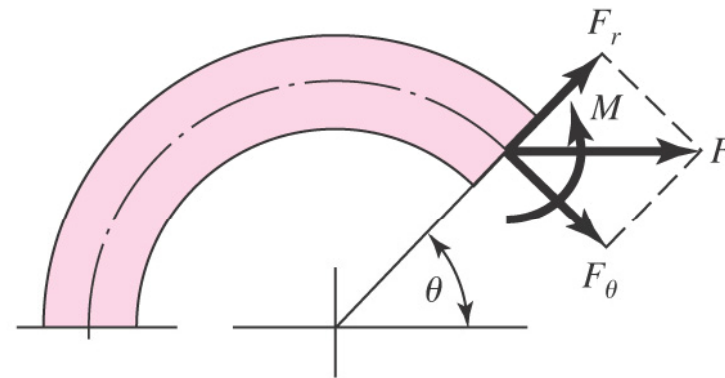


Deflexión de Elementos Curvos

- Caso viga curva gruesa en flexión
- Energía de deformación asociada a
 - Momento flector M
 - Fuerza axial F_θ
 - Momento flector debido a F_θ
 - Corte transversal F_r



(a)



(b)



Deflexión de Elementos Curvos (Cont.)

- Energía de deformación

$$U = \int \frac{M^2 d\theta}{2AeE} + \int \frac{F_\theta^2 R d\theta}{2AE} - \int \frac{MF_\theta d\theta}{AE} + \int \frac{CF_r^2 R d\theta}{2AG}$$

- Deflexión por Teorema de Castigliano

$$\begin{aligned} \delta = \frac{\partial U}{\partial F} = & \int \frac{M}{AeE} \left(\frac{\partial M}{\partial F} \right) d\theta + \int \frac{F_\theta R}{AE} \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial F} \right) d\theta \\ & - \int \frac{1}{AE} \frac{\partial(MF_\theta)}{\partial F} d\theta + \int \frac{CF_r R}{AG} \left(\frac{\partial F_r}{\partial F} \right) d\theta \end{aligned}$$

- Método general para cualquier elemento curvo grueso. Usar límites de integración apropiados



Deflexión de Elementos Curvos (Cont.)

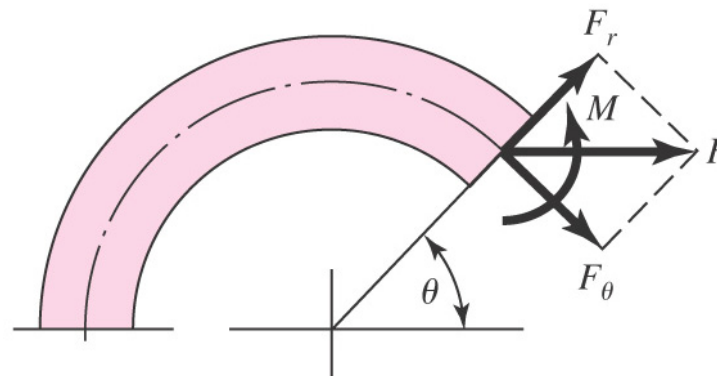
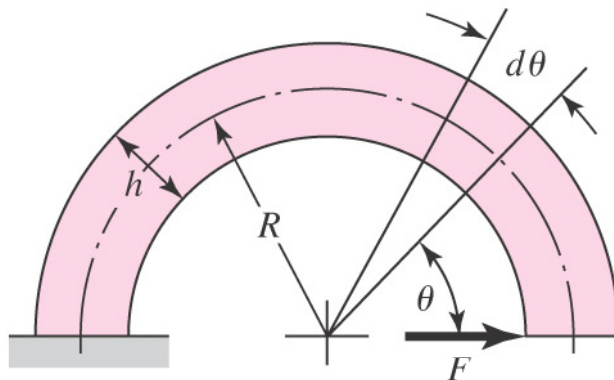
- Para el problema de la figura, se obtiene

$$M = FR \sin \theta \quad \frac{\partial M}{\partial F} = R \sin \theta$$

$$F_{\theta} = F \sin \theta \quad \frac{\partial F_{\theta}}{\partial F} = \sin \theta$$

$$MF_{\theta} = F^2 R \sin^2 \theta \quad \frac{\partial (MF_{\theta})}{\partial F} = 2FR \sin^2 \theta$$

