

Capítulo 2. SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

1. Formulación de modelos matemáticos para los sistemas mecánicos.

Con los métodos numéricos existentes hoy en día, principalmente el de elementos finitos, es posible analizar una máquina en su forma real. Sin embargo, esto frecuentemente conduce a un análisis muy largo y complicado y a la obtención de mucha información que no era requerida.

En muchos análisis de máquinas y estructuras es conveniente sustituirlas por un simplificado modelo matemático que:

- 1) se adapte mejor al cálculo matemático produciendo la información deseada tan económicamente como sea posible y que
- 2) tenga la exactitud requerida. Algunos ejemplos de modelos para el análisis de estructuras reales se muestran en las figuras. N°2.1 a 2.4.

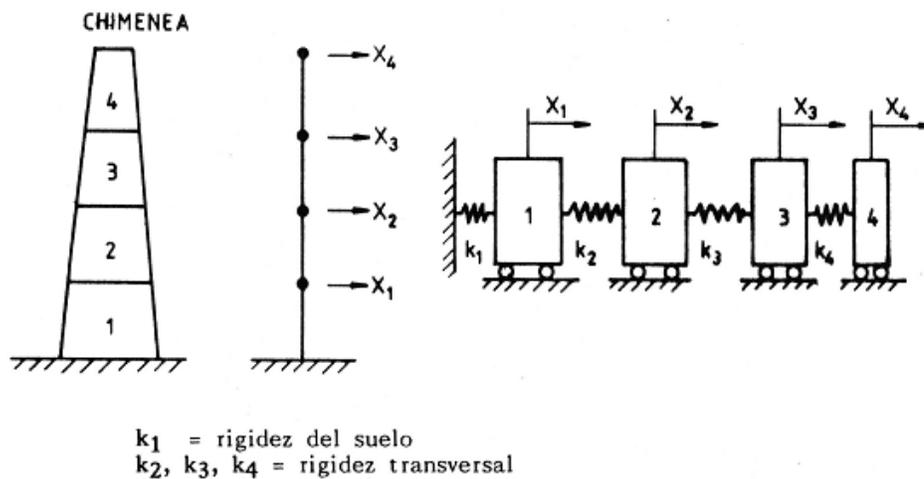


FIG.2.1 Modelos para el análisis vibratorio de la chimenea.

2. Ecuaciones del movimiento

Los sistemas de N grados de libertad pueden escribirse en forma matricial:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$$

$[M]$: Matriz de masas

$[C]$: Matriz de amortiguamiento viscoso

$[K]$: Matriz de rigidez

$\{f\}$: Vector fuerzas externas

$\{x\}$: Vector desplazamiento

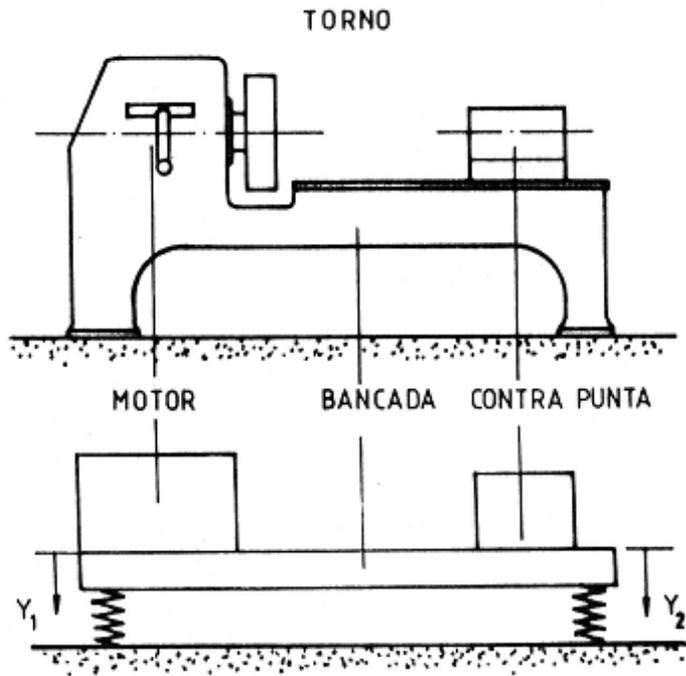


FIG. 2.2 Modelo para el análisis vibratorio de un torno.

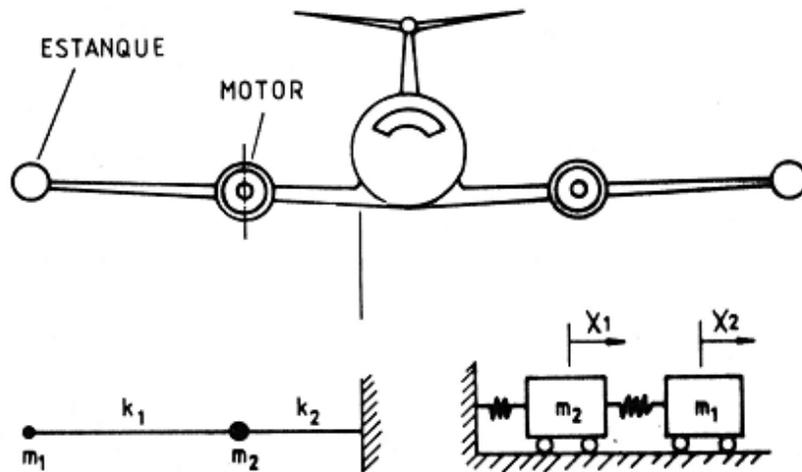


FIG. 2.3 Modelo para el análisis vibratorio del ala de un avión.

Ejemplo de sistemas de dos grados de libertad

Figura 2.5 muestra algunos sistemas que se han modelado con dos grados de libertad. Figura 2.6 muestra un sistema de dos grados de libertad que se analizará a continuación.

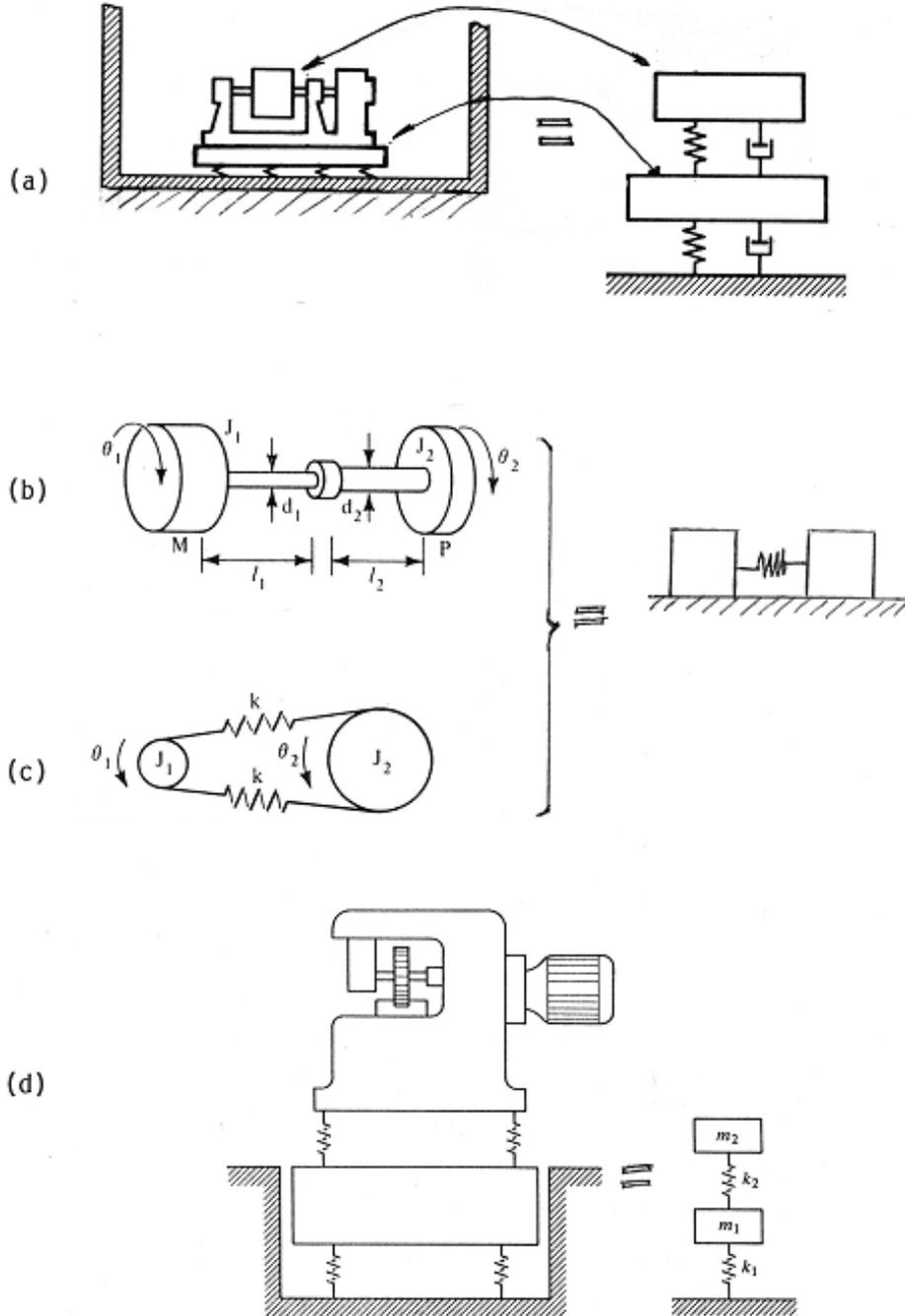


Fig. N°2.5 Ejemplo de sistemas de dos grados de libertad.

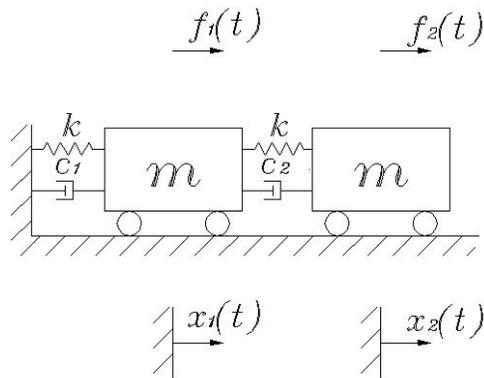


FIG.2.6. Sistema de dos grados de libertad a analizar

Las ecuaciones del movimiento del sistema de la figura 2.6 son:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + 2kx_1 - kx_2 &= f_1(t) \\
 m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 - kx_1 + kx_2 &= f_2(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

3. Vibraciones libres no amortiguadas

3. 1. Ecuaciones del movimiento

Las ecuaciones del movimiento de sistemas discretos de N grados de libertad son:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones son de la forma:

$$x_i(t) = X_i e^{rt} \tag{2-1}$$

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{rt} \Rightarrow \{x(t)\} = \{X\} e^{rt} \tag{2-2}$$

Reemplazando ecuación (2-2) en (2-1), se obtiene:

$$\boxed{[Mr^2 + K]\{X\} = 0 \quad (2-3)}$$

La solución no trivial del sistema de ecuaciones homogéneas (2-3), se obtiene para los valores de r que satisfagan la ecuación característica siguiente:

$$\boxed{\det [Mr^2 + K] = 0 \quad (2-4)}$$

Ejemplo .

