

Diseño de Elementos Mecánicos

ME-5600

Capítulo 3

Análisis de Carga y Esfuerzo

Alejandro Ortiz Bernardin

www.cec.uchile.cl/~aortizb

Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de Chile

Contenidos del Capítulo

- Diagramas de Cuerpo Libre
- Diagramas de Momento y Corte
- Esfuerzo Plano y Tridimensional
- Deformación Elástica
- Esfuerzo Uniformemente Distribuido
- Esfuerzos Normales para Vigas en Flexión
- Esfuerzos Cortantes para Vigas en Flexión
- Esfuerzos Debidos a Torsión
- Concentración de Esfuerzos
- Esfuerzos en Cilindros Presurizados
- Esfuerzos en Ajustes a Presión y por Contracción
- Esfuerzos Térmicos
- Esfuerzos de Contacto



Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Carga y Esfuerzo

Equilibrio y Diagrama de Cuerpo Libre

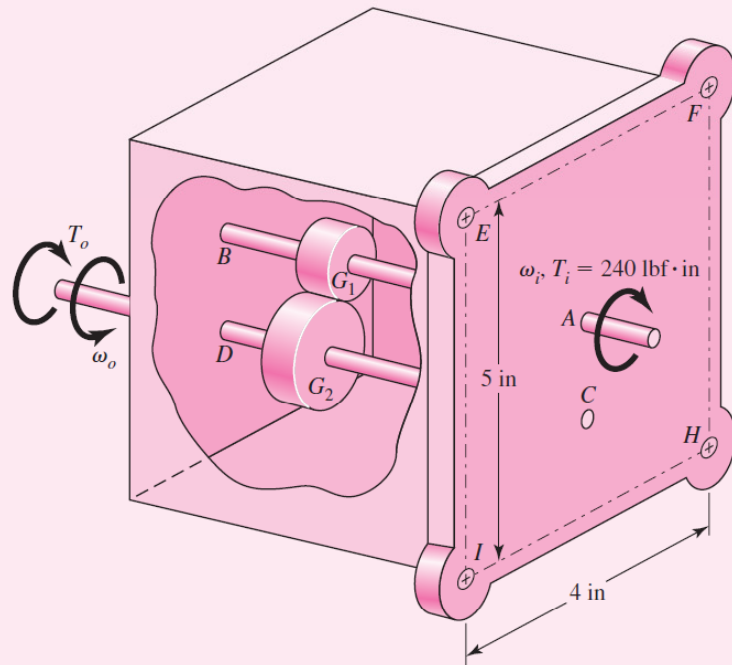
- La suma de todas las *fuerzas* y todos los *momentos* actuando en un sistema en *equilibrio* es cero:

$$\sum F = 0$$

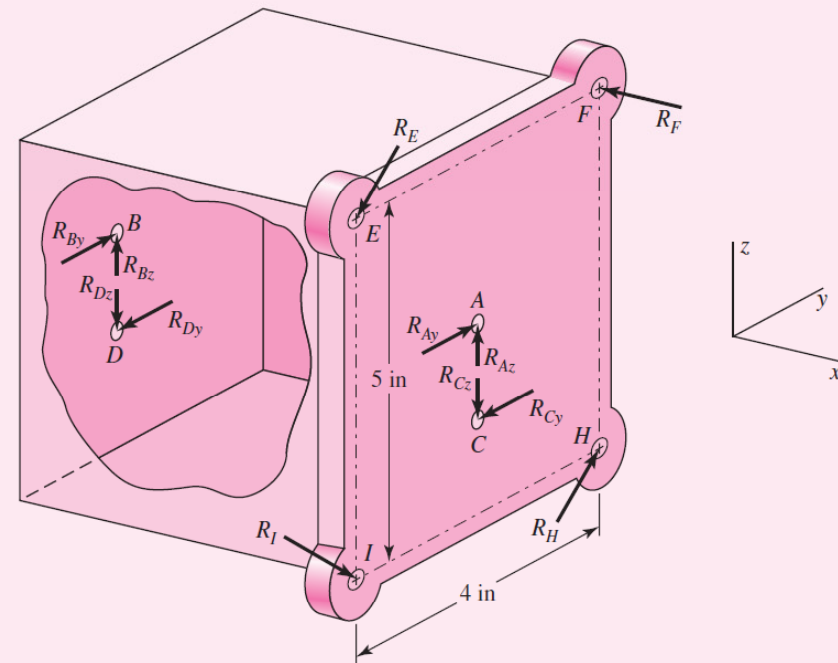
$$\sum M = 0$$

- El objetivo de un diagrama de cuerpo libre es conocer todas las fuerzas y momentos que actúan en un sistema
- Un diagrama de cuerpo libre simplifica el análisis dado que permite dividir en varias partes un sistema complejo para analizarlas por separado

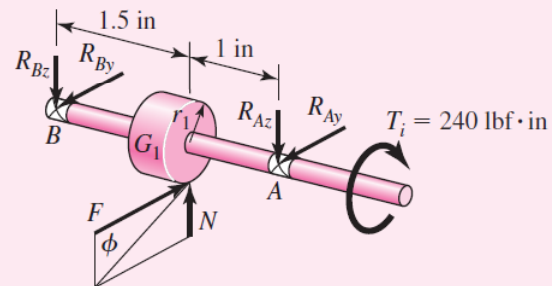
Equilibrio y Diagrama de Cuerpo Libre (Cont.)



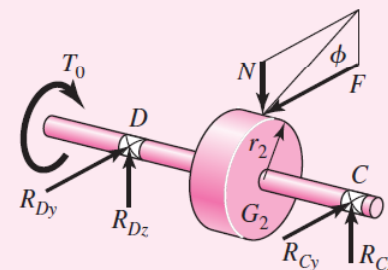
(a) Gear reducer



(b) Gear box



(c) Input shaft



(d) Output shaft



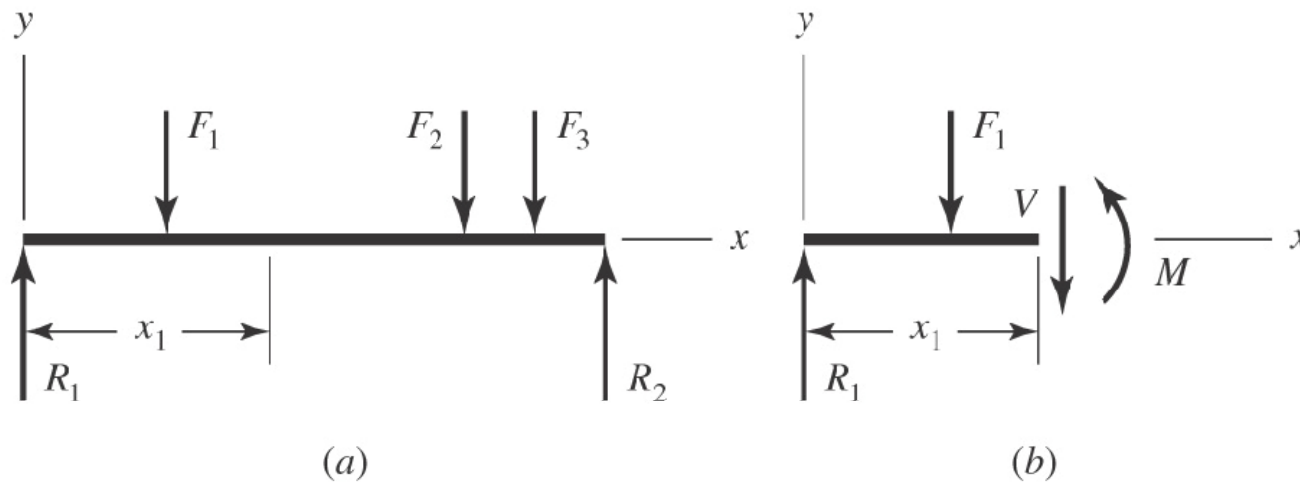
fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Carga y Esfuerzo

Diagramas de Corte y Momento en Vigas

- Cortar las vigas en cualquier punto x_1
- Fuerza de corte interna V y momento de flexión M deben asegurar equilibrio

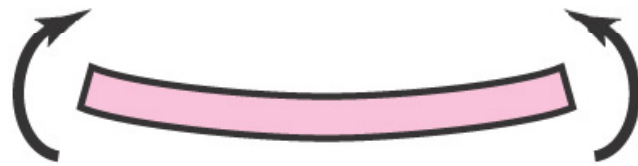


fcfm

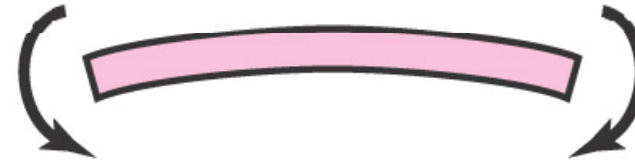
Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Carga y Esfuerzo

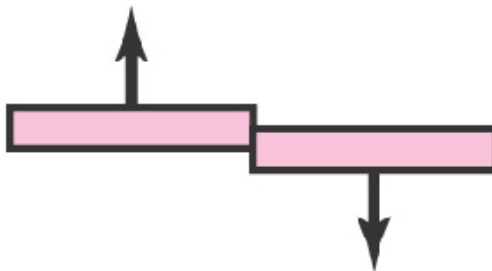
Convención de Signos Para Corte y Momento