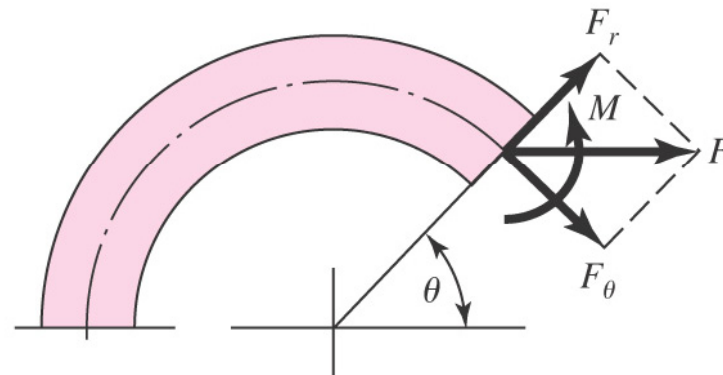
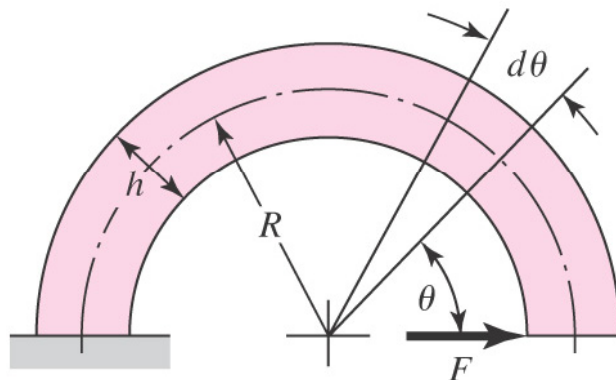
$$F_r = F \cos \theta \quad \frac{\partial F_r}{\partial F} = \cos \theta$$



Deflexión de Elementos Curvos (Cont.)

- Substituyendo y factorizando

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{FR^2}{AeE} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta + \frac{FR}{AE} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta - \frac{2FR}{AE} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \\ &\quad + \frac{CFR}{AG} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi FR^2}{2AeE} + \frac{\pi FR}{2AE} - \frac{\pi FR}{AE} + \frac{\pi CFR}{2AG} = \frac{\pi FR^2}{2AeE} - \frac{\pi FR}{2AE} + \frac{\pi CFR}{2AG}\end{aligned}$$

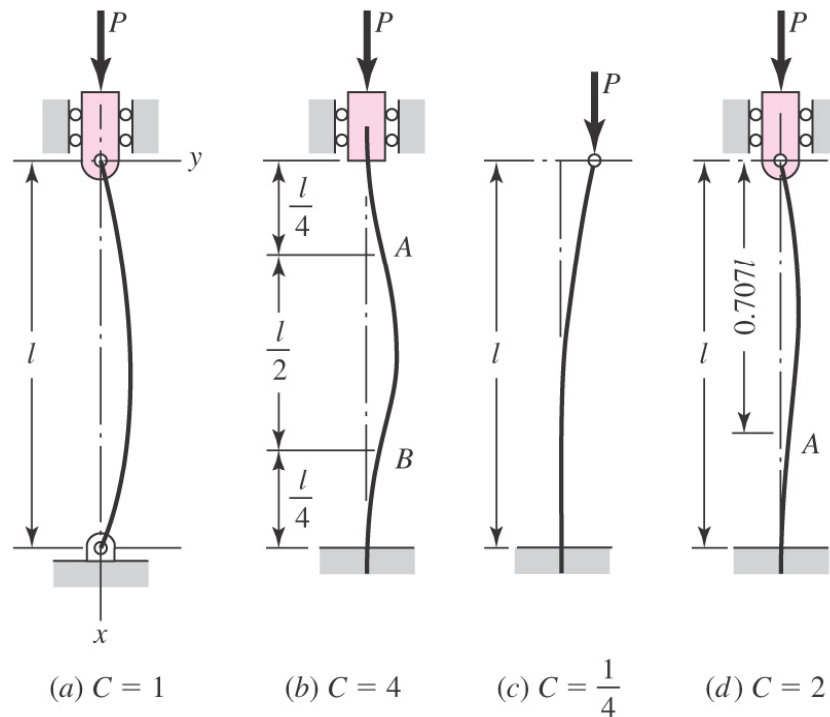


Elementos Sometidos a Compresión

- *Columna* – Elemento cargado en compresión tal que por efecto de su longitud o carga axial, se produce más que una simple compresión (e.g., pandeo)
- Categorías de columnas
 - Columnas largas con carga centrada
 - Columnas de longitud intermedia con carga centrada
 - Columnas con carga excéntrica
 - Puntales o columnas cortas con carga excéntrica