Determine las frecuencias naturales y modos de vibrar del sistema indicado en figura 2-6

1. Para determinar las frecuencias naturales se utiliza ecuación (2-4):

$$\det [Mr^2 + K] = \det \begin{vmatrix} mr^2 + 2k & -k \\ -k & mr^2 + k \end{vmatrix} = 0$$

$$(mr^2 + 2k)(mr^2 + k) - k^2 = 0$$

$$r^4 + \frac{3k}{m}r^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$r_1^2 = -0,382 \frac{k}{m} \rightarrow r_1 = \pm 0,618 \sqrt{\frac{k}{m}} j = \pm \omega_1 j$$

$$r_2^2 = -2,618 \frac{k}{m} \rightarrow r_2 = \pm 1,618 \sqrt{\frac{k}{m}} j = \pm \omega_2 j$$

$r_1, r_2 =$ valores propios, eigenvalores

$\omega_1, \omega_2 =$ frecuencias naturales de vibrar

2. Para determinar los modos de vibrar o vectores propios se utiliza ecuación (2-3)

Asociada a cada frecuencia natural de vibrar existe un modo de vibrar determinado, o dicho de otra forma, asociado a cada valor propio existe un vector propio. Los modos de vibrar o vectores propios son determinados por la ecuación (2-3) para cada valor propio.

- Para : $r_1^2 = -0,382 \frac{k}{m}$

$$1,618kx_1 - kx_2 = 0$$

$$-kx_1 + 0,618kx_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1,618x_1$$

- Para : $r_2^2 = -2,618 \frac{k}{m}$

$$-0,618kx_1 - kx_2 = 0$$

$$-kx_1 - 1,618kx_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -0,618x_1$$

Normalización de los modos:

Los valores x_i obtenidos en el ejemplo anterior muestra que solo se puede encontrar una relación entre las amplitudes con que vibran libremente las dos masas.. Si hay x_i valores, existen $i-1$ ecuaciones independientes. Para poder determinar un valor numérico para cada amplitud, es necesario agregar una nueva ecuación. Esto se llama normalización de los modos de vibrar.

Existen numerosas formas de normalizar los modos de vibrar. A continuación se indican tres formas de normalización:

- 1) Hacer una de las amplitudes igual a 1.

X_i^j : Amplitud de masa i cuando vibra con el modo j .

$$\begin{aligned} \text{Si } x_1 = 1 &\Rightarrow \{X^1\} = \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{Bmatrix} \\ &\Rightarrow \{X^2\} = \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

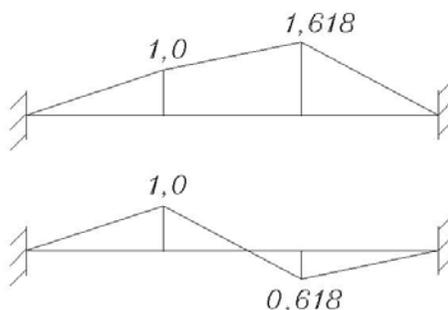


FIG. 2.7. Gráfico de los modos de vibrar de ejemplo de figura 2.6

- 2). Hacer la longitud del vector propio igual a uno.

$$\|X\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2} = 1,0 \rightarrow \{X\}^T \{X\} = 1,0$$

$$\begin{aligned} X_1^2 + X_2^2 = 1 &\rightarrow X_1^1 + (1,618X_1^1)^2 = 1 \rightarrow \{X^1\} = \begin{Bmatrix} 0,526 \\ 0,851 \end{Bmatrix} \\ &\rightarrow X_1^2 + (-0,618X_1^2)^2 = 1 \rightarrow \{X^2\} = \begin{Bmatrix} 0,851 \\ -0,526 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

3.- Hacer el producto $X^T M X = I, 0$.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} m & \\ & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= mx_1^2 + 2mx_2^2 = 1,0 \\ mx_1^2 + 2m(1,618x_1^2)^2 &= 1,0 \rightarrow x_2^1 = \frac{0,160}{m} \rightarrow \{X^1\} = \begin{Bmatrix} 0,40 \\ 0,648 \end{Bmatrix} m^{-1/2} \\ \{X^2\} &= \begin{Bmatrix} 0,753 \\ -0,465 \end{Bmatrix} m^{-1/2} \end{aligned}$$

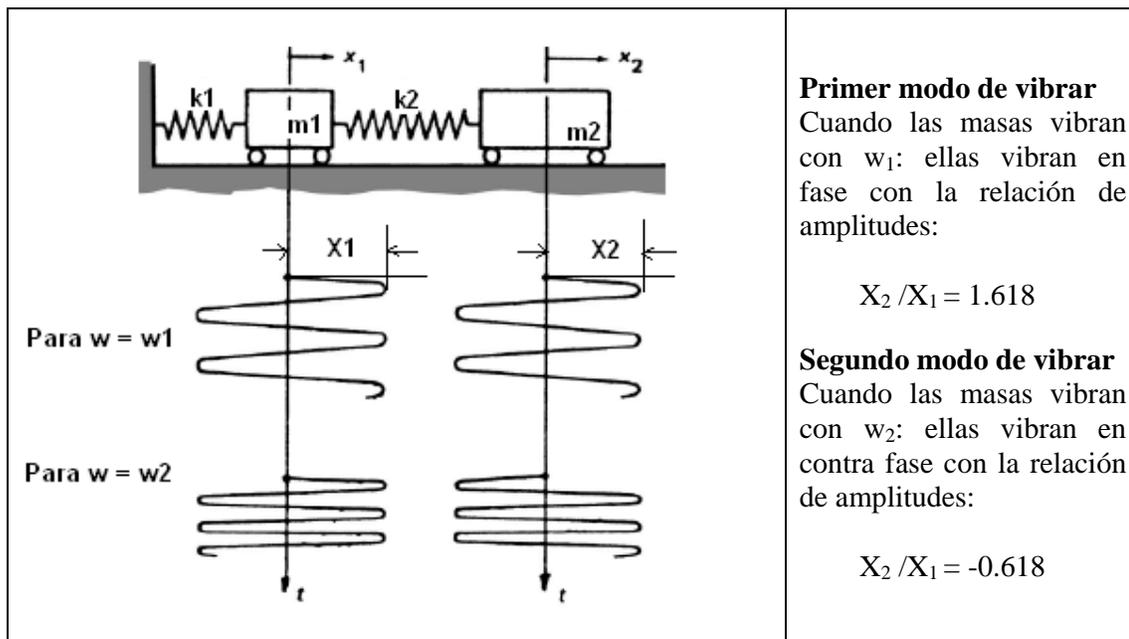


FIG. 2.8. Modos de vibrar de ejemplo de figura 2.6

3.2.- Vibraciones libres. Ecuaciones del movimiento

Si el sistema vibrara sólo con el modo $r = r_s (\omega = \omega_s)$, entonces de ecuación (2-2):

$$\{x(t)\}_s = (A_s \text{sen} \omega_s t + B_s \text{cos} \omega_s t) \{X^s\} \quad (2-5)$$

En el caso general: El sistema vibra con una combinación lineal de los modos:

$$\{x(t)\} = \sum_{s=1}^N \{x(t)\}_s = \sum_{s=1}^N (A_s \text{sen} \omega_s t + B_s \text{cos} \omega_s t) \{X^s\}$$

La solución para el desplazamiento de la masa i , será:

$$x_i(t) = \sum_{s=1}^N (A_s \text{sen} \omega_s t + B_s \text{cos} \omega_s t) X_i^s \quad (2-6)$$

Esta expresión se puede generalizar para sistemas amortiguados:

$$x_i(t) = \sum_{s=1}^N e^{-\xi_s \omega_s t} (A_s \text{sen} \omega_{ds} t + B_s \text{cos} \omega_{ds} t) X_i^s \quad (2-7)$$

Ejemplo

Determinar $x_1(t)$ y $x_2(t)$ del sistema mostrado en figura 2.6 si se le dan las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10} \\ x_2(0) &= \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Anteriormente se habían determinado que los modos de vibrar eran:

$$\{X^1\} = \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{Bmatrix}; \{X^2\} = \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix}$$

Aplicando ecuación (2-6), se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (A_1 \text{sen} \omega_1 t + B_1 \text{cos} \omega_1 t) X_1^1 + (A_2 \text{sen} \omega_2 t + B_2 \text{cos} \omega_2 t) X_1^2 \\ x_2(t) &= (A_1 \text{sen} \omega_1 t + B_1 \text{cos} \omega_1 t) X_2^1 + (A_2 \text{sen} \omega_2 t + B_2 \text{cos} \omega_2 t) X_2^2 \end{aligned}$$

Utilizando las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x_1(0) = x_{10} &\rightarrow x_{10} = B_1 + B_2 && \rightarrow B_1 = 0,276 x_{10} \\ x_2(0) = 0 &\rightarrow 0 = 1,618 B_1 - 0,618 B_2 && \rightarrow B_2 = 0,724 x_{10} \\ \dot{x}_1(0) = 0 &\rightarrow 0 = A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2 && \rightarrow A_1 = A_2 = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 &\rightarrow 0 = 1,618 A_1 \omega_1 - 0,618 A_2 \omega_2 && \end{aligned}$$

se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{10} (0,276 \text{cos} \omega_1 t + 0,724 \text{cos} \omega_2 t) \\ x_2(t) &= X_{10} (0,446 \text{cos} \omega_1 t - 0,446 \text{cos} \omega_2 t) \end{aligned}$$

por lo tanto, el vector desplazamiento del sistema es:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = 0,276 x_{10} \text{cos} \omega_1 t \{X^1\} + 0,724 x_{10} \text{cos} \omega_2 t \{X^2\}$$

⇒ El sistema vibra con una combinación (ponderada) de sus modos de vibrar. Esto se muestra gráficamente en figura 2.9

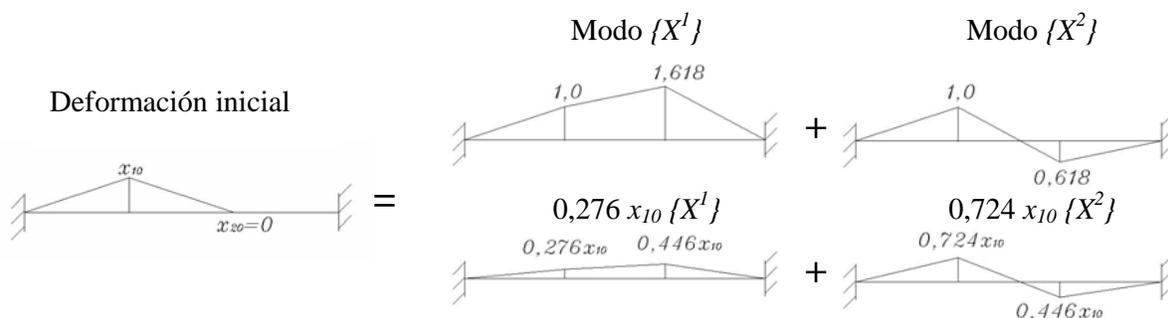


FIG. 2.9. Representación gráfica de la participación de cada modo en las vibraciones.