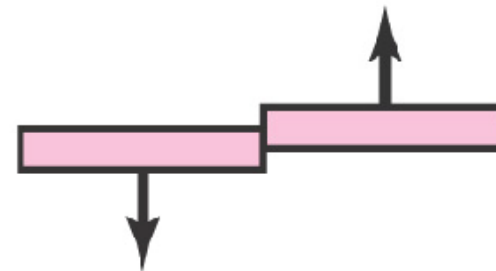
Positive bending



Negative bending



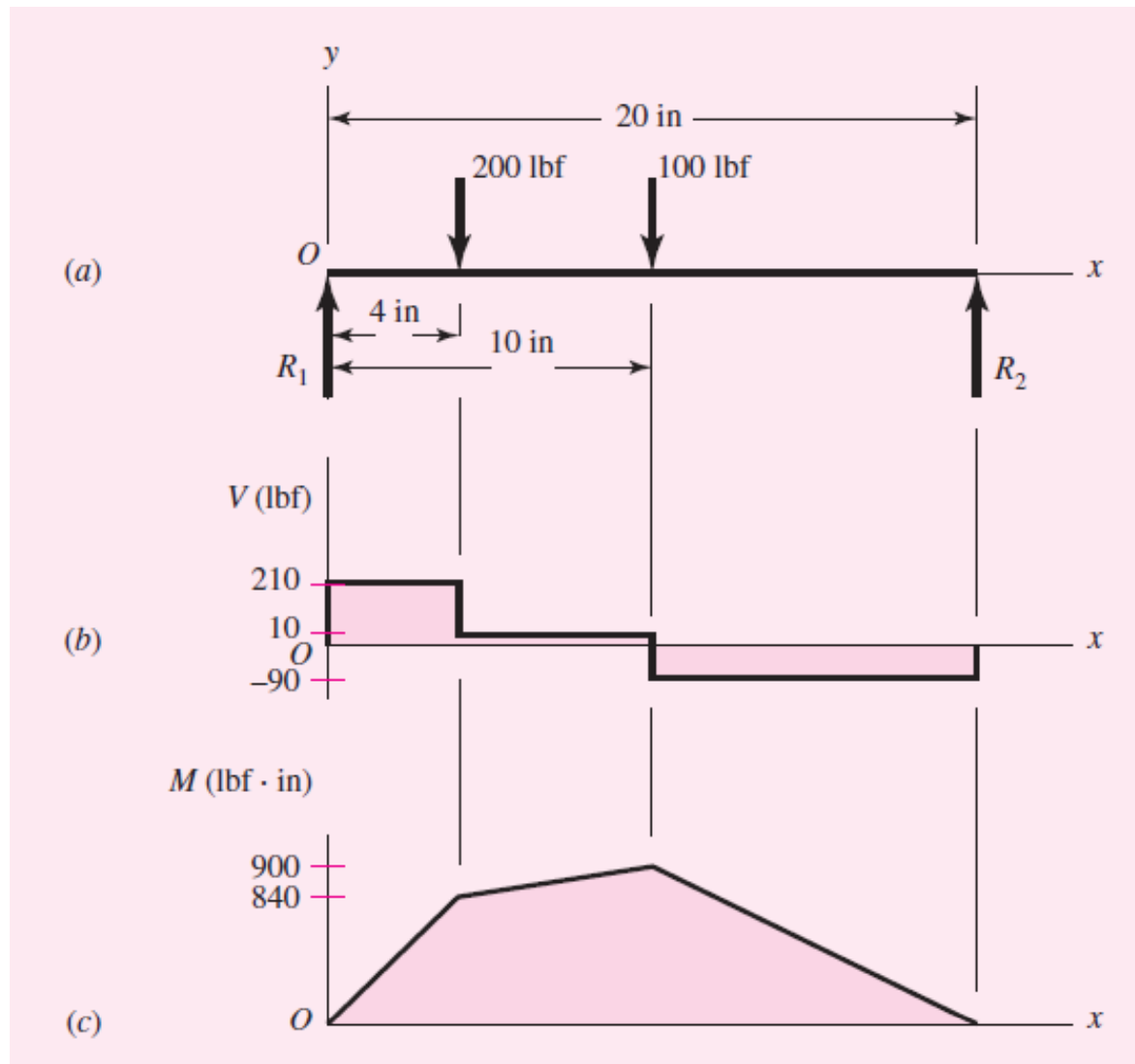
Positive shear



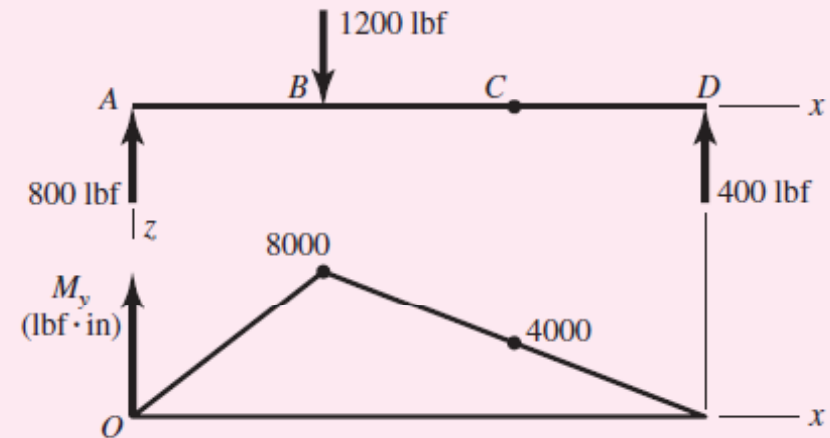
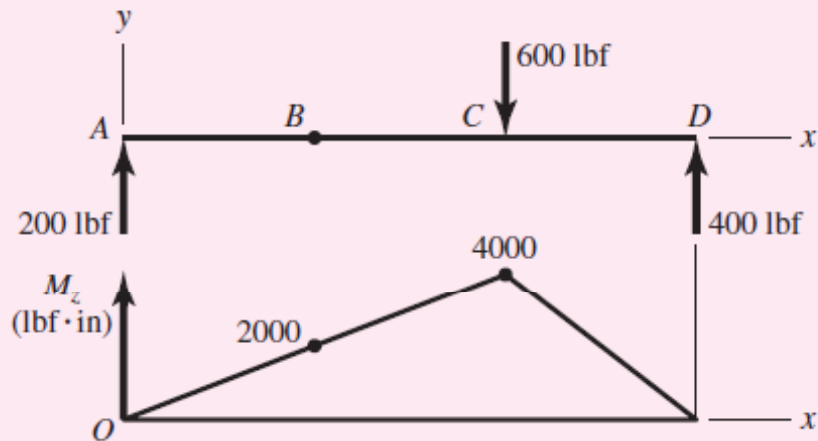
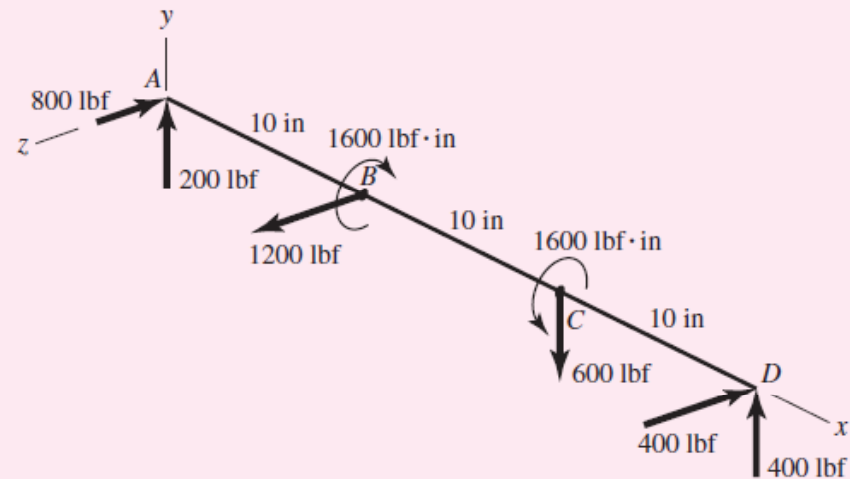
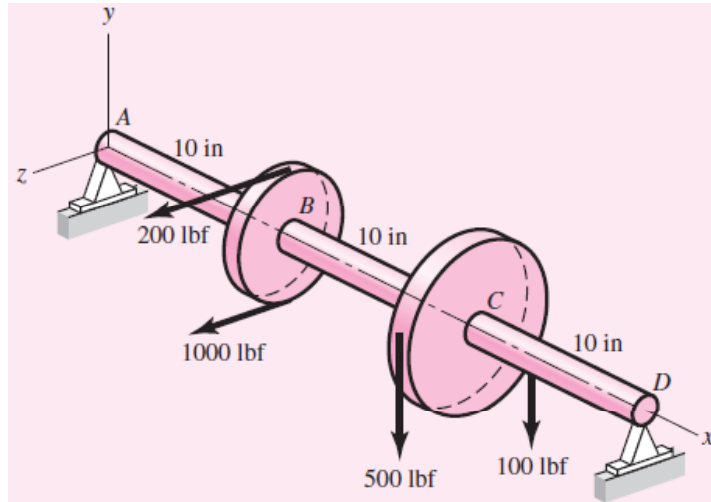
Negative shear



Diagramas de Corte-Momento



Diagramas de Momento en Dos Planos

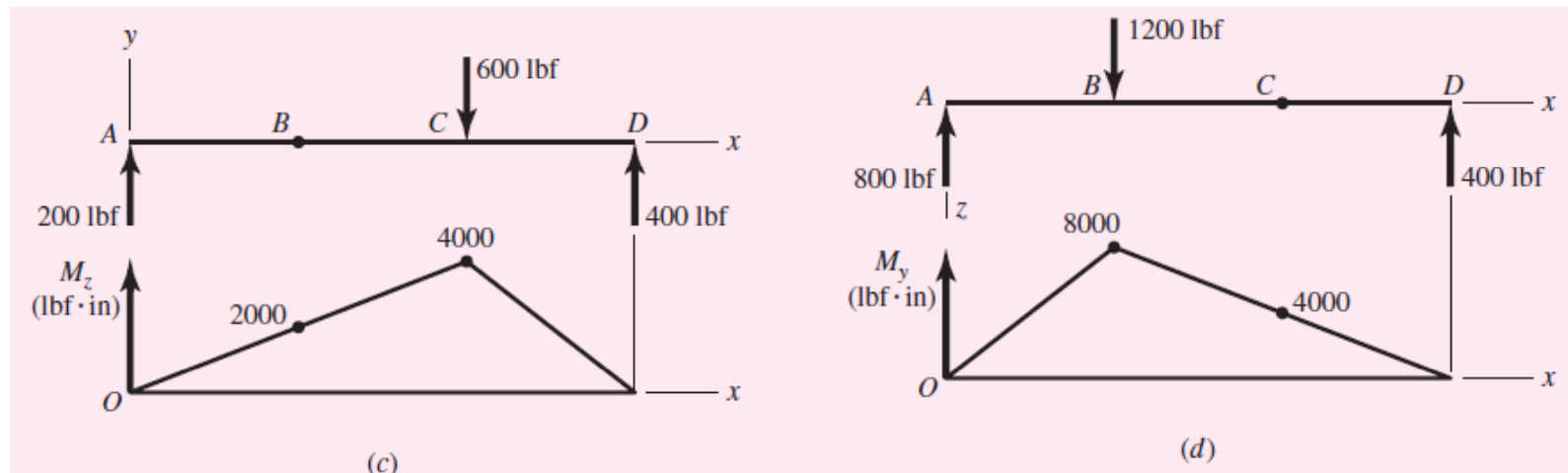


fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Carga y Esfuerzo

Diagramas de Momento en Dos Planos (Cont.)