Columnas Largas con Carga Centrada

- Cuando P alcanza la **carga crítica**, la columna se comporta inestable originándose flexión rápidamente
- La **carga crítica** depende de las condiciones de conexión en los extremos



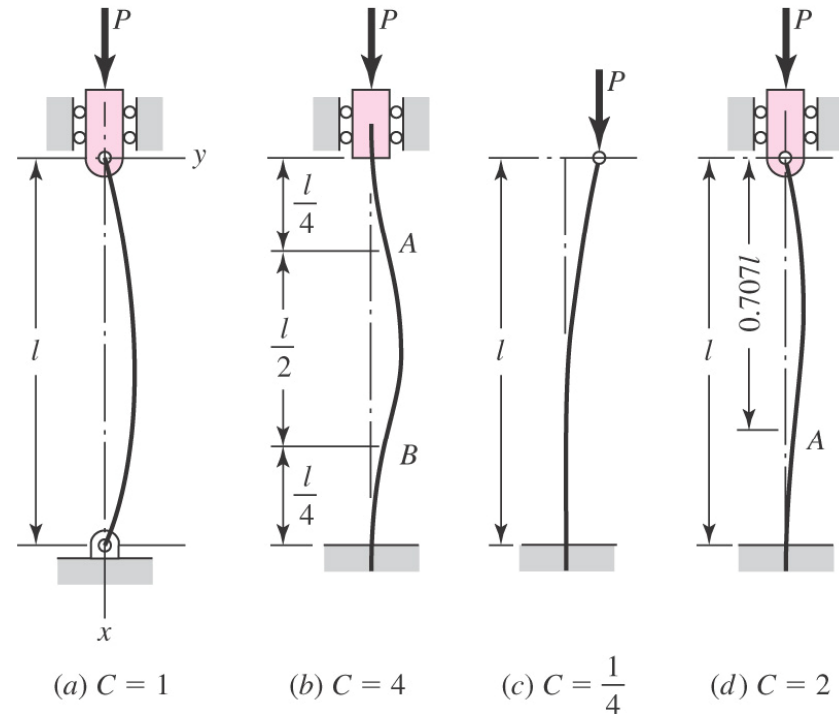
Columnas Largas con Carga Centrada (Cont.)

- En columnas con conexiones rotuladas, la carga crítica está dada por la fórmula de *columna de Euler*

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

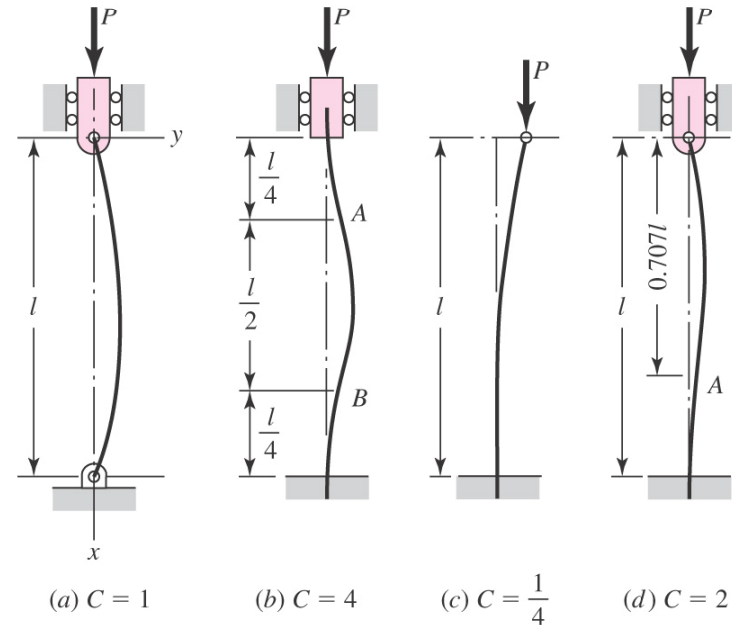
- Para otras condiciones de conexión

$$P_{cr} = \frac{C\pi^2 EI}{l^2}$$



Columnas Largas con Carga Centrada (Cont.)