⇒ El modo que más participa en la vibración será el que es preponderante en la deformación inicial. Si la deformación inicial es la forma de un modo, el sistema vibrará sólo con ese modo (“**condiciones apropiadas**”). Lo anterior permite verificar experimentalmente los modos de vibrar. Por ejemplo, si se quiere verificar que el primer modo de vibrar del sistema de la figura 2.6 es $X_1/X_2 = 1/1.618$, se le da al sistema dicha deformación inicial. Con un sensor de vibraciones se verifica si el sistema solo vibra con w_1 , si es así, ese es el primer modo de vibrar del sistema.

3.3. Vibraciones forzadas

A continuación veremos dos métodos para determinar la respuesta de sistemas de varios grados de libertad:

1. El método directo, que sólo sirve para determinar la respuesta estacionaria de un sistema bajo una excitación armónica.
2. El método modal que sirve para determinar la respuesta estacionaria y/o transiente para cualquier tipo de excitación.

3.3.1.-Método directo

Este método permite determinar la respuesta estacionaria de un sistema de varios grados de libertad bajo una excitación armónica. Es un método de cálculo muy corto y sencillo, por lo que se va a utilizar cada vez que se pueda.

Este método no es otra cosa que la generalización del método del álgebra compleja visto en el capítulo 1.

Para esto hay que reemplazar en las ecuaciones del movimiento:

$$f_i(t) = F_i e^{j\Omega t}$$

$$x_i(t) = X_i e^{j\Omega t}$$

$$\dot{x}_i(t) = jX_i \Omega e^{j\Omega t}$$

$$\ddot{x}_i(t) = -\Omega^2 X_i e^{j\Omega t}$$

y luego se resuelve el sistema de ecuaciones resultantes.

Ejemplo.

Determinar la respuesta $x_1(t)$ y $x_2(t)$ estacionarios para el sistema mostrado en la figura 2.10 cuando sobre la primera masa actúa una fuerza armónica $F_0 \text{ sen}\Omega t$.

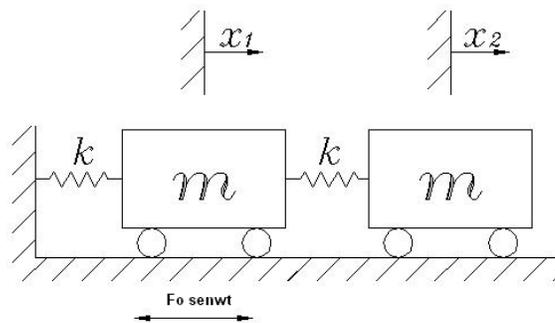


FIG 2.10. Ejemplo

Las ecuaciones del movimiento son:

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_0 \text{ sen}\Omega t$$

$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0$$

Y las frecuencias naturales son:

$$\omega_1 = 0,618 \sqrt{k/m}$$

$$\omega_2 = 1,618 \sqrt{k/m}$$

Reemplazando en las ecuaciones del movimiento:

$$F_0 \text{ sen } \Omega t = F_0 e^{j\Omega t}$$

$$x_i(t) = X_i e^{j\Omega t}$$

$$\ddot{x}_i(t) = -X_i \Omega^2 e^{j\Omega t}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} X_1(-m\Omega^2 + 2k) - X_2k = F_0 \\ -X_1k + (k - m\Omega^2)X_2 = 0 \end{cases}$$

Utilizando la regla de Cramer se obtiene:

$$\Rightarrow X_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k \\ 0 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{F_0(k - m\Omega^2)}{m^2 \left(\Omega^2 - \underbrace{0,382 \frac{k}{m}}_{\omega_1^2} \right) \left(\Omega^2 - \underbrace{2,618 \frac{k}{m}}_{\omega_2^2} \right)}$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2k - m\Omega^2 & F_0 \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-F_0k}{m^2(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}$$

Con:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2k - m\Omega^2 & -k \\ -k & k - m\Omega^2 \end{vmatrix} = (2k - m\Omega^2)(k - m\Omega^2) - k^2 \\ &= m^2 \left(\Omega^4 - \frac{3k}{m}\Omega^2 + \frac{k^2}{m^2} \right) \\ &= m^2 \left(\Omega^2 - 0,382 \frac{k}{m} \right) \left(\Omega^2 - 2,618 \frac{k}{m} \right) \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$x_1(t) = \frac{F_0(k - m\Omega^2)}{m^2(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \text{sen}\Omega t = X_1 \text{sen}(\Omega t + \phi_1) \quad (\text{a})$$

$$x_2(t) = \frac{-F_0k}{m^2(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \text{sen}\Omega t \quad (\text{b})$$

Frecuencias de resonancia y de anti-resonancia

Figura 2.11 muestra el gráfico de la amplitud de $x_1(t)$, X_1 y de la fase ϕ_1 en función de la frecuencia Ω de la excitación. De este gráfico se observa:

- Que al igual que para los sistemas de un grado de libertad, cuando la frecuencia de la excitación Ω coincide aproximadamente con cualquiera de las frecuencias naturales del sistema, ω_i , se generan grandes amplitudes de vibración para sistemas poco amortiguados \rightarrow Resonancia.
- Que el número de frecuencias naturales es igual al número de grados de libertad del sistema.

Observe que para una cierta frecuencia Ω de la excitación, la respuesta de $X_1 = 0$. Esto sucede en este ejemplo, ver ecuación (a), cuando:

$$\Omega^2 = k/m$$

Estas frecuencias para las cuales sucede lo opuesto que sucede en las resonancias, es decir, que para sistemas no amortiguados la amplitud de la vibración es cero, se llaman frecuencias de **anti-resonancia**, ω_{A1} .

Observe lo siguiente:

1. Las frecuencias anti-resonantes se generan entre dos frecuencias de resonancias y se generan en la masa sobre la que está actuando la excitación. Analizando la ecuación (b) se infiere que para X_2 no existe anti-resonancia.
2. El desafío de los diseñadores es entonces tratar que en sus diseños, las frecuencias de las excitaciones queden en las zonas anti-resonantes, donde los desplazamientos vibratorios, y por lo tanto los esfuerzos dinámicos (que son los causantes de la fatiga de los materiales), son pequeños.
3. El desfase entre el desplazamiento vibratorio y la fuerza cambia abruptamente en 180° a través de las resonancias y anti-resonancias.

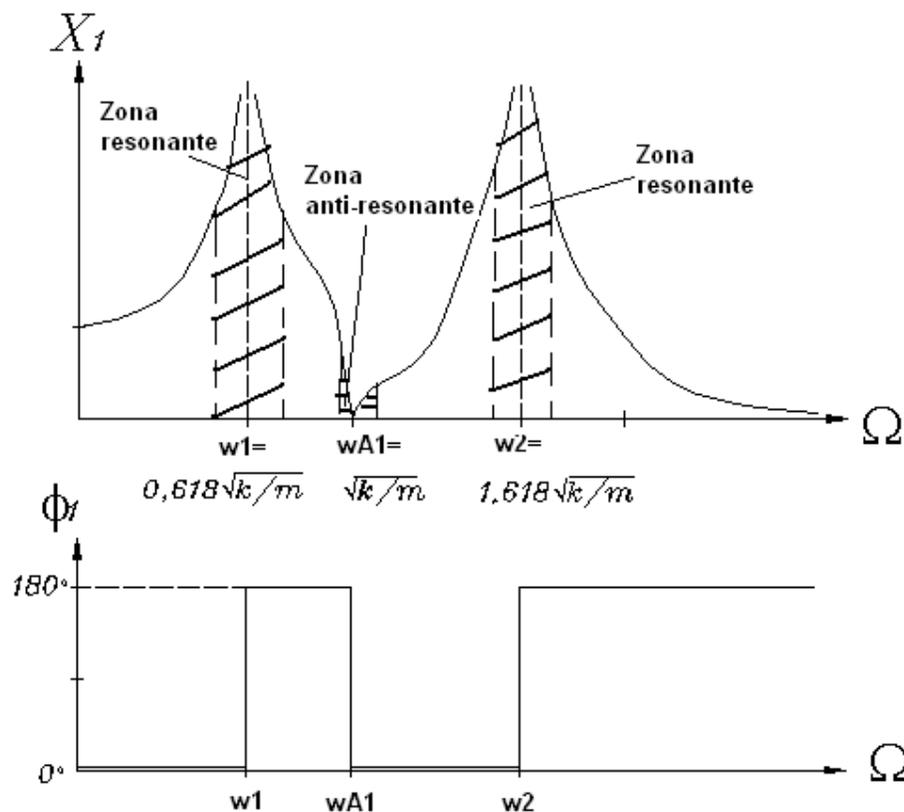


FIG. 2.11 Respuesta de X_1 del ejemplo.

Aplicación de zonas anti-resonantes: Absorbedor de vibraciones

Al igual que para los sistemas de un grado de libertad cuando se produce un problema de resonancia se puede evitar:

- 1.- Eliminando la fuente excitadora.
- 2.- Cambiar el valor de la frecuencia natural variando la masa y/o rigidez.
- 3.- Amortiguar el sistema.

Sin embargo, hay situaciones donde no es factible o es muy caro estas soluciones.

Otra alternativa “elegante” para solucionar un problema de resonancia, es utilizar un **absorbedor dinámico de vibraciones**. El absorbedor de vibraciones es un dispositivo que se le agrega a un sistema que está en resonancia, con el objeto de disminuir sus altas vibraciones, y que sea el absorbedor (de ahí su nombre) el que vibre.

Para ilustrar lo anterior consideremos una máquina montada en una base, como se indica en figura 2.12. Al sistema máquina- base se le llama el sistema primario. Supongamos que la máquina tiene altas vibraciones porque la fuerza de excitación $\Omega = \text{RPM}$ debido al desbalanceamiento residual del rotor está cercano de un ω_1 .