El momento total es la suma vectorial:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

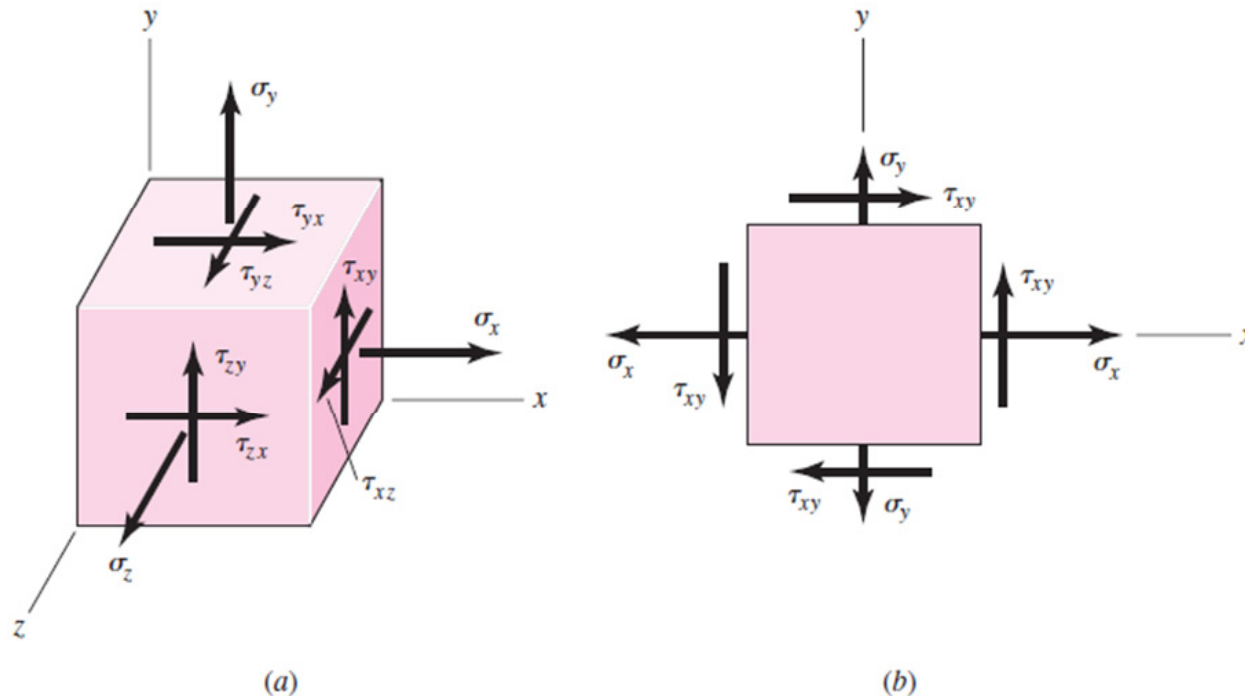
En el punto B el momento total es:

$$M_B = \sqrt{8000^2 + 2000^2} = 8246 \text{ lbf-in}$$

Esfuerzo

- *Esfuerzo normal* es normal a una superficie y es denotado σ
- *Esfuerzo de corte tangencial* es tangente a una superficie y es denotado τ
- *Esfuerzo normal* actuando hacia afuera de una superficie es un esfuerzo de tracción
- Esfuerzo normal actuando hacia adentro de una superficie es un *esfuerzo compresivo*
- La unidad de esfuerzo en el Sistema Inglés es libras por pulgadas cuadradas (psi)
- La unidad de esfuerzo en el Sistema Internacional (SI) es Newton por metro cuadrado (N/m^2)
- $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ pascal (Pa)}$

Esfuerzo (Cont.)

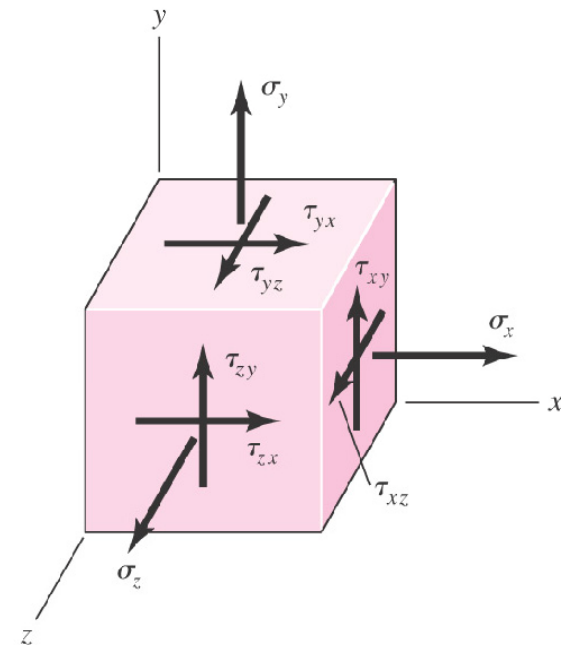


- Representa el esfuerzo en un punto
- Dirección de las coordenadas es arbitraria
- Si se eligen coordenadas tal que el corte es cero, entonces se obtienen los esfuerzos principales



Componentes Cartesianas del Esfuerzo

- Definidas por tres superficies mutuamente ortogonales en un punto dentro de un cuerpo
- Cada superficie puede tener esfuerzos de corte y esfuerzos normales
- El primer subíndice indica la dirección de la normal a la superficie
- El segundo subíndice indica la dirección del esfuerzo de corte

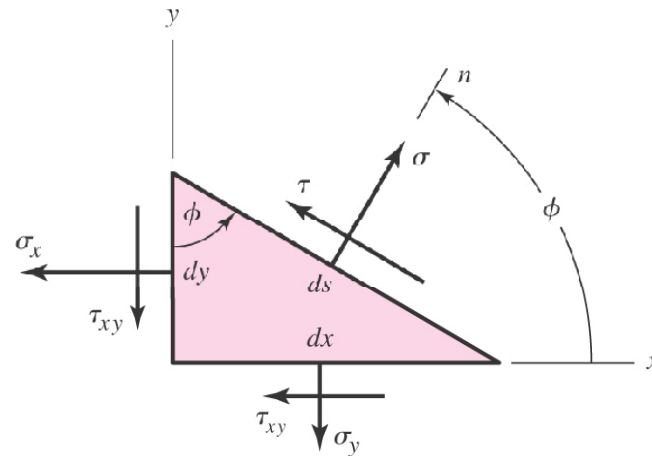
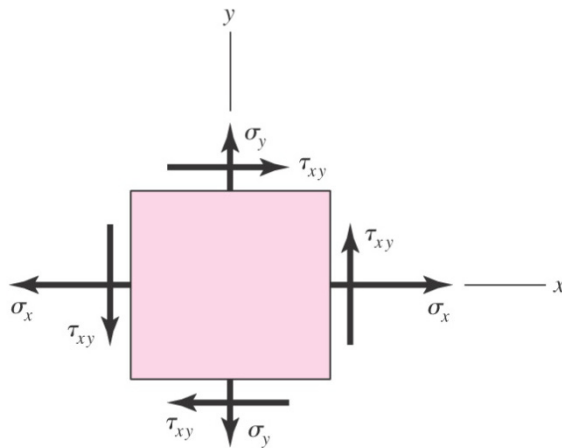


Ecuaciones de Transformación (Esfuerzo Plano)

- Cortando el cubo de esfuerzos en un ángulo arbitrario y balanceando esfuerzos, se llegan a las siguientes *Ecuaciones de Transformación* para esfuerzo plano:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi$$



Ecuaciones de Transformación (Esfuerzo Plano)

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi$$

- Diferenciando la ecuación de arriba con respecto a ϕ e igualando a cero, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\tan 2\phi_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- Los dos valores para ϕ definen las dos *direcciones principales*
- El ángulo entre las direcciones principales es de 90°
- Los esfuerzos en las direcciones principales son los *esfuerzos principales (máximo y mínimo)* y son *esfuerzos normales*
- Los *esfuerzos de corte* son cero en la superficie que define alguna dirección principal



Ecuaciones de Transformación (Esfuerzo Plano)

Substituyendo

$$\tan 2\phi_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

en

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi$$

Se obtienen los dos valores no nulos para los esfuerzos principales máximo y mínimo:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Observar que $\sigma_3 = 0$



fcfm

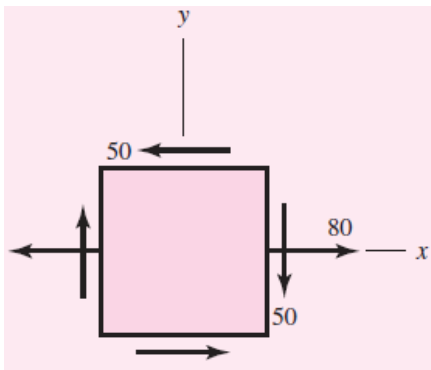
Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Carga y Esfuerzo

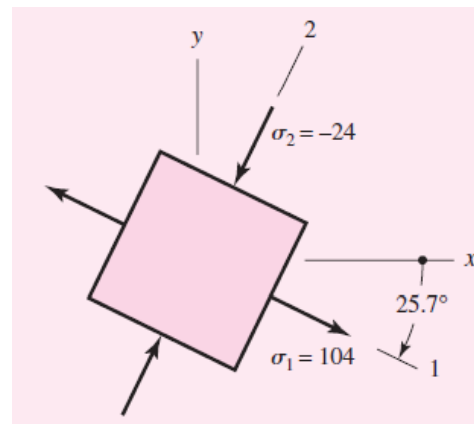
Ecuaciones de Transformación (Esfuerzo Plano)

- De manera similar, se puede obtener que los *esfuerzos de corte máximos* están en superficies ubicadas a $\pm 45^\circ$ desde las direcciones principales
- Los dos valores de corte extremos son:

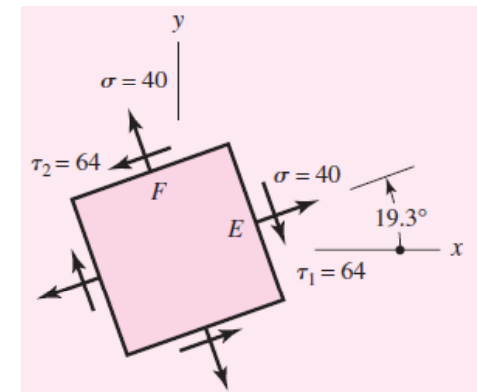
$$\tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Orientación x-y



Orientación esfuerzos principales



Orientación esfuerzos de corte máximo



Esfuerzo Tridimensional General

- Los esfuerzos son en general 3-D
- Elementos en esfuerzo plano tienen una superficie con esfuerzos nulos
- Para los casos en que no hay superficies con esfuerzos nulos, los esfuerzos principales se encuentran resolviendo las raíces de la siguiente ecuación cúbica:

$$\begin{aligned} &\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 \\ &+ (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma \\ &- (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned}$$

Esfuerzo Tridimensional General (Cont.)