- Conexiones fijas son difíciles de obtener en la práctica
- Usualmente se usan valores más conservativos (valores recomendados) para C



Column End Conditions	End-Condition Constant C		
	Theoretical Value	Conservative Value	Recommended Value*
Fixed-free	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Rounded-rounded	1	1	1
Fixed-rounded	2	1	1.2
Fixed-fixed	4	1	1.2

*To be used only with liberal factors of safety when the column load is accurately known.



fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Deflexión y Rigidez

Columnas Largas con Carga Centrada (Cont.)

- Usando $I = Ak^2$, donde A es el área seccional y k es el radio de giro, la fórmula para la columna de Euler puede expresarse como

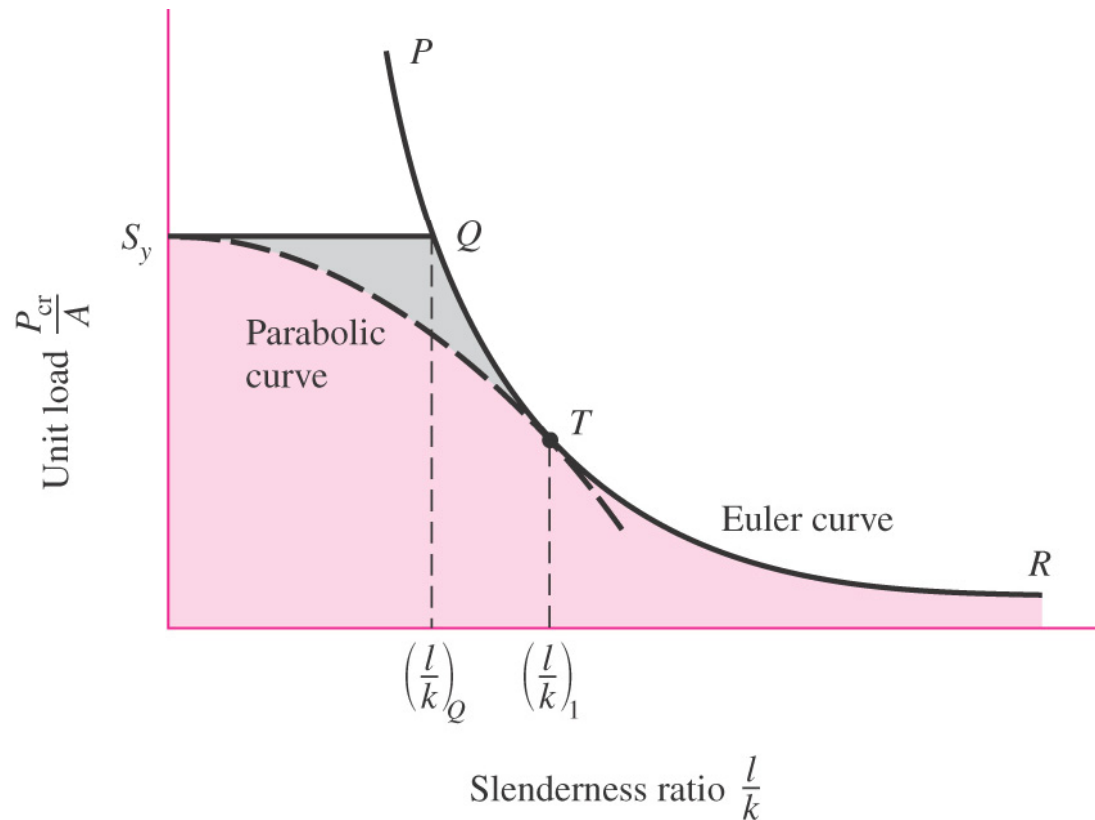
$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{C\pi^2 E}{(l/k)^2}$$

- l/k es la *razón de esbeltez* usada para clasificar columnas de acuerdo al largo de ellas
- P_{cr}/A es la *carga crítica unitaria* definida como la carga por unidad de área necesaria para colocar a la columna en una condición de *equilibrio inestable*

Columnas Largas con Carga Centrada (Cont.)