Este es un problema que corrientemente ocurre en las Plantas industriales. Aunque en su inicio la base está diseñada para que no entre en resonancia con la fuerza de excitación que existe en todo rotor, con el tiempo la corrosión de ella le va haciendo perder rigidez y variando sus frecuencias naturales hasta que se genera la resonancia.

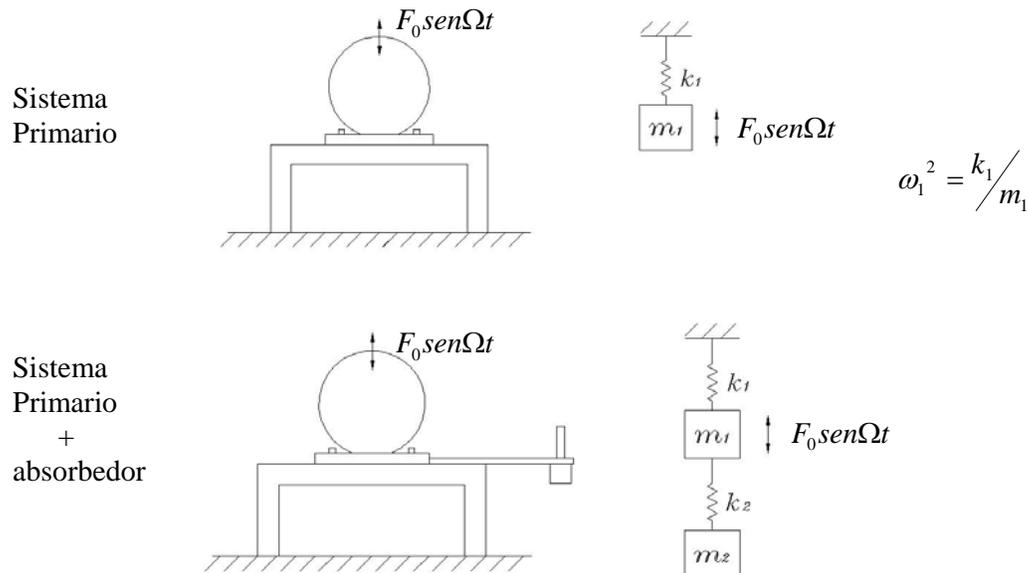


FIG. 2.11. Sistema en resonancia y solución mediante un absorbedor de vibraciones.

Para solucionar el problema se le agrega a la base un absorbedor de vibraciones compuesto por una barra de rigidez k_2 y una masa puntual m_2 en su extremo. Las ecuaciones del movimiento del sistema primario más absorbedor son:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_0 \text{sen} \Omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

y la respuesta estacionaria utilizando el método directo es:

$$x_1 = X_1 \text{sen} \Omega t = X_1 e^{j\Omega t}$$

$$x_2 = X_2 \text{sen} \Omega t = X_2 e^{j\Omega t}$$

$$F_0 \text{sen} \Omega t = F_0 e^{j\Omega t}$$

$$\begin{cases} (-m_1 \Omega^2 + k_1 + k_2)X_1 - X_2 k_2 = F_0 \\ -k_2 X_1 + (k_2 - m_2 \Omega^2)X_2 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{F_0 (k_2 - m_2 \Omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2)(k_2 - m_2 \Omega^2) - k_2^2} = \frac{F_0 / k_1 \left(1 - \Omega^2 / \omega_2^2\right)}{\left(1 + k_2 / k_1 - \Omega^2 / \omega_1^2\right) \left(1 - \Omega^2 / \omega_2^2\right) - k_2 / k_1} \quad (\text{I})$$

$$X_2 = \frac{F_0 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2)(k_2 - m_2 \Omega^2) - k_2^2} = \frac{F_0 / k_1}{\left(1 + k_2 / k_1 - \Omega^2 / \omega_1^2\right) \left(1 - \Omega^2 / \omega_2^2\right) - k_2 / k_1} \quad (\text{II})$$

donde la frecuencia natural del absorbedor es:

$$\omega_2^2 = k_2 / m_2$$

De la ecuación (I) se observa que si: $\Omega = \omega_2 \Rightarrow X_1 = 0$. Es decir, el sistema primario (máquina) queda detenido (no vibra) si se hace que la frecuencia natural del sistema absorbedor (ω_2) = Ω (frecuencia de la excitación).

De ecuación (II):

$$X_2 = -\frac{F_0}{k_2} \Rightarrow x_2(t) = -\frac{F_0}{k_2} \text{sen} \Omega t = \frac{F_0}{k_2} \text{sen}(\Omega t + 180^\circ)$$

es decir, el absorbedor vibra en contrafase con $F_0 \text{sen} \Omega t$.

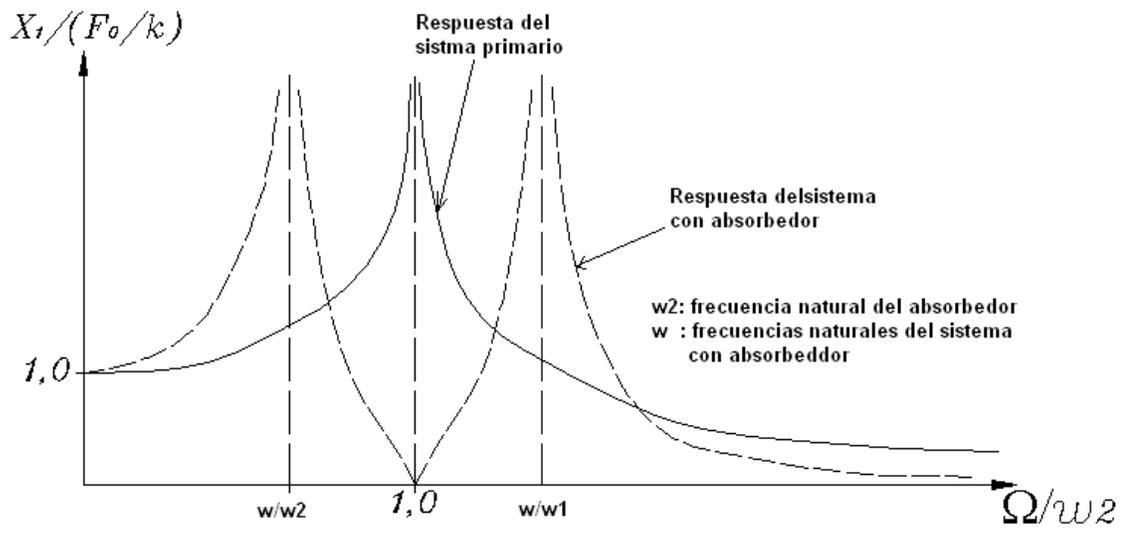


FIG.2.12. Respuesta del sistema primario con y sin absorbedor de vibraciones

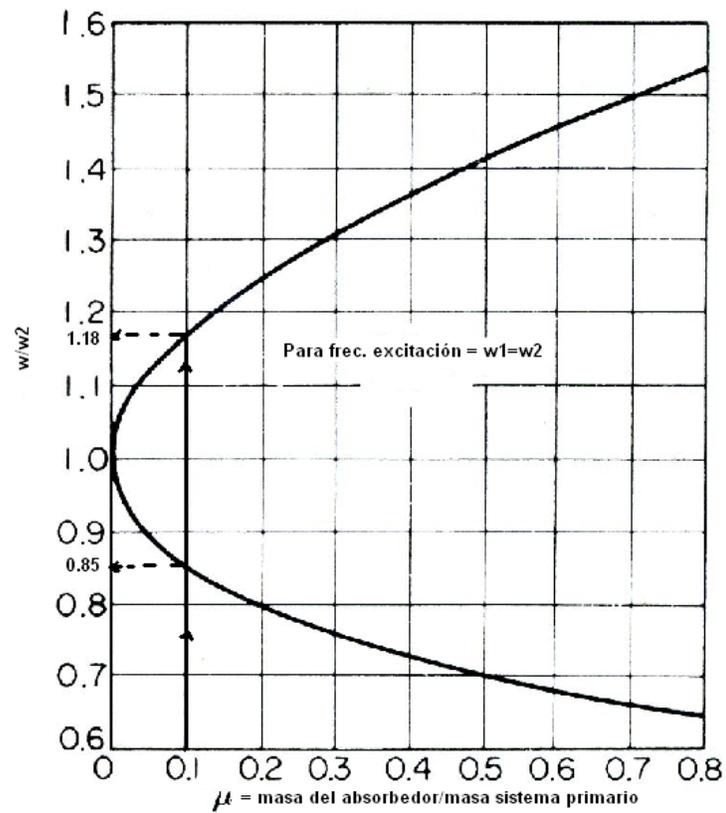


FIG. 2.13. Frecuencias naturales del sistema con amortiguador para diferentes razones μ = masa del absorbedor/masa del sistema primario

Figura 2.12 muestra como se desplazan las frecuencias naturales ω del sistema con amortiguador para diferentes razones:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} = \text{masa del absorbedor} / \text{masa del sistema primario}$$

Si la razón de masas es por ejemplo, $\mu=0.1$, se observa que las frecuencias del sistema con absorbedor serán 1.18 y 0.85 $w_2 (= w_1 = \Omega)$. De esta figura también se observa que si la masa del absorbedor es muy pequeña respecto a la masa del sistema primario, las frecuencias naturales del nuevo sistema con absorbedor estarán muy cerca de la frecuencia de la excitación, $\Omega = \text{RPM}$. Esto tiene el inconveniente, de que como las máquinas cambian ligeramente su velocidad de rotación, al cambiar $\Omega = \text{RPM}$, pueden entrar en resonancia con las nuevas frecuencias naturales. Se recomienda entonces que la razón de masas μ no sea menor que 0.1.

De la figura 2.12 se observa que el absorbedor no será efectivo si Ω no es constante. Cuando Ω no es constante y se puede caer en una zona resonante del sistema con absorbedor, entonces es necesario tener un cierto grado de amortiguamiento para que las vibraciones no tiendan a infinito. Eso si, como se observa en figura 2.14 la efectividad del absorbedor disminuye (la respuesta ahora ya no es cero para $\Omega=w_2$). En el caso de que exista amortiguamiento no se tendrá amplitudes $\rightarrow \infty$ en las resonancias ni amplitud = 0 en la antiresonancia

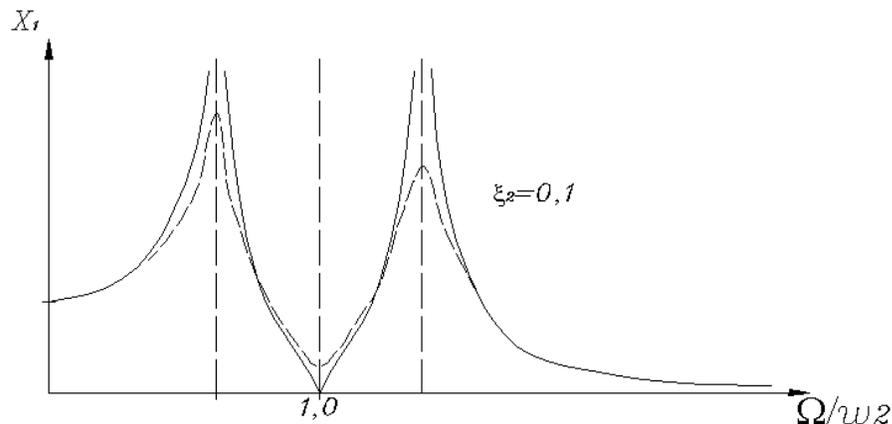


Figura 2.14. Comparación del sistema con absorbedor cuando este tiene y no tiene amortiguamiento.