- Siempre hay tres esfuerzos de corte extremos

$$\tau_{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{1/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

- El *esfuerzo de corte máximo* es el más grande
- Los esfuerzos principales son usualmente ordenados como $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ en cuyo caso

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Deformación Elástica

- Ley de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon$$

- E es el Módulo de Young o Módulo de Elasticidad
- Tensión en una dirección produce contracción (deformación negativa) en otra dirección perpendicular
- Para esfuerzo axial en dirección x,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

- ν es el Coeficiente de Poisson. ($\nu \sim 0.3$ para acero)

Deformación Elástica (Cont.)

- Para un elemento de esfuerzo que desarrolla σ_x , σ_y , σ_z simultáneamente,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$



Deformación Elástica (Cont.)

- Ley de Hooke para corte

$$\tau = G\gamma$$

- La deformación de corte (γ), conocida como deformación ingenieril, es el cambio que desarrolla un ángulo recto de un elemento de esfuerzo cuando está sujeto a corte puro
- G es el Módulo Elástico de Corte o Módulo de Rigidez
- Para un material lineal, isotrópico y homogéneo,

$$E = 2G(1 + \nu)$$

Esfuerzo Uniformemente Distribuido

- Esfuerzo uniformemente distribuido se refiere usualmente a tensión pura, compresión pura o corte puro
- Para tensión y compresión,

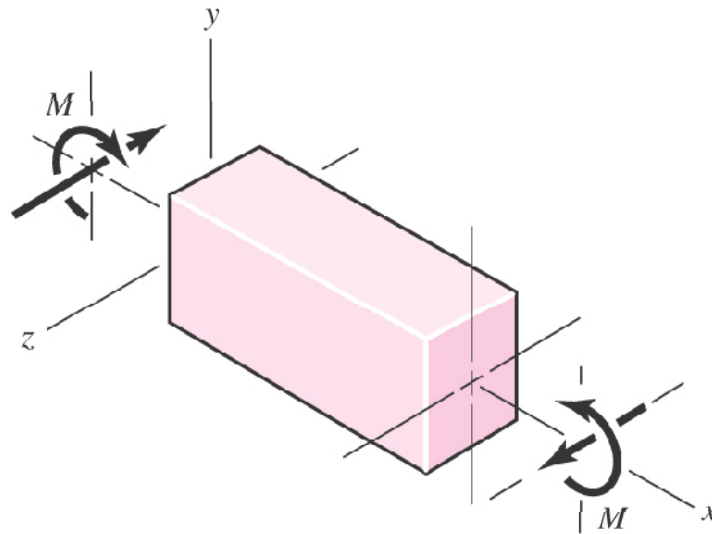
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

- Para corte puro,

$$\tau = \frac{V}{A}$$

Esfuerzos Normales para Vigas en Flexión

- Viga recta en flexión positiva
- Eje x es el *eje neutral*
- Plano xz es el *plano neutro*
- En este caso, el *eje neutral* coincide con el *eje centroidal*



fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Carga y Esfuerzo

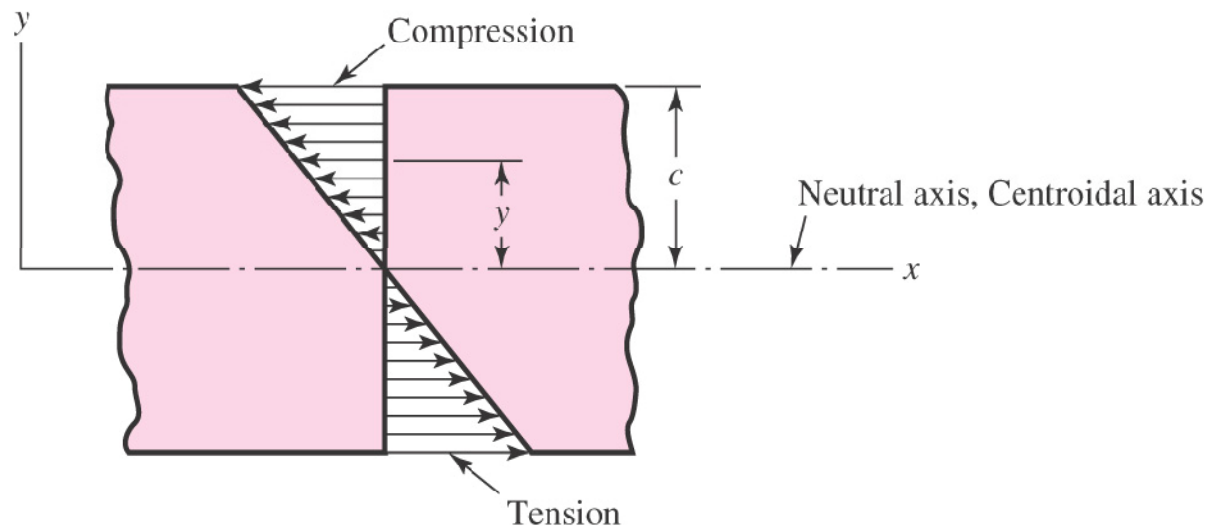
Esfuerzos Normales para Vigas en Flexión (Cont.)

- El esfuerzo de flexión varía linealmente con la distancia desde el eje neutral,

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

- I es el *segundo momento de área* con respecto al eje z

$$I = \int y^2 dA$$

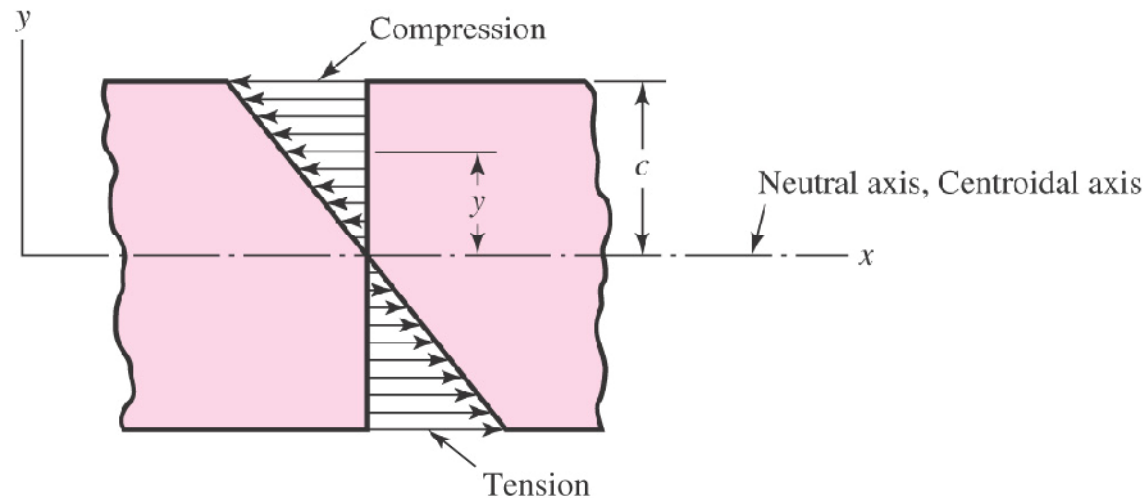


Esfuerzos Normales para Vigas en Flexión (Cont.)

- El esfuerzo de flexión máximo ocurre cuando y toma el mayor valor,

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{Z}$$

- c es la magnitud del mayor valor de y
- $Z = \frac{I}{c}$ es el *módulo de sección*



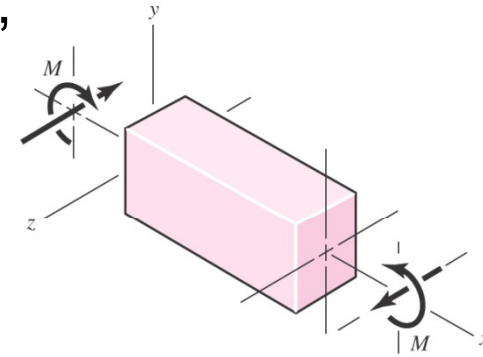
Esfuerzos Normales en Vigas - Supuestos

- Estado de flexión pura (no hay carga axial, ni torsional, ni cargas de corte)
- El material es isotrópico y homogéneo
- El material obedece a la ley de Hooke
- La viga está inicialmente recta con sección transversal constante
- Las secciones transversales permanecen planas durante la flexión

Flexión en Dos Planos

- Considerar flexión en los planos xy y xz , simultáneamente
- En sección con dos planos de simetría,

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

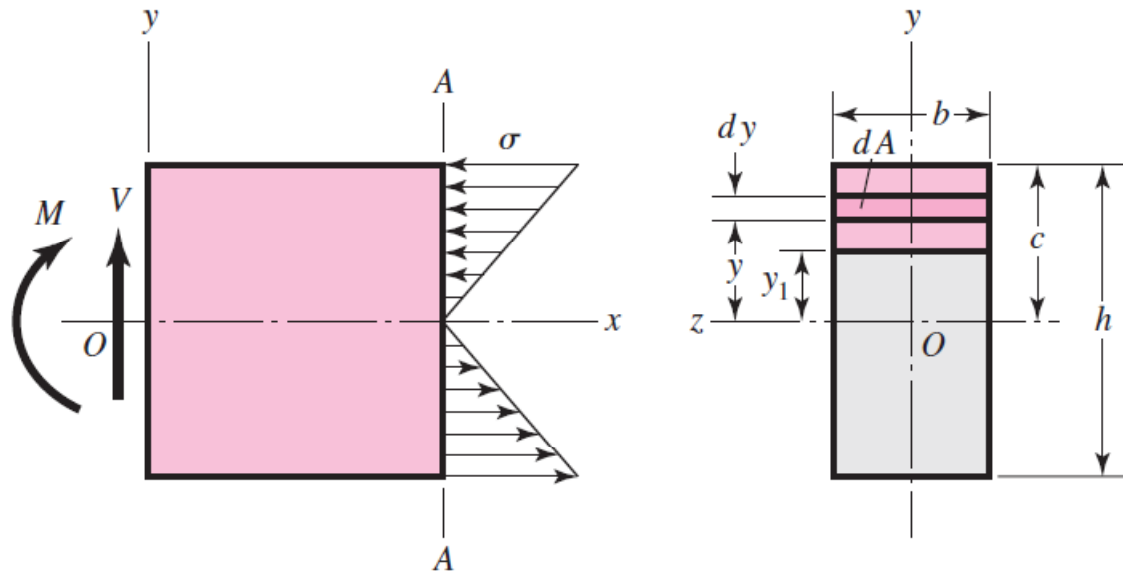


- Para una sección circular sólida, el esfuerzo de flexión máximo es

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{(M_y^2 + M_z^2)^{1/2} (d/2)}{\pi d^4 / 64} = \frac{32}{\pi d^3} (M_y^2 + M_z^2)^{1/2}$$