- Ploteando P_{cr}/A vs l/k , con $C = 1$ se obtiene la curva PQR

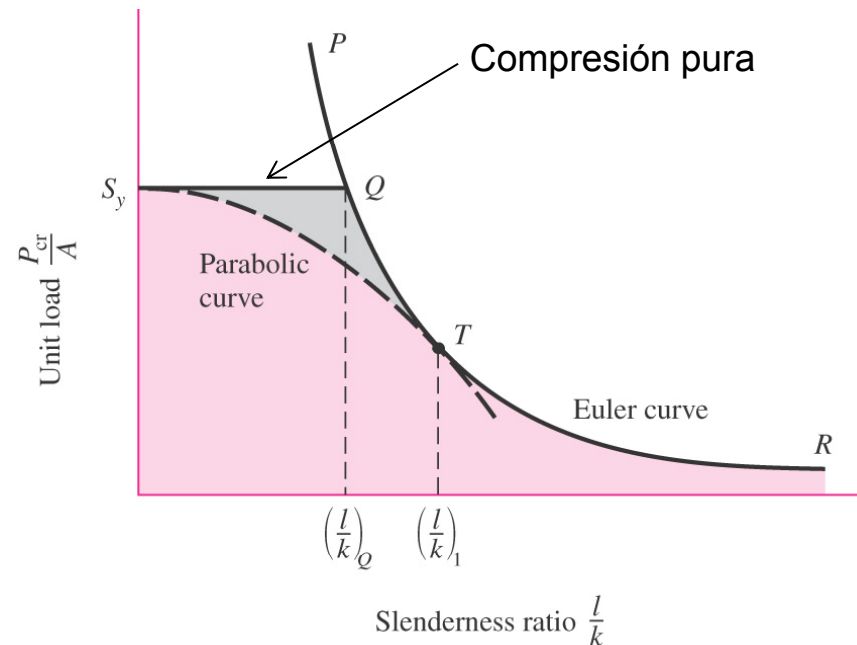
$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{C\pi^2 E}{(l/k)^2}$$



Columnas Largas con Carga Centrada (Cont.)

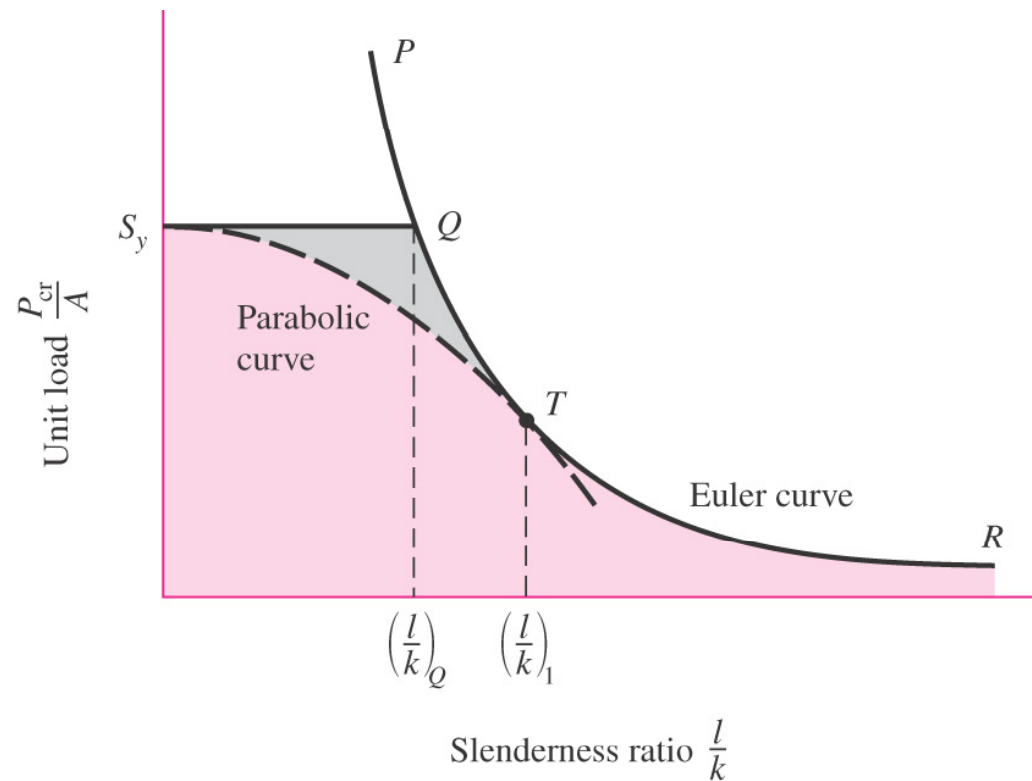
- Ensayos demuestran numerosas fallas en la vecindad del punto Q (zona color plomo)
- Como el pandeo es repentino y catastrófico, se desea un procedimiento más conservativo cercano a Q
- El punto T es típicamente definido tal que $P_{cr}/A = S_y/2$, lo que da