En resumen:

- ⇒ Para solucionar problemas de resonancia con una fuerza de excitación, es útil el absorbedor de vibraciones
- ⇒ Para esto, la frecuencia natural del absorbedor, $w_2 = \Omega$ (frecuencia de la excitación)
- ⇒ Físicamente consiste en agregar una masa de manera que cuando ella vibre genere una fuerza de inercia que anule (en contra-fase) la fuerza de la excitación. Por lo tanto, la dirección en que vibrará el absorbedor debe ser la misma de las altas vibraciones que se quieren eliminar.
- ⇒ La masa del absorbedor no debe ser menor al 10% de la masa del sistema primario. Las dimensiones de la barra del absorbedor deben ser suficientes para resistir las vibraciones que se generan en él.

Funciones respuestas para sistemas de N grados de libertad

Para sistemas de varios grados de libertad se tiene una matriz de funciones respuestas que relacionan las diferentes salidas con las diferentes entradas al sistema.

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

donde:

$$H_{ij}(f) = X_i / F_j$$

- ⇒ Funciones respuestas directas o puntuales (point) si $i = j$.
- ⇒ Funciones respuestas de transferencia: si $i \neq j$.

Sistemas con movimientos de cuerpo rígido.

Los sistemas no restringidos a moverse, presentan movimientos de cuerpo rígido (el sistema se mueve sin deformarse). Ellos están caracterizados por:

- ⇒ La primera frecuencia natural de vibrar (la más baja) es $\omega_1 = 0$. El sistema se puede mover sin deformarse.
- ⇒ El primer modo de vibrar correspondiente a ω_1 es consecuente con el sistema moviéndose como un cuerpo rígido.

Ejemplo de un sistema con movimiento de cuerpo rígido

Determinar las frecuencias naturales y modos de vibrar del sistema indicado en figura 2.15.

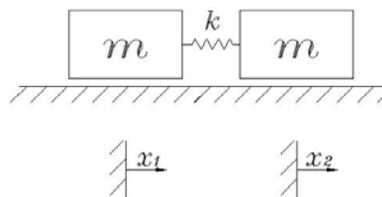


FIG- 2.15. Ejemplo de un sistema con movimiento de cuerpo rígido

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

Las frecuencias naturales son obtenidas de:

$$\det \begin{vmatrix} mr^2 + k & -k \\ -k & mr^2 + k \end{vmatrix} = 0 = m^2 r^4 + 2kmr^2 = 0$$

$$\Rightarrow r_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow r_2^2 = \frac{-2k}{m}$$

Para: $r_1^2 = 0; (\omega_1 = 0)$:

$$\begin{vmatrix} mr^2 + k & -k \\ -k & mr^2 + k \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = X_2 \rightarrow \{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Es decir, si la masa de la izquierda se desplaza en $X_1=1$, la masa de la derecha también se desplaza en $X_2=1$, o sea el sistema se mueve sin deformarse, o sea como cuerpo rígido.

Para: $r_2^2 = -2k/m; (\omega_2 = \sqrt{2k/m})$:

$$\begin{vmatrix} -2k/m + k & -k \\ -k & -2k/m + k \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = -X_2 \rightarrow \{X^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

3.3.2- Método modal

Las coordenadas x_1, x_2 elegidas para definir el movimiento del sistema de figura 2.16 están acopladas, en el sentido en que ambas coordenadas aparecen en cada ecuación y por lo tanto si varía x_1 , varía también x_2 .

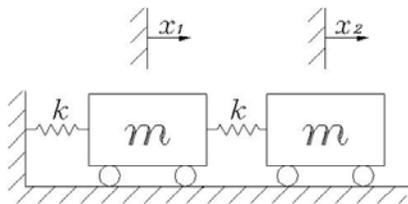


FIG- 2.16. Ejemplo de un sistema con movimiento de cuerpo rígido

Las ecuaciones del movimiento son:

$$mx_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$

$$mx_2 - kx_1 + kx_2 = 0$$

Coordenadas principales.

Sin embargo, siempre es posible en un sistema no - amortiguado encontrar un sistema de coordenadas, q_i , sin ningún tipo de acoplamiento o desacopladas, llamadas **coordenadas principales**.

Propiedades de ortogonalidad de los vectores propios

Consideremos dos modos cualquiera i y j . De ecuación (2-3)

$$\begin{aligned} [K]\{X\} &= -r^2[M]\{X\} & ; \\ \omega_i^2 &= -r_i^2 \end{aligned}$$

$$(2-a) \quad [K]\{X^i\} = \omega_i^2[M]\{X^i\}$$

$$(2-b) \quad [K]\{X^j\} = \omega_j^2[M]\{X^j\}$$

$$(2-c) \quad \{X^j\}^T [K]\{X^i\} = \omega_i^2 \{X^j\}^T [M]\{X^i\} \quad \text{Pre-multiplicando ec. (2-a) por } \{X^j\}^T$$

$$(2-d) \quad \{X^j\}^T [K] = \omega_i^2 \{X^j\}^T [M] \quad \text{Transpuesta de ecuación (2-b)}$$

$$(2-e) \quad \{X^j\}^T [K]\{X^i\} = \omega_i^2 \{X^j\}^T [M]\{X^i\} \quad \text{Post-multiplicando ec. (2-d) por } \{X^i\}$$

$$\Rightarrow (\omega_i^2 - \omega_j^2) \{X^j\}^T [M]\{X^i\} = 0 \quad \text{Ecuación (2-c) - (2-e)}$$

- **Para $i \neq j$, si $\omega_i \neq \omega_j$** ; se obtiene las siguientes **relaciones de ortogonalidad**:

$\begin{aligned} \{X^i\}^T [M]\{X^i\} &= 0 \\ \{X^j\}^T [K]\{X^i\} &= 0 \\ \text{para } i, j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned}$	(2-8)
---	-------

es decir, los vectores propios son ortogonales respecto a las matrices $[M]$ y $[K]$. Estas relaciones son importantes, como veremos a continuación, porque ellas permiten desacoplar las ecuaciones del movimiento.

- **Para $i = j$** : se obtiene:

$\begin{aligned} \{X^i\}^T [M]\{X^i\} &= \mu_{ii} \\ \{X^i\}^T [K]\{X^i\} &= \gamma_{ii} \\ \mu_{ii} &= \text{Masa modal correspondiente al modo } i. \\ \gamma_{ii} &= \text{Rigidez modal correspondiente al modo } i. \end{aligned}$	(2-9)
---	-------

Nota: observar que μ_{ii}, γ_{ii} son constantes que dependen, sin embargo, de cómo fue normalizado el vector propio $\{X^i\}$.

Matriz modal

Para eficiencia operacional se define la matriz modal $[X]$, como la matriz cuyas columnas son los vectores propios de los diferentes modos, o sea como:

$$[X] = [X^1 \quad X^2 \quad \dots \quad X^N] \quad (2-10)$$

Se puede demostrar que $[X]^T [M] [X]$ y $[X]^T [K] [X]$ son matrices diagonales. Como ejemplo, consideremos un sistema con dos grados de libertad:

$$[X]^T [M] [X] = \begin{bmatrix} \{X^1\}^T \\ \{X^2\}^T \end{bmatrix} [M] \begin{bmatrix} \{X^1\} \\ \{X^2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{X^1\}^T [M] \{X^1\} & \{X^1\}^T [M] \{X^2\} \\ \{X^2\}^T [M] \{X^1\} & \{X^2\}^T [M] \{X^2\} \end{bmatrix}$$

$$[X]^T [M] [X] = \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 \\ 0 & \mu_{22} \end{bmatrix}$$

Ecuaciones del movimiento en coordenadas principales.

Introduciendo la siguiente transformación lineal de coordenadas:

$$\{X(t)\} = [X] \{q(t)\} \quad (2-11)$$

en las ecuaciones del movimiento y pre-multiplicando por $[X]^T$, se obtiene:

$$\begin{aligned} [X]^T [M] [X] \{\ddot{q}\} + [X]^T [K] [X] \{q\} &= [X]^T \{f\} \\ \begin{bmatrix} \leftarrow \mu_{\rightarrow} \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \leftarrow \gamma_{\rightarrow} \end{bmatrix} \{q\} &= \{P\} \end{aligned} \quad (2-12)$$

Las coordenadas $q_i(t)$, se llaman **coordenadas principales** y generalmente no tienen significado físico. Es una herramienta de cálculo útil para desacoplar las ecuaciones del movimiento. El sistema de ecuación (2-12) son N ecuaciones desacopladas de la forma:

$$\mu_{ii} \ddot{q}_i + \gamma_{ii} \dot{q}_i = P_i(t) \quad (2-13)$$

$$P_i(t) = [X]^T \{f\} \quad (2-14)$$

Con $i = 1, 2, 3, \dots, N$

Cuando los modos son normalizados respecto a la matriz de masa, a veces se llaman modos normales : $\{X_N^i\}$ y las matrices de (2-12) se transforman en :

$$\begin{aligned} [X_N]^T [M] [X_N] &= [\leftarrow 1 \rightarrow] \\ [X_N]^T [K] [X_N] &= [\leftarrow \omega_i^2 \rightarrow] \end{aligned} \quad (2-15)$$

Ejemplo de vibraciones libres.