Esfuerzo de Corte en Vigas



$$V = \frac{dM}{dx}$$

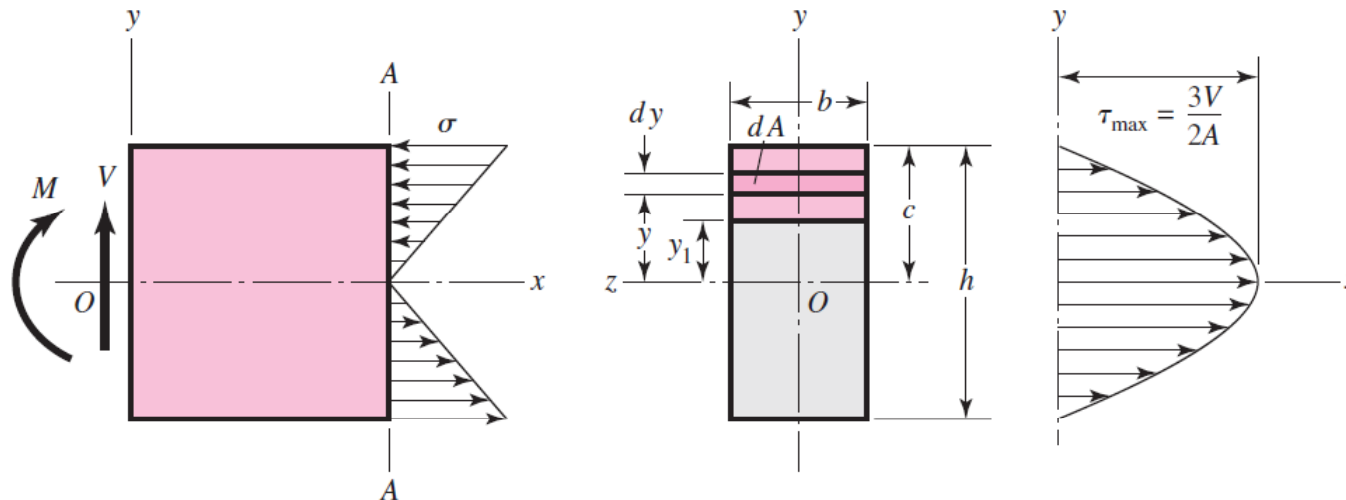
$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

$$Q = \int_{y_1}^c y dA$$

- El esfuerzo de corte transversal está siempre acompañado por esfuerzo de flexión
- En vigas cuya razón largo/alto es mayor que 10, el esfuerzo de flexión es dominante y el esfuerzo de corte es despreciable



Esfuerzo de Corte en Vigas (Cont.)



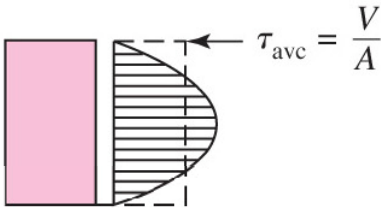
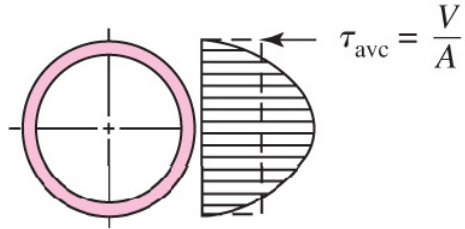
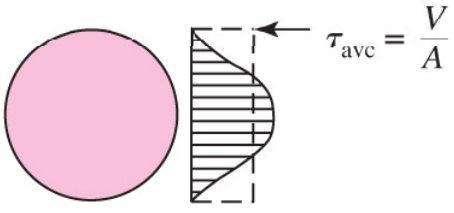
$$Q = \int_{y_1}^c y dA = b \int_{y_1}^c y dy = \frac{by^2}{2} \Big|_{y_1}^c = \frac{b}{2} (c^2 - y_1^2)$$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V}{2I} (c^2 - y_1^2) \qquad I = \frac{Ac^2}{3}$$

$$\tau = \frac{3V}{2A} \left(1 - \frac{y_1^2}{c^2} \right)$$



Esfuerzos de Corte Transversal Máximos

Beam Shape	Formula	Beam Shape	Formula
 Rectangular	$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A}$	 Hollow, thin-walled round	$\tau_{\max} = \frac{2V}{A}$
 Circular	$\tau_{\max} = \frac{4V}{3A}$	 Structural I beam (thin-walled)	$\tau_{\max} = \frac{V}{A_{\text{web}}}$



fcfm

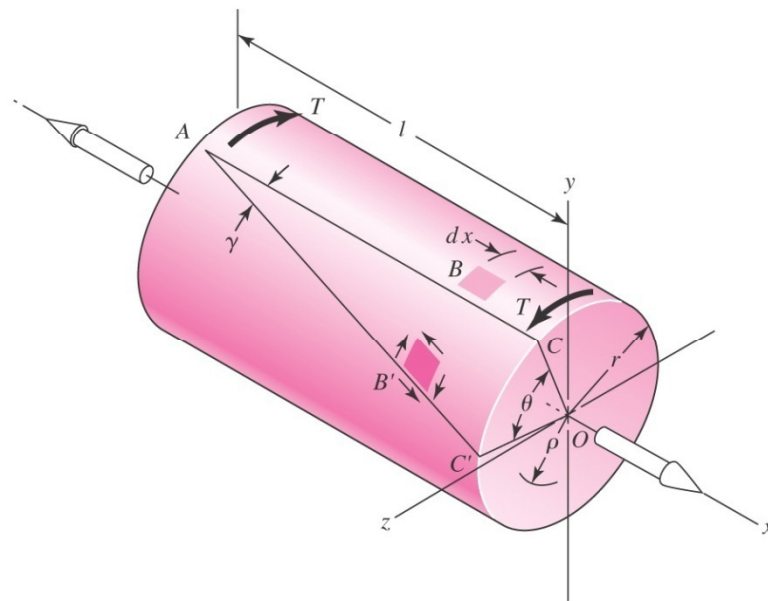
Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Carga y Esfuerzo

Torsión

- Momento co-lineal con el eje de algún elemento mecánico
- Una barra que está sujeta a torque se dice que se encuentra en torsión
- El ángulo de giro, en radianes, para una barra en torsión es

$$\theta = \frac{Tl}{GJ}$$



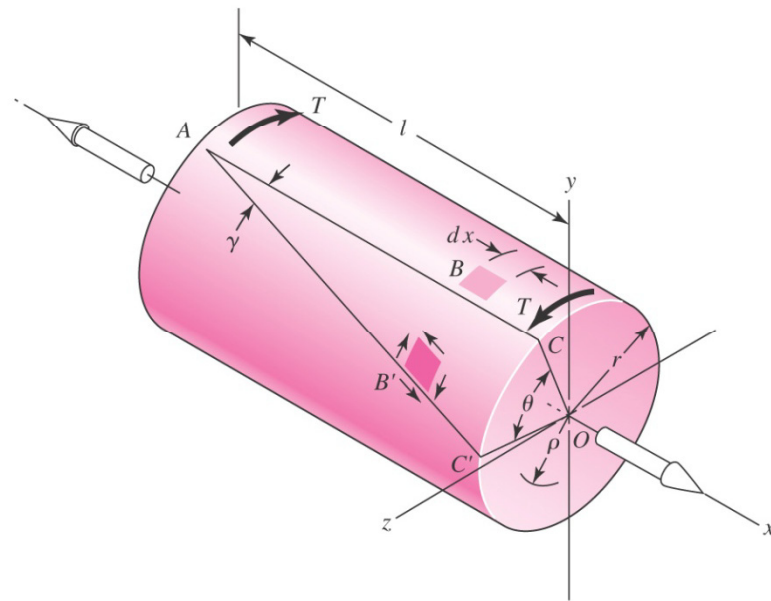
Esfuerzo de Corte Torsional

- Para una barra redonda en torsión, el esfuerzo de corte torsional es proporcional al radio ρ

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

- El esfuerzo de corte torsional máximo se encuentra en la superficie exterior de la barra redonda

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J}$$



Supuestos para las Ecuaciones de Torsión

- Estado de torque puro
- Punto de interés alejado de cualquier discontinuidad o punto de aplicación de torque
- El material obedece a la ley de Hooke
- La sección transversal originalmente plana y paralela, permanece plana y paralela
- Las ecuaciones anteriores son aplicables sólo para secciones transversales redondas

Potencia, Velocidad y Torque

- Potencia (H) es igual a torque (T) por velocidad angular (ω)

$$H [\text{W}] = T [\text{Nm}] \omega [\text{rad/s}]$$

- Conversión con velocidad en rpm

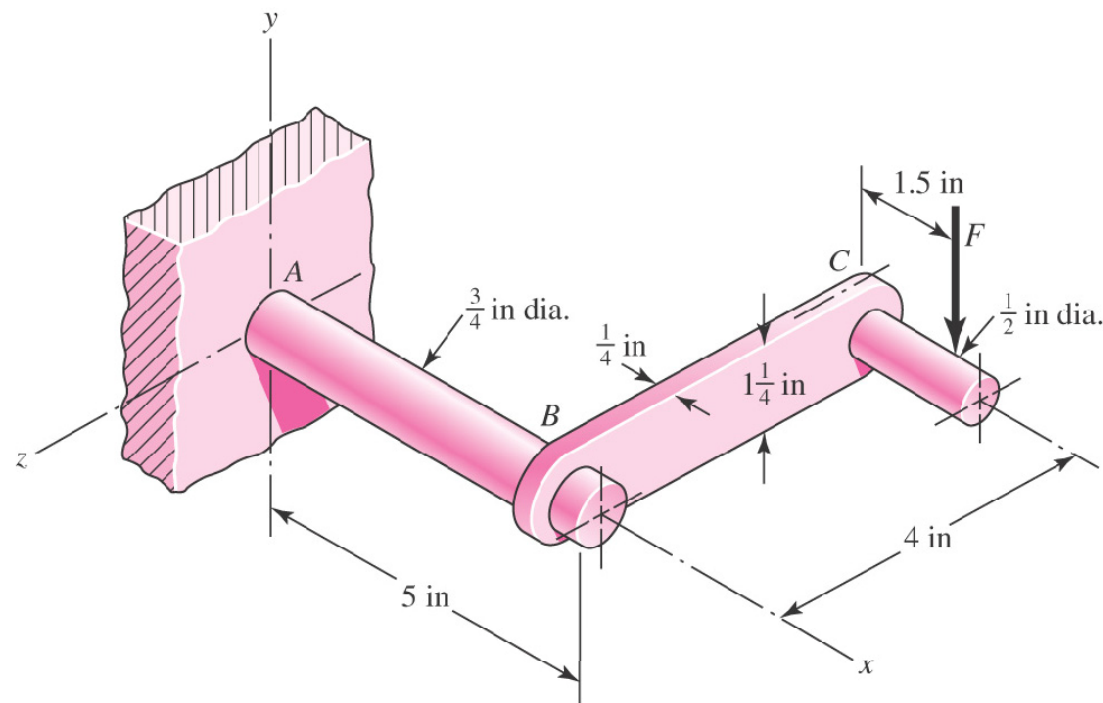
$$T [\text{Nm}] = 9.55 \frac{H [\text{W}]}{n [\text{rpm}]}$$