$$\left(\frac{l}{k}\right)_1 = \left(\frac{2\pi^2 CE}{S_y}\right)^{1/2}$$



Columnas Largas con Carga Centrada (Cont.)

- Para $(l/k) > (l/k)_1$, usar la fórmula de Euler
- Para $(l/k) \leq (l/k)_1$, usar la curva parabólica entre S_y y T



fcfm

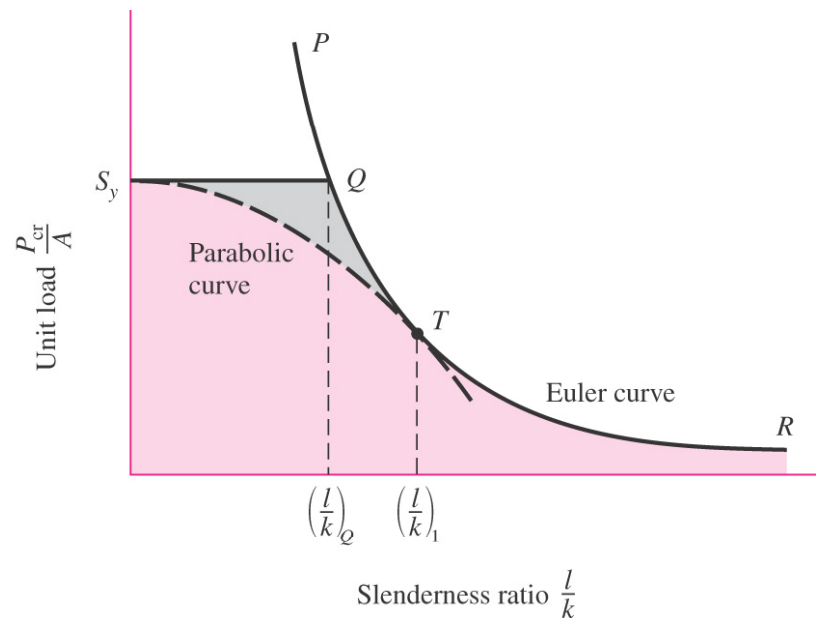
Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Deflexión y Rigidez

Columnas Long. Intermedia Carga Centrada

- Para columnas de longitud intermedia, donde $(l/k) > (l/k)_1$, usar la curva parabólica entre S_y y T
- La fórmula parabólica (*J.B. Johnson*) está dada por

$$\frac{P_{cr}}{A} = S_y - \left(\frac{S_y}{2\pi} \frac{l}{k} \right)^2 \frac{1}{CE} \quad \frac{l}{k} \leq \left(\frac{l}{k} \right)_1$$