Determinar utilizando el método modal $x_1(t), x_2(t)$ del sistema de la figura 2.17 si se le dan las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = x_{10} ; x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

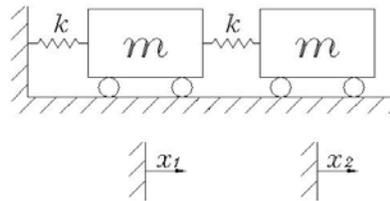


FIG. 2.17. Ejemplo

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Las frecuencias naturales y sus modos de vibrar son:

$$\{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{Bmatrix}; \quad \{X^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix}; \quad \omega_1^2 = 2,618 \frac{k}{m}; \quad \omega_2^2 = 0,382 \frac{k}{m}$$

1. El primer paso para utilizar el método modal es desacoplar las ecuaciones del movimiento, para lo cual se determina sus masas y rigideces modales:

$$\mu_{11} = \{X^1\}^T [M] \{X^1\} = \{1 \quad 1,618\} \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{Bmatrix} = 3,618m$$

$$\mu_{22} = \{1 \quad -0,618\} \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix} = 1,382m$$

$$\gamma_{11} = \{1 \quad 1,618\} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{Bmatrix} = 1,382 k$$

$$\gamma_{22} = \{1 \quad -0,618\} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix} = 3,618 k$$

⇒ Reemplazando estos valores en las ecuaciones (2-13) se obtienen las ecuaciones del movimiento desacopladas:

$$3,618 m \ddot{q}_1 + 1,382 k q_1 = 0$$

$$1,382 m \ddot{q}_2 + 3,618 k q_2 = 0$$

⇒ Comprobación de relaciones de ortogonalidad (verificar si fueron bien calculados los $\{X^i\}$):

$$\mu_{12} = \{1 \quad 1,618\} \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix} = m - m = 0 \quad ; \quad \text{idem } \gamma_{12} = 0$$

⇒ Verificación de las frecuencias naturales (las frecuencias naturales son independientes del sistema de coordenadas elegido). Las frecuencias naturales calculadas del sistema de ecuaciones desacopladas son:

$$\omega_1^2 = \frac{\gamma_{11}}{\mu_{11}} = \frac{1,382 k}{3,618 m} = 0,382 \frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{\gamma_{22}}{\mu_{22}} = \frac{3,618 k}{1,382 m} = 2,618 \frac{k}{m}$$

2. La solución de cada ecuación desacoplada es la solución de un sistema de un grado de libertad en vibraciones libres:

$$q_i(t) = q_i(0) \cos \omega_i t + \frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i} \text{sen } \omega_i t \quad (*)$$

3. Cálculo de las condiciones iniciales en coordenadas $q_i : (q_i(0) , \dot{q}_i(0))$, usando ecuación (2-11):

$$\{x(t)\} = [X] \{q(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,618 & -0,618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow q_1(t) &= 0,276 x_1(t) + 0,447 x_2(t) \\ \Rightarrow q_1(0) &= 0,276 x_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow q_2(t) &= 0,724 x_1(t) - 0,447 x_2(t) \\ \Rightarrow q_2(0) &= 0,724 x_{10} \end{aligned}$$

NOTA: Observe que las coordenadas $q_1(t)$ y $q_2(t)$ no tienen un significado físico directo, solo sirven para desacoplar las ecuaciones del movimiento.

Reemplazando en ecuación (*) se obtiene la solución en coordenadas $q_i(t)$:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= 0,276 x_{10} \cos \omega_1 t \\ q_2(t) &= 0,724 x_{10} \cos \omega_2 t \end{aligned}$$

4. Para obtener la solución en coordenadas $x_i(t)$, se utiliza las ecuaciones (2-11), obteniéndose:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0,276 x_{10} \cos \omega_1 t + 0,724 x_{10} \cos \omega_2 t \\ x_2(t) &= 0,447 x_{10} \cos \omega_1 t + 0,447 x_{10} \cos \omega_2 t \end{aligned}$$

Verificación para $t = 0$:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0,276 x_{10} + 0,724 x_{10} = x_{10} \\ x_2(0) &= 0,447 x_{10} - 0,447 x_{10} = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo.

- Determine las respuestas estacionarias $x_1(t)$, $x_2(t)$ del sistema de figura 2.18 usando el método modal
- Determine la respuesta total $x_1(t)$ y $x_2(t)$ si las condiciones iniciales son:
 $x_1(0) = 0$; $x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

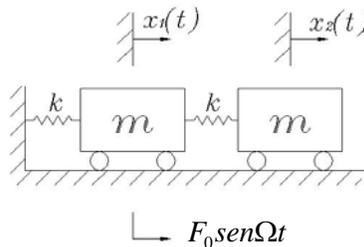


FIG. 2.18. Ejemplo

a) De ecuación (2-14) se determina las fuerzas modales:

$$\{P_i(t)\} = [X]^T \{f\}$$

$$\{P_i(t)\} = \begin{bmatrix} 1 & 1,618 \\ 1 & -0,618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_0 \text{sen}\Omega t \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \text{sen}\Omega t \\ F_0 \text{sen}\Omega t \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto las ecuaciones desacopladas del movimiento de acuerdo a ecuación (2-13) son:

$$\begin{cases} 3,618 m \ddot{q}_1 + 1,382 k q_1 = F_0 \text{sen}\Omega t \\ 1,382 m \ddot{q}_2 + 3,618 k q_2 = F_0 \text{sen}\Omega t \end{cases} \quad (*)$$

Cuyas soluciones en coordenadas $q_i(t)$ para el movimiento estacionario son:

$$q_i(t) = \frac{F_0 / \gamma_{ii}}{1 - (\Omega / \omega_i)^2} \text{sen}\Omega t = \frac{F_0}{\mu_{ii} (\omega_i^2 - \Omega^2)} \text{sen}\Omega t$$

$$q_1(t) = \frac{F_0}{3,618 m (\omega_1^2 - \Omega^2)} \text{sen}\Omega t$$

$$q_2(t) = \frac{F_0}{1,382 m (\omega_2^2 - \Omega^2)} \text{sen}\Omega t$$

Para obtener la solución en coordenadas $x_i(t)$, se utiliza las ecuaciones (2-11), obteniéndose:

$$x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) = \frac{F_0}{m} \text{sen}\Omega t \left[\frac{1}{3,618 m (\omega_1^2 - \Omega^2)} + \frac{1}{1,382 m (\omega_2^2 - \Omega^2)} \right]$$

$$x_1(t) = \frac{F_0 (k - m\Omega^2)}{m^2 (\omega_1^2 - \Omega^2) (\omega_2^2 - \Omega^2)} \text{sen}\Omega t = X_1 \text{sen}\Omega t$$

$$x_2(t) = 1,618 q_1(t) - 0,618 q_2(t)$$

$$x_2(t) = \frac{-F_0 k}{m^2 (\omega_1^2 - \Omega^2) (\omega_2^2 - \Omega^2)} \text{sen}\Omega t = X_2 \text{sen}\Omega t$$

Estas ecuaciones son las mismas obtenidas utilizando el método directo.

b) La solución total de las ecuaciones (*) es:

$$q_i(t) = \frac{F_0}{\mu_{ii} (\omega_i^2 - \Omega^2)} \text{sen}\Omega t + A_i \text{sen}\omega_i t + B_i \cos \omega_i t$$

donde las constantes A_i y B_i son determinadas de las condiciones de borde

Análisis de la participación de los modos de vibrar en la respuesta estacionaria del ejemplo

A continuación se analiza la participación de cada modo de vibrar en $x_1(t)$ para diferentes valores de la frecuencia de excitación, Ω .

$$x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) = \frac{F_0 \operatorname{sen} \Omega t}{3,618 m(\omega_1^2 - \Omega^2)} + \frac{F_0 \operatorname{sen} \Omega t}{1,382 m(\omega_2^2 - \Omega^2)}$$

$q_1(t) = \text{participación 1er modo} \quad q_2(t) = \text{participación 2º modo}$

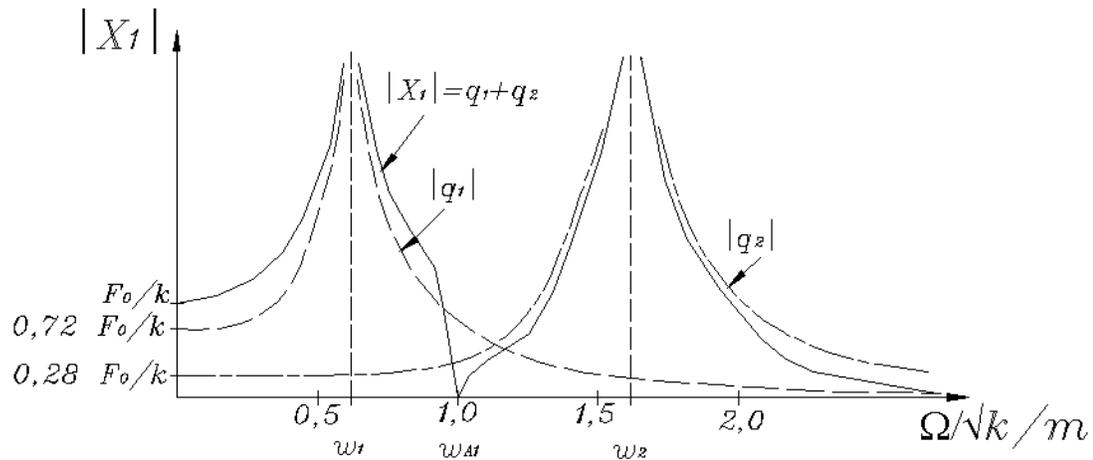


FIG. 2.19. Participación de los modos de vibrar en la respuesta X_1 del ejemplo.

Notas:

- ⇒ Para Ω cercanas a ω_i la respuesta estacionaria total es aproximadamente la del modo i .
- ⇒ Para un sistema de N grados, en la respuesta a una excitación a Ω , los modos predominantes son aquéllos (dos o tres) con ω_i cercanos a Ω . Es decir, un sistema de N grados de libertad puede ser analizado en ese caso como un sistema de dos o tres grados de libertad.

En resumen:

- La gran ventaja del método modal es desacoplar las ecuaciones del movimiento, lo que permite analizar un sistema de N grados de libertad como la suma de N sistemas de un grado de libertad
- Lo anterior sin embargo, es a costa de un mayor tiempo de desarrollo
- El método modal permite determinar la respuesta estacionaria y transiente de sistemas de ecuaciones diferenciales (por lo tanto, es aplicado al análisis de sistemas eléctricos, térmicos, fluidos, etc.) de N grados de libertad bajo la acción de una excitación cualesquiera.
- El método directo, aunque más corto, solo es aplicable para determinar solo la respuesta estacionaria bajo excitación armónica.