- En términos de velocidad (V) y fuerza (F) tangenciales

$$H [\text{W}] = F [\text{N}] V [\text{m/s}]$$

Ejercicio #2

Resolver el Ejemplo 3-8 del libro guía utilizando un programa de elementos finitos. Validar/Comparar los resultados computacionales con los resultados teóricos dados en el libro. Escribir un informe. **Fecha Entrega:** Jueves 3 de Noviembre, en clases.



fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

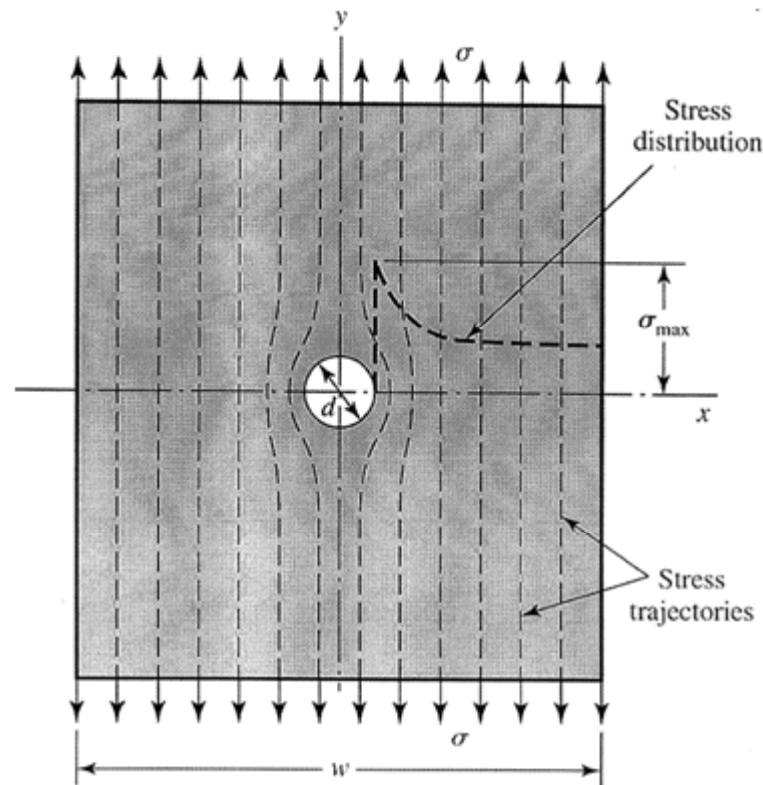
Análisis de Carga y Esfuerzo

Concentración de Esfuerzos

- Crecimiento localizado de esfuerzos cerca de discontinuidades
- El factor teórico de concentración de esfuerzo es

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0}$$

$$K_{ts} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_0}$$



Análisis de Carga y Esfuerzo



fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Factor Teórico de Concentración de Esfuerzos

- Gráficos disponibles para configuraciones estándar
- Ver Apéndice A del Shigley
- Muchos más disponibles en el *Peterson's Stress-Concentration Factors*
- K_t crece a medida que la discontinuidad es más pronunciada

Figure A-15-1

Bar in tension or simple compression with a transverse hole. $\sigma_0 = F/A$, where $A = (w - d)t$ and t is the thickness.

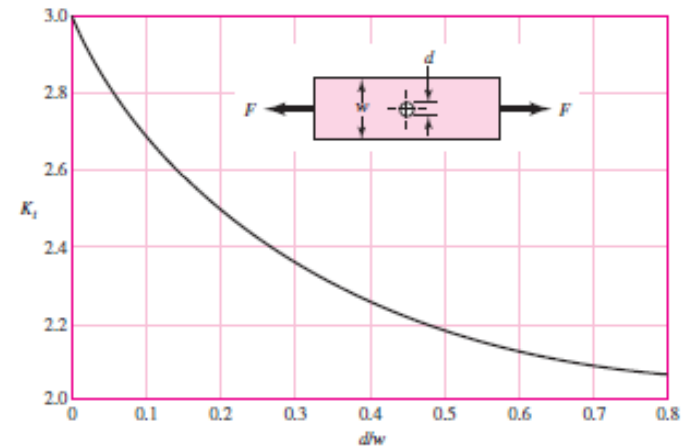
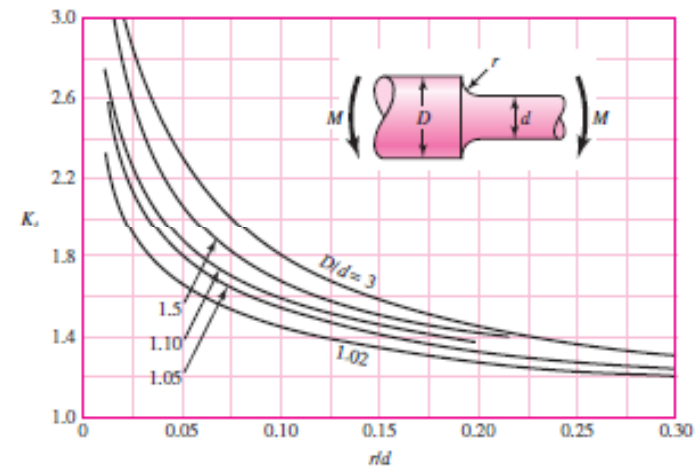


Figure A-15-9

Round shaft with shoulder fillet in bending. $\sigma_0 = Mc/I$, where $c = d/2$ and $I = \pi d^4/64$.



fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

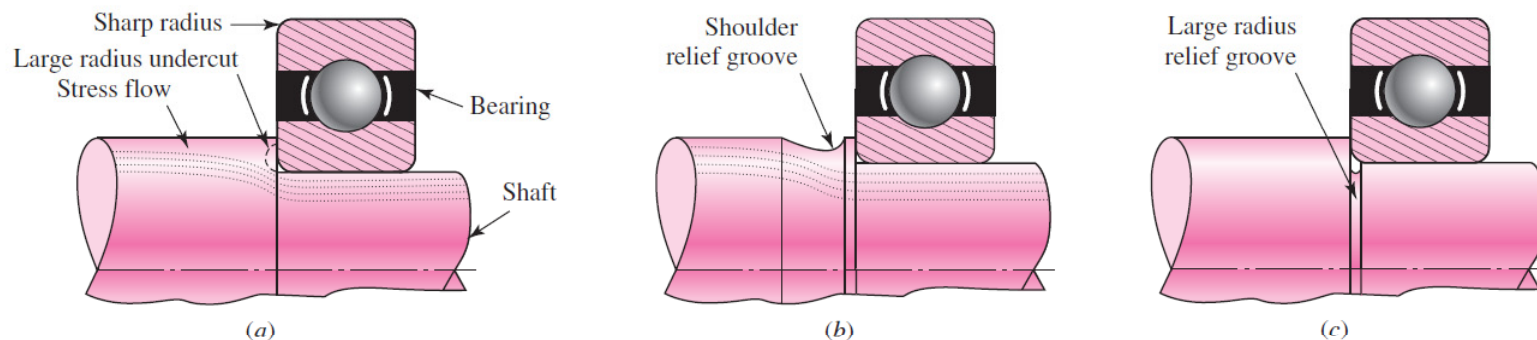
Análisis de Carga y Esfuerzo

Factor de Concentración Condición Estática y Dúctil

- Bajo carga estática y con materiales dúctiles
 - Las fibras localizadas en la zona de concentración fluyen (plastificación)
 - La plastificación es localizada
 - La pieza en conjunto no sufre daño a menos que el esfuerzo de ruptura sea sobrepasado
 - Efectos debido a concentración de esfuerzos son comúnmente ignorados cuando se está en presencia de carga estática con materiales dúctiles

Técnicas para Reducir Concentración de Esfuerzos

- Usar radios más grandes
- Usar “zonas muertas” para disminuir tensiones

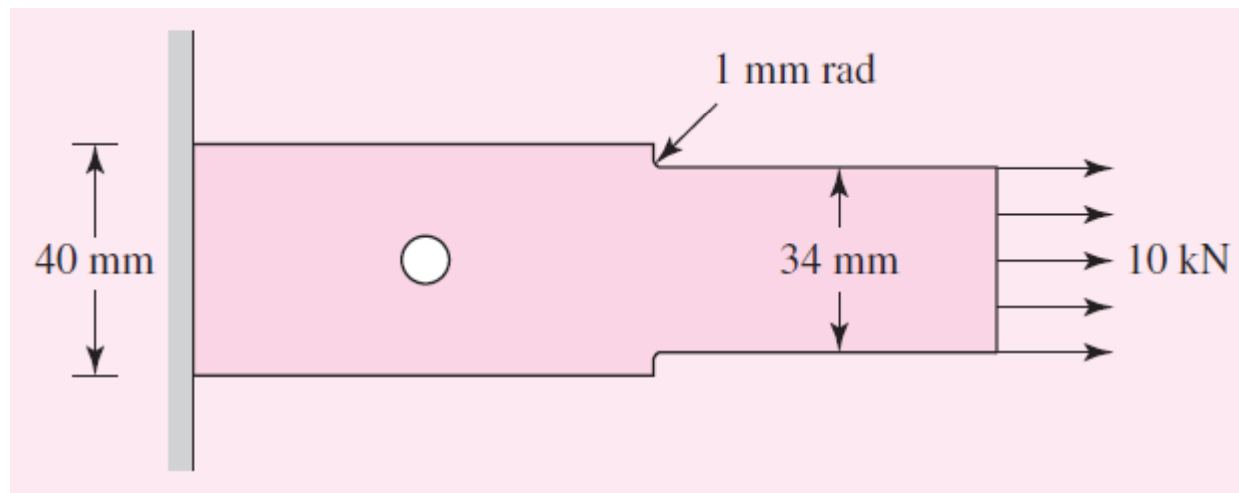


| Figure 7-9



Ejemplo

The 2-mm-thick bar shown in Fig. 3–30 is loaded axially with a constant force of 10 kN. The bar material has been heat treated and quenched to raise its strength, but as a consequence it has lost most of its ductility. It is desired to drill a hole through the center of the 40-mm face of the plate to allow a cable to pass through it. A 4-mm hole is sufficient for the cable to fit, but an 8-mm drill is readily available. Will a crack be more likely to initiate at the larger hole, the smaller hole, or at the fillet?



fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Carga y Esfuerzo

Ejemplo (Cont.)