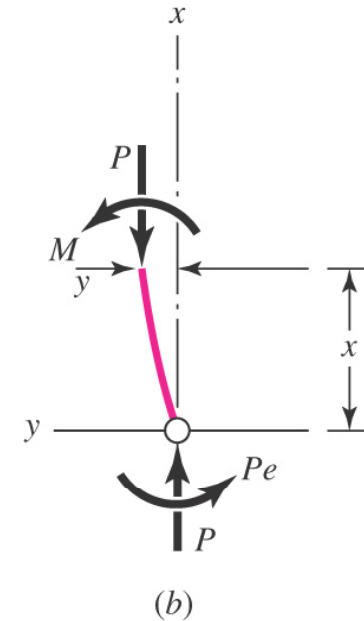
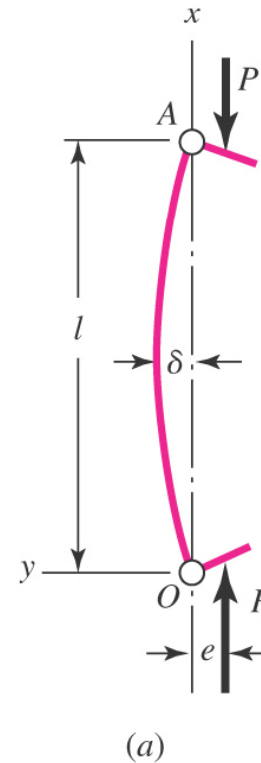


Columnas con Carga Excéntrica

- En la mitad de la columna, donde $x = l/2$

$$\delta = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{l}{2} \right) - 1 \right]$$

$$M_{\max} = P(e + \delta) = Pe \sec \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$



Columnas con Carga Excéntrica (Cont.)

- El esfuerzo de compresión máximo incluye componente axial y de momento

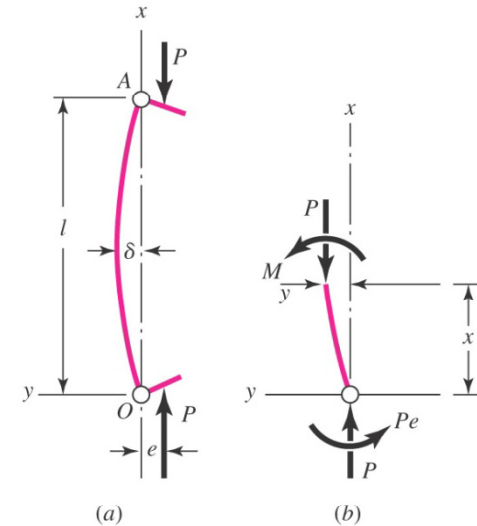
$$\sigma_c = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{Ak^2}$$

- Substituyendo $M_{\max}$

$$\sigma_c = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{k^2} \sec \left(\frac{l}{2k} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right]$$

- Usando S_{yc} como el máximo valor para σ_c , y resolviendo para P/A , se obtiene la **fórmula de la secante de la columna**

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1 + (ec/k^2) \sec[(l/2k)\sqrt{P/AE}]}$$

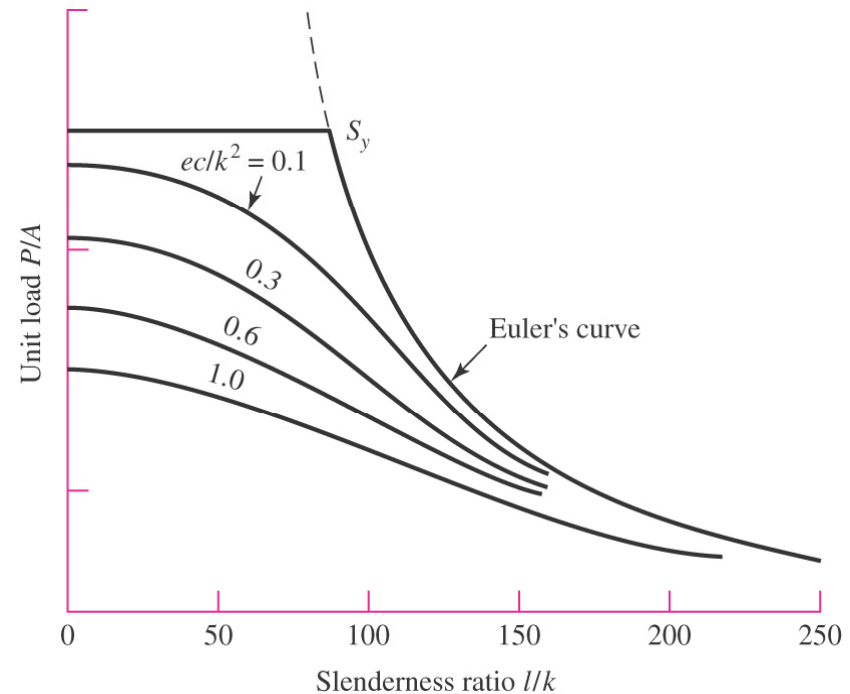


Columnas con Carga Excéntrica (Cont.)