4. Vibraciones amortiguadas

Se ha visto que el amortiguamiento no tiene influencia en la respuesta estacionaria en las zonas alejadas de las resonancias, y por lo tanto, se puede despreciar. Como en general en los diseños se evita trabajar en las zonas resonantes, en la mayor cantidad de situaciones no se considera el amortiguamiento. Sin embargo, si es necesario trabajar en una zona resonante, es

4.1.- Vibraciones libres

La solución de las ecuaciones del movimiento en vibraciones libres:

$$[M]\{\dot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (2-16)$$

son de la forma: $\{x\} = \{X\}e^{rt}$ (2-17)

reemplazando ecuación (2-17) en (2-16) se obtiene:

$$[Mr^2 + Cr + K]\{X\} = 0 \quad (2-18)$$

para que el sistema de ecuaciones homogéneo tenga soluciones diferentes a la trivial, es necesario que el determinante de sus coeficientes sea cero:

$$\det [Mr^2 + Cr + K] = 0 \quad (2-19)$$

Para que exista vibración los valores propios, r , obtenidos de la ecuación (2-19) deben ser complejos conjugados, es decir, deben ser de la forma:

$$r_i = -\alpha_i \pm j\beta_i \quad (2-20)$$

$$\alpha_i = \xi_i \omega_i$$

$$\beta_i = \omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

Nota: α_i debe ser negativo para que el sistema sea estable.

Reemplazando los valores para "r" obtenidos de la ecuación (2-20) en (2-18), se obtienen los modos de vibrar. Estos vectores propios podrán ser reales o complejos dependiendo del tipo de amortiguamiento.

Amortiguamiento proporcional

Se llama amortiguamiento proporcional, al amortiguamiento que es proporcional a la matriz de masa y/o matriz de rigidez, es decir, cuando:

$$[C] = a[M] + b[K] \quad (2-21)$$

con $a, b = \text{constantes}$

Cuando el amortiguamiento es proporcional:

- ⇒ Los modos de vibrar son reales, e iguales al sistema conservativo asociado
- ⇒ Se pueden desacoplar las ecuaciones del movimiento

En efecto, de las ecuaciones del movimiento:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (2-22)$$

con la transformación de coordenadas:

$\{x\} = [X]\{q\}$ y pre-multiplicando por $[X]^T$, se obtiene:

$$[X]^T [M] [X] \{\ddot{q}\} + [X]^T [C] [X] \{\dot{q}\} + [X]^T [K] [X] \{q\} = [X]^T \{F\} \quad (2-23)$$

Si:

$[C] = a[M] + b[K]$, entonces:

$$[X]^T [C] [X] = a \overbrace{[X]^T [M] [X]}^{\text{Diagonal}} + b \overbrace{[X]^T [K] [X]}^{\text{Diagonal}} \Rightarrow \text{Diagonal}$$

y la ecuación (2-23) queda desacoplada:

$$[\leftarrow \mu_{\rightarrow}] \{\ddot{q}_i\} + [\leftarrow \varphi_{\rightarrow}] \{\dot{q}_i\} + [\leftarrow \gamma_{\rightarrow}] \{q_i\} = \{P\} \quad (2-24)$$

donde:

$$\varphi_{ii} = \{X^i\}^T [C] \{X^i\} = \text{amortiguamiento modal del modo } i \quad (2-25)$$

Amortiguamiento no-proporcional

Cuando no se satisface los requerimientos indicados en la ecuación (2-21), el amortiguamiento es no-proporcional, lo que trae como consecuencia:

1. No se pueden desacoplar las ecuaciones del movimiento. La matriz de amortiguamiento no es diagonal.
2. Los modos de vibrar no son reales, son cantidades complejas. Físicamente significa que las diferentes masas no llegan a sus posiciones extremas al mismo tiempo, sino que desfasadas (por lo tanto ya no se puede hablar de la deformada o forma de vibrar).

Ejemplo

Determinar para el sistema de la figura 2.20, las frecuencias naturales y modos de vibrar para:

- a) Sistema con amortiguamiento proporcional: $c_1 = c_2 = 0,2\sqrt{km}$
- b) Sistema con amortiguamiento no-proporcional: $c_1 = 0,4\sqrt{km}$
 $c_2 = 0,2\sqrt{km}$

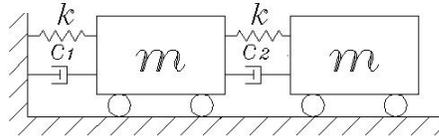


FIG. 2.20. Ejemplo

a) Con amortiguamiento proporcional

$$c_1 = c_2 = 0,2\sqrt{km}$$

$$\begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4\sqrt{km} & -0,2\sqrt{km} \\ -0,2\sqrt{km} & 0,2\sqrt{km} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Observe que el amortiguamiento es proporcional, pues: $[C]$ es proporcional a $[K]$

$$\det [Mr^2 + Cr + K] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} mr^2 + 0,4\sqrt{km} r + 2k & -0,2\sqrt{km} - k \\ -0,2\sqrt{km} - k & mr^2 + 0,2\sqrt{km} r + k \end{bmatrix} = 0$$

$$r^4 + 0,6r^3\sqrt{km} + 3,04r^2 \frac{k}{m} + 0,41\sqrt{\frac{k}{m} \frac{k}{m} + \frac{k^2}{m^2}} = 0$$

Para resolver esto se requiere un programa de cálculo numérico. Utilizando el programa MATLAB como se verá en el ejemplo siguiente, se obtiene:

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} r_1 &= (-0,03819 \pm 0,6168 j) \sqrt{\frac{k}{m}} = \alpha_1 \pm j\beta_1 \\ r_2 &= (-0,2618 \pm 1,5967 j) \sqrt{\frac{k}{m}} = \alpha_2 \pm j\beta_2 \end{aligned} \right\}$$

Observe que los valores propios obtenidos cuando existe vibración, son siempre complejos conjugados obteniéndose $\pm w_i$. Figura 2.21 ilustra que para que $x(t)$ sea real debe ser la suma de dos vectores iguales con frecuencias $\pm w$, es decir :

$Ae^{j\omega t} + Ae^{-j\omega t}$ es un real , como debe ser $x(t)$

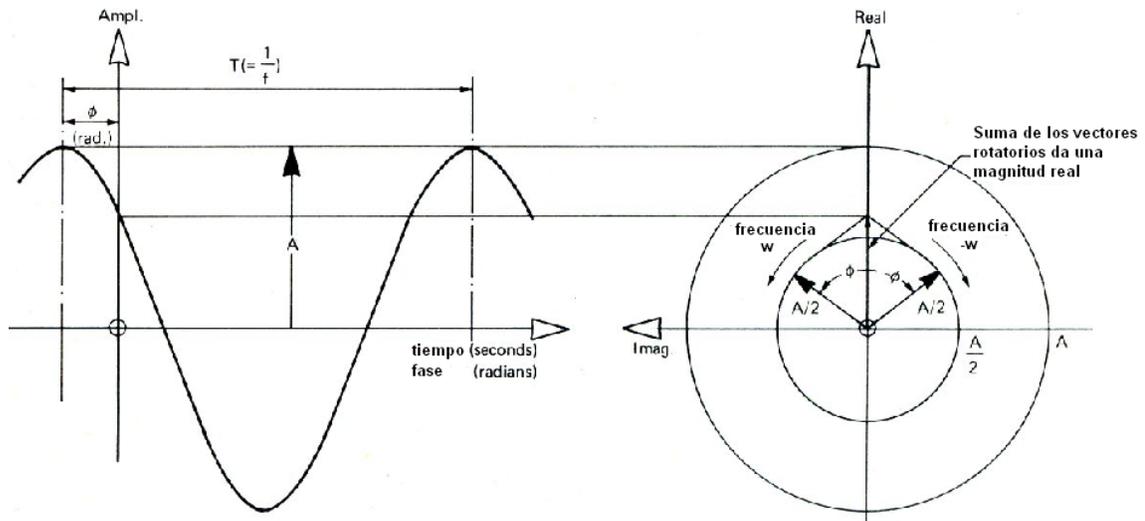


FIG. 2.21. Suma de dos vectores rotatorios iguales con $+w$ y $-w$ generan una magnitud real.

Usando ecuación (2-20):

$$\omega_{d_1} = 0,6168\sqrt{k/m} \quad ; \quad \omega_1 = 0,618\sqrt{k/m} \quad ; \quad \xi_1 = 0,0618$$

$$\omega_{d_2} = 1,5967\sqrt{k/m} \quad ; \quad \omega_2 = 1,618\sqrt{k/m} \quad ; \quad \xi_2 = 0,1618$$

Usando ecuación (2-18):

$$[Mr^2 + Cr + K]\{X\} = 0$$

$$\text{Para: } r_1 = (-0.03819 \mp 0.6168j)\sqrt{k/m}$$

$$\{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 1,618 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Para: } r_2 = (-0.2618 \mp 1.5967j)\sqrt{k/m}$$

$$\{X^2\} = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ -0,618 \end{Bmatrix}$$

Nota: Se observa que los modos de vibrar son reales e idénticos a los modos sin amortiguamiento.

b) Con amortiguamiento no – proporcional:

$$c_1 = 0,4\sqrt{km}$$

$$c_2 = 0,2\sqrt{km}$$

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,6\sqrt{km} & -0,2\sqrt{km} \\ -0,2\sqrt{km} & 0,2\sqrt{km} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\det[Mr^2 + Cr + K] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= -0,0659 \pm 0,6156j \\ r_2 &= -0,3341 \pm 1,5802j \end{aligned}$$

Usando ecuación (2-20) se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_{d1} &= 0,6156 & ; \omega_1 &= 0,619 & ; \xi_1 &= 0,1064 \\ \omega_{d2} &= 1,58 & ; \omega_2 &= 1,615 & ; \xi_2 &= 0,207 \end{aligned}$$

Usando ecuación (2-18):

$$[Mr^2 + Cr + K]\{X\} = 0$$

Para: $r_1 = (-0,0659 \mp 0,6156j)\sqrt{k/m}$:

$$\{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,618 \pm 0,09017j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,621e^{\pm 3,2^\circ} \end{Bmatrix}$$

Para: $r_2 = (-0,3341 \mp 1,5802j)\sqrt{k/m}$

$$\{X^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,5982 \pm 0,08714j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,6045 e^{\pm 8,3^\circ} \end{Bmatrix}$$

4.2. Método pseudo modal

1.- Si el sistema tiene N grados de libertad se usa un sistema sólo de n grados de libertad de modo que:

$$\Omega \text{ máx} < (\omega_i)_n$$

(máxima frecuencia de excitación) < (frecuencia natural del modo n).

Para lo cual es necesario determinar

$$\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$$

$$X^1, X^2 \dots X^n$$

2.- Se resuelve el sistema:

$$\left[\begin{matrix} \leftarrow \mu \rightarrow \\ \leftarrow \gamma \rightarrow \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \dot{q} \\ q \end{matrix} \right\} + X^T C X \left\{ \begin{matrix} \dot{q} \\ q \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_3(t) \end{matrix} \right\}$$

Si el amortiguamiento es no-proporcional y pequeño, se puede aproximar la solución no considerando los términos diagonales de matriz $X^T C X$ (Hipótesis de Basile) y desacoplando el sistema de ecuaciones. Falta por determinar para que valores de los coeficientes de amortiguamiento esta hipótesis es válida.