Since the material is brittle, the effect of stress concentrations near the discontinuities must be considered. Dealing with the hole first, for a 4-mm hole, the nominal stress is

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{(w - d)t} = \frac{10\,000}{(40 - 4)2} = 139 \text{ MPa}$$

The theoretical stress concentration factor, from Fig. A-15-1, with $d/w = 4/40 = 0.1$, is $K_t = 2.7$. The maximum stress is

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_0 = 2.7(139) = 380 \text{ MPa}$$

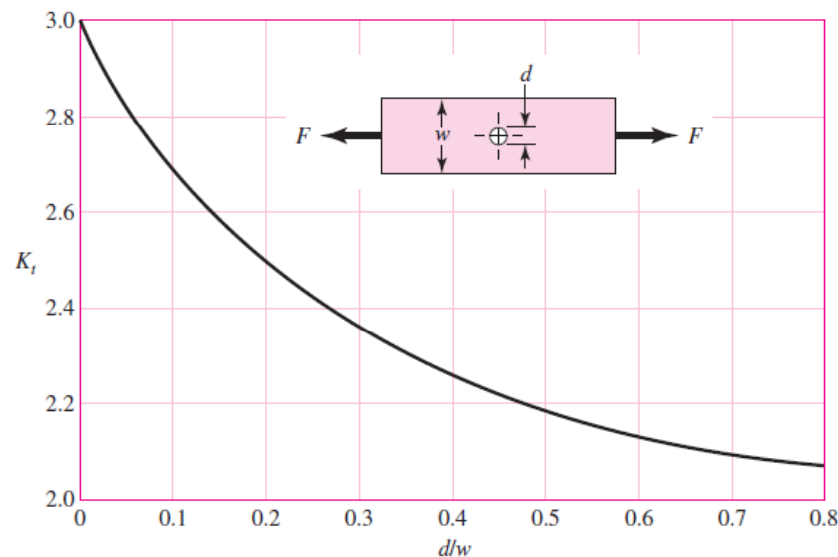


Fig. A-15 -1



Ejemplo (Cont.)

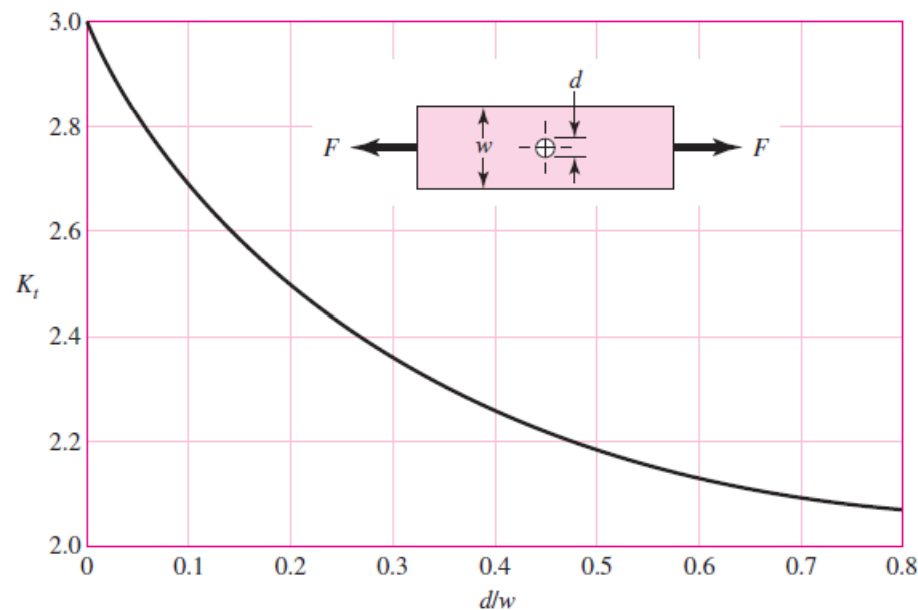
Similarly, for an 8-mm hole,

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{(w - d)t} = \frac{10\,000}{(40 - 8)2} = 156 \text{ MPa}$$

With $d/w = 8/40 = 0.2$, then $K_t = 2.5$, and the maximum stress is

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_0 = 2.5(156) = 390 \text{ MPa}$$

Though the stress concentration is higher with the 4-mm hole, in this case the increased nominal stress with the 8-mm hole has more effect on the maximum stress.



fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Carga y Esfuerzo

Ejemplo (Cont.)

For the fillet,

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{10\,000}{(34)^2} = 147 \text{ MPa}$$

From Table A-15-5, $D/d = 40/34 = 1.18$, and $r/d = 1/34 = 0.026$. Then $K_t = 2.5$.

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_0 = 2.5(147) = 368 \text{ MPa}$$

The crack will most likely occur with the 8-mm hole, next likely would be the 4-mm hole, and least likely at the fillet.

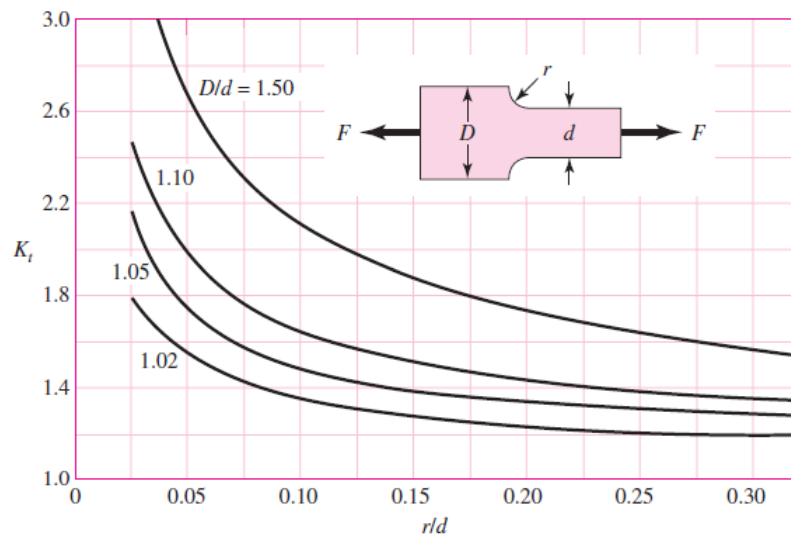
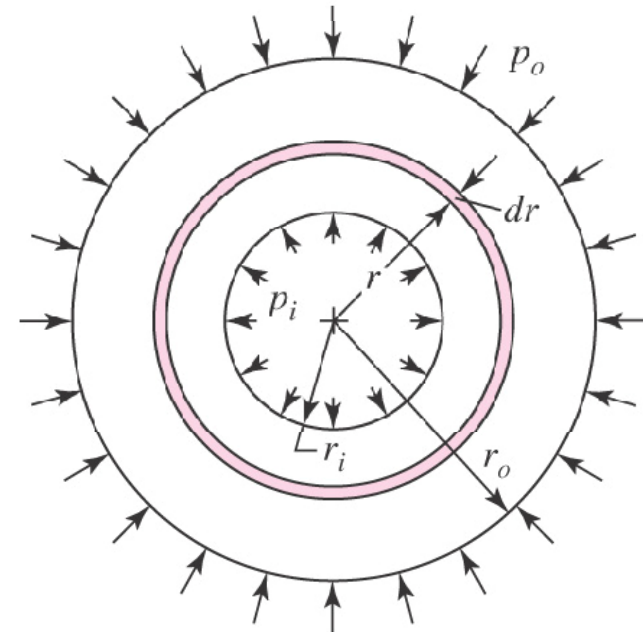


Fig. A-15-5



Esfuerzos en Cilindros Presurizados

- Cilindro con radio interior r_i , radio exterior r_o , presión interna p_i y presión externa p_o
- Esfuerzo radial y esfuerzo tangencial



$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 - r_i^2 r_o^2 (p_o - p_i) / r^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 + r_i^2 r_o^2 (p_o - p_i) / r^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

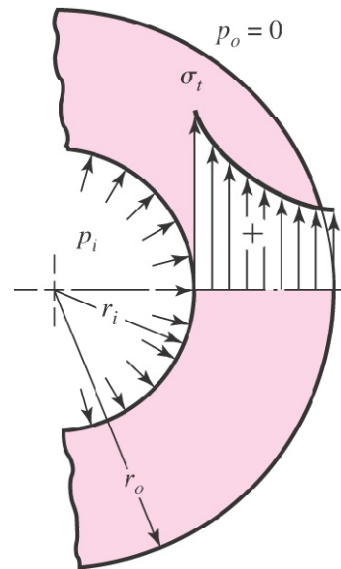


Esfuerzos en Cilindros Presurizados (Cont.)