- Fórmula de la secante de la columna

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1 + (ec/k^2) \sec[(l/2k)\sqrt{P/AE}]}$$

- ec/k^2 es la *razón de excentricidad*
- Ploteando para varios ec/k^2



Deflexión y Rigidez



fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

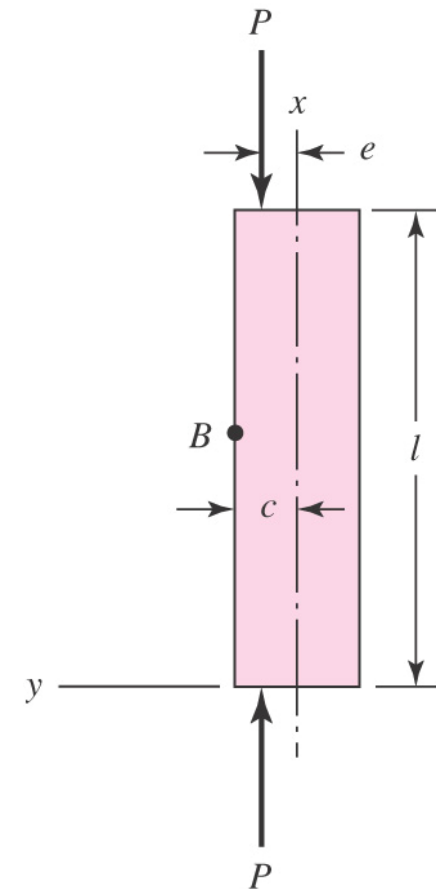
Elementos Cortos Sometidos a Compresión

- *Puntal* – elemento corto sometido a compresión
- Si existe excentricidad, el esfuerzo máximo está en *B* con compresión y flexión

$$\sigma_c = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} + \frac{PecA}{IA} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{ec}{k^2} \right)$$

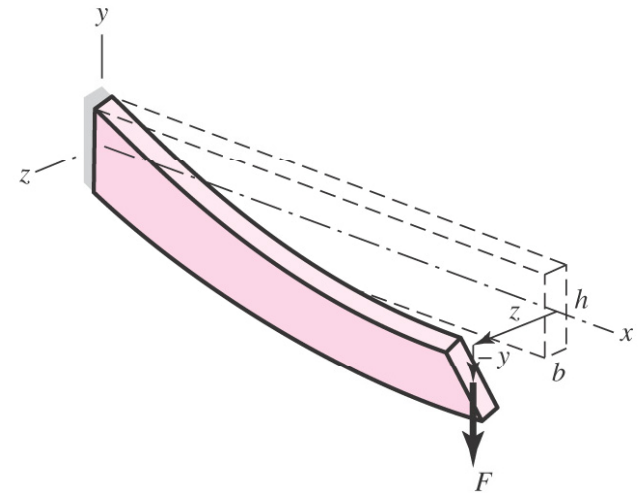
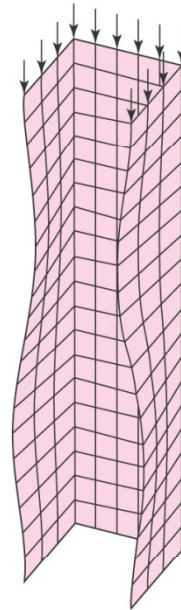
- Ecuación anterior no es función de la altura
- Difiere de la ecuación de la secante en que asume pequeños efectos de la deflexión por flexión
- Si la deflexión por flexión se limita a 1% de la excentricidad, entonces la relación de esbeltez límite para un puntal es

$$\left(\frac{l}{k} \right)_2 = 0.282 \left(\frac{AE}{P} \right)^{1/2}$$



Estabilidad Elástica

- Inestabilidad debida a pandeo está presente en elementos que son
 - Cargados en compresión (directamente o indirectamente)
 - Largos o delgados
 - No arriostrados
- La inestabilidad puede ser
 - Local o global
 - Elástica o plástica
 - Por flexión o torsión



fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Deflexión y Rigidez