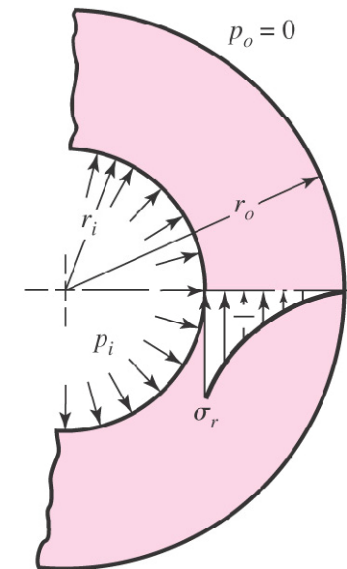
- Caso especial cuando $p_o = 0$

$$\sigma_t = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_r = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right)$$



(a) Tangential stress distribution



(b) Radial stress distribution

- Si los extremos del cilindro están cerrados, entonces hay esfuerzo longitudinal

$$\sigma_l = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}$$



Esfuerzos en Cilindros de Pared Delgada

- Espesor de pared menor o igual que 1/10 del radio
- Esfuerzo radial es muy pequeño con respecto al esfuerzo tangencial
- Esfuerzo tangencial (promedio)

$$(\sigma_t)_{av} = \frac{pd_i}{2t}$$

- Esfuerzo tangencial máximo

$$(\sigma_t)_{max} = \frac{p(d_i + t)}{2t}$$

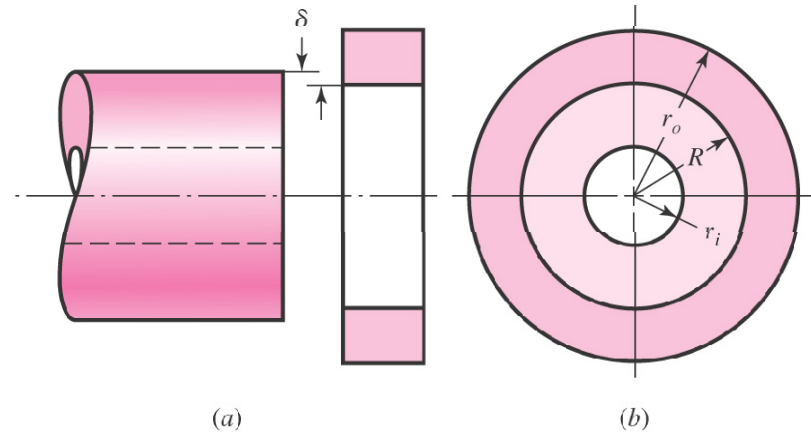
- Esfuerzo longitudinal si extremos están cerrados

$$\sigma_l = \frac{pd_i}{4t}$$



Ajustes a Presión y por Contracción

- Dos partes cilíndricas son ensambladas con una interferencia radial δ
- La presión de interferencia es



$$p = \frac{\delta}{R \left[\frac{1}{E_o} \left(\frac{r_o^2 + R^2}{r_o^2 - R^2} + \nu_o \right) + \frac{1}{E_i} \left(\frac{R^2 + r_i^2}{R^2 - r_i^2} - \nu_i \right) \right]}$$

- Si los dos cilindros están hechos con el mismo material

$$p = \frac{E\delta}{2R^3} \left[\frac{(r_o^2 - R^2)(R^2 - r_i^2)}{r_o^2 - r_i^2} \right]$$



Esfuerzos en Ajustes a Presión y por Contracción

- Aplicar las ecuaciones de esfuerzo para cilindros presurizados

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 - r_i^2 r_o^2 (p_o - p_i) / r^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 + r_i^2 r_o^2 (p_o - p_i) / r^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

- Para el cilindro interior, $p_o = p$ y $p_i = 0$

$$(\sigma_t)_i \Big|_{r=R} = -p \frac{R^2 + r_i^2}{R^2 - r_i^2}$$

- Para el cilindro exterior, $p_o = 0$ y $p_i = p$

$$(\sigma_t)_o \Big|_{r=R} = p \frac{r_o^2 + R^2}{r_o^2 - R^2}$$



Esfuerzos Térmicos

- Deformación normal en cuerpo sin restricción debida a expansión por cambio de temperatura

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha(\Delta T)$$

donde α es el *coeficiente de dilatación térmica*

- *Esfuerzos térmicos* ocurren cuando componentes son restringidos para prevenir deformación durante el cambio de temperatura
- Para una barra recta restringida en ambos extremos, un incremento en la temperatura genera un esfuerzo de compresión

$$\sigma = -\epsilon E = -\alpha(\Delta T) E$$

- Idénticamente, para una placa plana restringida en ambos extremos

$$\sigma = -\frac{\alpha(\Delta T) E}{1 - \nu}$$



Coeficientes de Dilatación Térmica

Table 3-3

Coefficients of Thermal
Expansion (Linear
Mean Coefficients
for the Temperature
Range 0–100°C)

Material	Celsius Scale ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)	Fahrenheit Scale ($^{\circ}\text{F}^{-1}$)
Aluminum	$23.9(10)^{-6}$	$13.3(10)^{-6}$
Brass, cast	$18.7(10)^{-6}$	$10.4(10)^{-6}$
Carbon steel	$10.8(10)^{-6}$	$6.0(10)^{-6}$
Cast iron	$10.6(10)^{-6}$	$5.9(10)^{-6}$
Magnesium	$25.2(10)^{-6}$	$14.0(10)^{-6}$
Nickel steel	$13.1(10)^{-6}$	$7.3(10)^{-6}$
Stainless steel	$17.3(10)^{-6}$	$9.6(10)^{-6}$
Tungsten	$4.3(10)^{-6}$	$2.4(10)^{-6}$



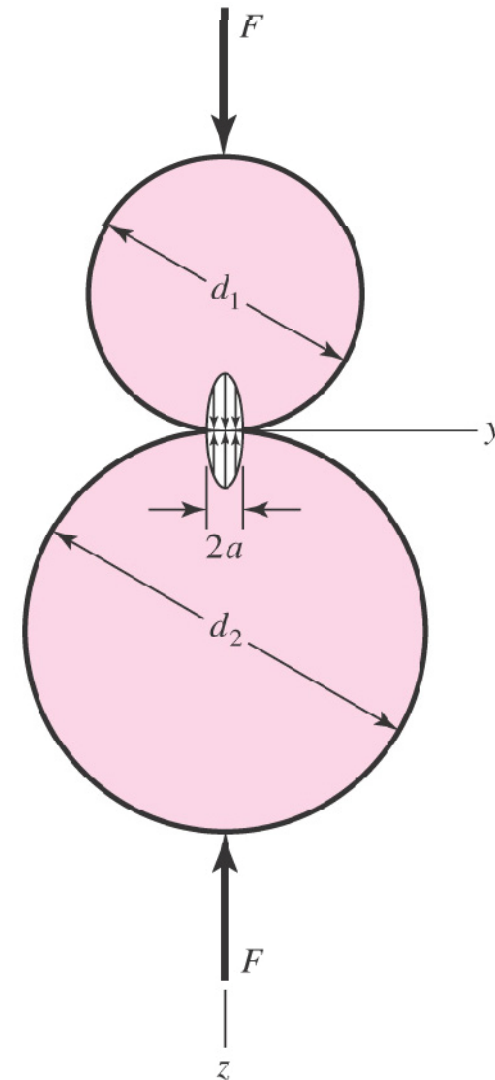
fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Análisis de Carga y Esfuerzo

Esfuerzos de Contacto

- Dos cuerpos de superficies curvas son presionados uno con otro
- Puntos o líneas de contacto se transforman en áreas de contacto
- Aparecen esfuerzos tridimensionales conocidos como *Esfuerzos de Contacto* o *Esfuerzos de Hertz*
- Ejemplos
 - Ruedas de ferrocarril en riel
 - Acople entre dientes de engranajes
 - Cojinetes de contacto rodante



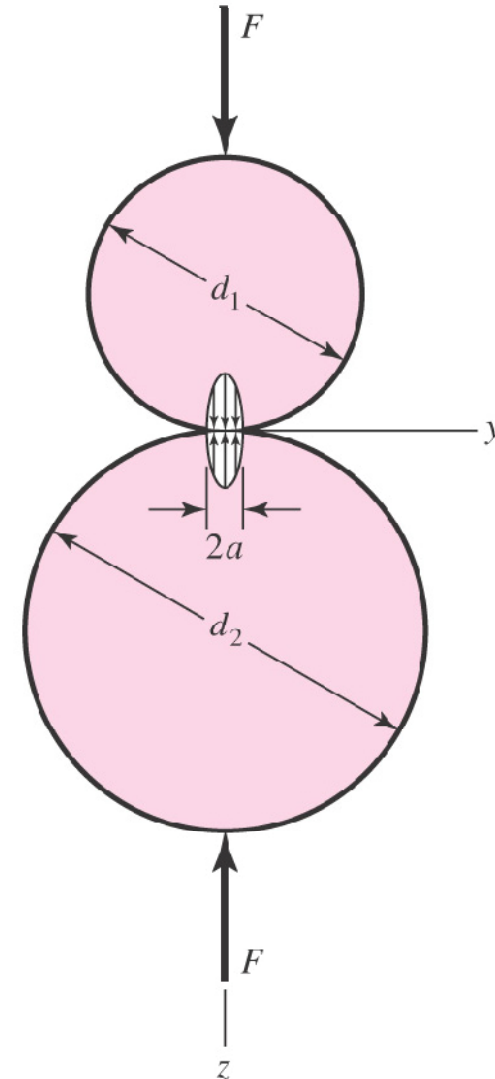
Ejemplo: Esfuerzos de Contacto Esférico

- Dos esferas sólidas de diámetros d_1 y d_2 son presionadas una con otra por una fuerza F
- Área de contacto es un círculo de radio a

$$a = \sqrt[3]{\frac{3F}{8} \frac{(1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2}{1/d_1 + 1/d_2}}$$

- La distribución de presión es hemisférica
- La presión máxima es en el centro del área de contacto

$$p_{\max} = \frac{3F}{2\pi a^2}$$



Ejemplo: Esfuerzos de Contacto Esférico (Cont.)

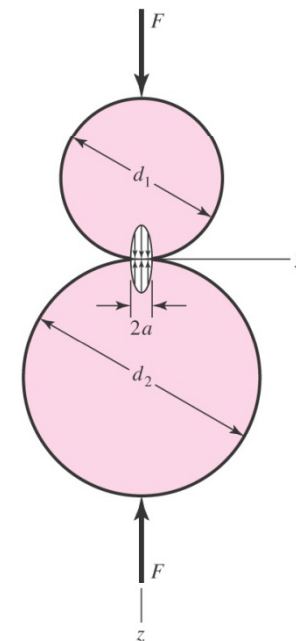
- El esfuerzo máximo (compresivo) ocurre en el eje z
- Los esfuerzos principales, todos de compresión, son

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_y = -p_{\max} \left[\left(1 - \left| \frac{z}{a} \right| \tan^{-1} \frac{1}{|z/a|} \right) (1 + \nu) - \frac{1}{2 \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)} \right]$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \frac{-p_{\max}}{1 + \frac{z^2}{a^2}}$$

- El esfuerzo de corte máximo es

$$\tau_{\max} = \tau_{1/3} = \tau_{2/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$



Ejemplo: Esfuerzos de Contacto Esférico (Cont.)

- Esfuerzos principales y esfuerzo de corte máximo en función de la distancia debajo de la superficie de contacto.
- Notar que $\tau_{\max}$ ocurre cercano a la superficie de contacto
- El esfuerzo de corte máximo es el responsable de la fatiga superficial (grietas) de los elementos en contacto