5. Método de resolución de valores y vectores propios utilizando MATLAB

Cuando:

- ⇒ un sistema no amortiguado tiene más de dos grados de libertad
- ⇒ o cuando un sistema amortiguado tiene más de un grado de libertad

se requiere utilizar un programa de cálculo numérico para determinar las frecuencias naturales y modos de vibrar. Una alternativa, la cual se verá a continuación es el programa MATLAB.

MATLAB resuelve el problema estándar del valor propio:

$$[A]\{x\} = \lambda\{x\} \quad (2-26)$$

por lo que, el primer paso es escribir la ecuación a resolver en la forma indicada en ecuación (2-26)

- 1) Determinar las frecuencias naturales y modos de vibrar de un sistema no amortiguado de N grados de libertad

Para transformar las ecuaciones del movimiento:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

a un problema del valor propio en la forma estándar, se reemplaza en la ecuación anterior:

$$\{\ddot{x}\} = r^2\{x\}$$

obteniéndose:

$$\begin{aligned} [K]\{x\} &= -r^2[M]\{x\} \\ [M]^{-1}[K]\{x\} &= -r^2\{x\} \end{aligned} \quad (2-27)$$

se obtiene la ecuación estándar del problema del valor propio, con :

$$\begin{aligned} [A] &= [M]^{-1}[K] \\ \lambda &= -r^2 \end{aligned} \quad (2-28)$$

- 2) Determinar las frecuencias naturales y modos de vibrar de un sistema amortiguado de N grados de libertad

Para transformar las ecuaciones del movimiento:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

a un problema del valor propio en la forma estándar , se le suma la ecuación anterior:

$$[K]\{\dot{x}\} - [K]\{\dot{x}\} = 0$$

obteniéndose después de ordenar:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & K \\ K & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} = 0 \quad (2-29)$$

si se llama:

$$[A] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} ; [B] = \begin{bmatrix} C & K \\ K & 0 \end{bmatrix} ; \{y\} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} \quad (2-30)$$

se obtiene:

$$[A]\{\dot{y}(t)\} + [B]\{y(t)\} = 0$$

como las soluciones son de la forma:

$$\{y(t)\} = \{Y\}e^{rt}$$

Se obtiene la forma estándar del problema del valor propio:

$$\begin{aligned} [A]^{-1}[B]\{Y\} &= -r\{Y\} \\ [A]\{Y\} &= \lambda\{Y\} \end{aligned} \quad (2-31)$$

Ejemplo:

Determinar las frecuencias naturales y modos de vibrar del problema anterior.

Como se sabe que las unidades para las frecuencias naturales serán determinadas en función de $\sqrt{k/m}$, para resolverlo numéricamente es equivalente a resolver el problema indicado en figura 2.22, y luego a los resultados obtenidos para w_i , multiplicarlos por $\sqrt{k/m}$.

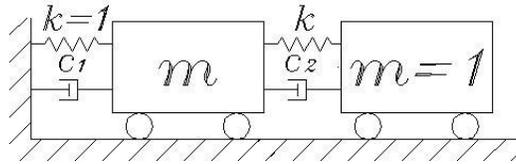


FIG. 2.22. Resolución numérica del problema anterior

a) **Para el amortiguamiento no proporcional:** $c_1 = 0,4\sqrt{km}$, $c_2 = 0,2\sqrt{km}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,6 & -0,2 \\ -0,2 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow [C]$: Amortiguamiento no proporcional

Programa MATLAB para resolver el ejemplo:

1. Introducir los valores de las matrices A y B de ecuación (2- 30):

```

» A
A =
    1    0    0    0
    0    1    0    0
    0    0   -2    1
    0    0    1   -1

» B
B =
    0.6000  -0.2000  2.0000  -1.0000
   -0.2000  0.2000  -1.0000  1.0000
    2.0000  -1.0000    0        0
   -1.0000  1.0000    0        0

```

2. Se obtienen los siguientes valores al utilizar la función *eig* de MATLAB.

```

» [E,EE]=eig(inv(A)*B)

E =

-0.3774 - 0.6221i -0.3774 + 0.6221i 0.2433 + 0.1313i 0.2433 - 0.1313i
0.1715 + 0.4050i 0.1715 - 0.4050i 0.4055 + 0.1905i 0.4055 - 0.1905i
0.4252 - 0.1489i 0.4252 + 0.1489i -0.2527 + 0.3681i -0.2527 - 0.3681i
-0.2673 + 0.0520i -0.2673 - 0.0520i -0.3757 + 0.6184i -0.3757 - 0.6184i

EE =

0.3341 + 1.5802i 0 0 0
0 0.3341 - 1.5802i 0 0
0 0 0.0659 + 0.6156i 0
0 0 0 0.0659 - 0.6156i

```

Se ha llamado:

EE = matriz de los valores propios, $\lambda_i = -r_i$

E = el vector propio, definido en ecuación (2-30) :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix}$$

Observe:

⇒ que: $r_i = -\lambda_i$

⇒ los valores propios no están ordenados del menor valor al mayor valor

➤ ordenando los valores propios de menor a mayor se obtiene:

$$r_1 = -\lambda_1 = -0,0659 \mp 0,6156i \rightarrow \omega_{d1} = 0,6156 \quad ; \xi_1 \omega_1 = 0,0659$$

$$r_2 = -\lambda_2 = -0,3341 \mp 1,5802i \rightarrow \omega_{d2} = 1,5802 \quad ; \xi_2 \omega_2 = 0,3341$$

➤ considerando solo del vector anterior los desplazamientos (eliminando las velocidades), se obtiene para los vectores propios:

Para r_1 :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,2527 \pm 0,3681i \\ -0,3757 \pm 0,6184i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,44641e^{\mp 55,5^\circ} \\ -0,72358e^{-58,7^\circ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,621e^{\mp 3,2^\circ} \end{Bmatrix}$$

Para r_2 :

$$\left\{ \begin{matrix} {}^2 X_1 \\ {}^2 X_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0,4252 \mp 0,1489i \\ -0,2673 \pm 0,0520i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0,450518e^{\mp 19,3^\circ} \\ -0,27231e^{\pm 169^\circ} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -0,6046e^{\pm 188,3^\circ} \end{matrix} \right\}$$

b) **Para el amortiguamiento proporcional:**

$$c_1 = 0,2\sqrt{km} \quad , c_2 = 0,2\sqrt{km} \Rightarrow [C]: \text{Amortiguamiento proporcional}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,2 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Luego utilizando MATLAB se obtiene:

```

» [E,EE]=eig(inv(A)*B)

E =

0.0030 - 0.7236i  0.0030 + 0.7236i  -0.0474 + 0.2723i  -0.0474 - 0.2723i
-0.0019 + 0.4472i  -0.0019 - 0.4472i  -0.0767 + 0.4406i  -0.0767 - 0.4406i
0.4410 + 0.0742i  0.4410 - 0.0742i  -0.4350 - 0.1038i  -0.4350 + 0.1038i
-0.2726 - 0.0459i  -0.2726 + 0.0459i  -0.7038 - 0.1680i  -0.7038 + 0.1680i

EE =

0.2618 + 1.5967i  0  0  0
0  0.2618 - 1.5967i  0  0
0  0  0.0382 + 0.6169i  0
0  0  0  0.0382 - 0.6169i

```

$$r_1 = -\lambda_1 = -0,0382 \mp 0,6169i$$

$$r_2 = -\lambda_2 = -0,2618 \mp 1,5967i$$

Para r_1 :

$$\left\{ \begin{matrix} {}^1 X_1 \\ {}^1 X_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -0,4350 \mp 0,1038i \\ -0,7038 \mp 0,1680i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0,4472e^{166,58^\circ} \\ 0,72357e^{166,58^\circ} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1,618 \end{matrix} \right\}$$

Para r_2 :

$$\left\{ \begin{matrix} {}^2 X_1 \\ {}^2 X_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0,4410 \pm 0,0742i \\ -0,2726 \mp 0,0459i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0,4472e^{-9,55^\circ} \\ 0,27641e^{-189,55^\circ} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -0,618 \end{matrix} \right\}$$

Observe que los modos obtenidos son reales e iguales a los del sistema conservativo asociado.

Solución de b), utilizando el sistema conservativo asociado

Como se sabe que cuando el amortiguamiento es proporcional, las frecuencias naturales y modos de vibrar son iguales a los del sistema conservativo asociado, es más corto en ese caso determinarlos directamente del sistema conservativo asociado. Para el ejemplo analizado, el sistema conservativo asociado se muestra en figura 2.23.

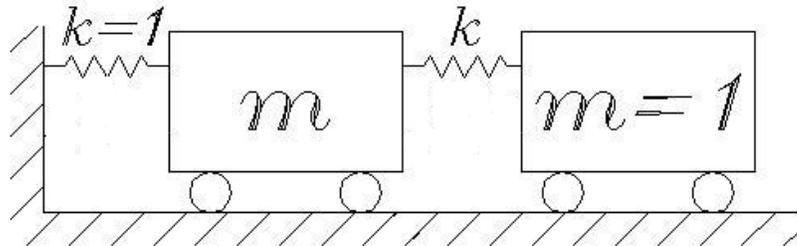


FIG. 2.23. Sistema conservativo asociado

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Utilizando la ecuación 2-28, en MATLAB se obtiene:

```
>> M = [1 0; 0 1]
>> K = [2 -1; -1 1]
>> [E,EE] = eig(inv(M)*K)

E =
   -0.5257   -0.8507
   -0.8507   -0.5257

EE =
    0.382      0
    0         2.6180
```

Por lo tanto: de ecuación (2-28):

$$\begin{aligned} r_1^2 &= -\lambda_1 = 0.382 & \rightarrow & w_1 = 0.618\sqrt{k/m} \\ r_2^2 &= -\lambda_2 = 2.618 & \rightarrow & w_2 = 1.618\sqrt{k/m} \end{aligned}$$

Para: $w_1 = 0.618\sqrt{k/m}$

$$\begin{Bmatrix} {}^1 X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^1 X_1 \\ {}^1 X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}$$

Para: $w_2 = 1.618\sqrt{k/m}$

$$\{^2 X\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix}$$

6. Comparación del comportamiento vibratorio de sistemas lineales y no-lineales.

En general las máquinas y estructuras tienen un comportamiento aproximadamente lineal y es válida la teoría desarrollada hasta aquí. Sin embargo, bajo ciertas circunstancias las máquinas tienen un comportamiento no-lineal. Las causas más frecuentes de no linealidades en las máquinas se genera cuando la relación entre la fuerza que genera el elemento elástico (modelado por un resorte) y su deformación no siguen una relación lineal.

Figura 31 muestra el comportamiento de un resorte con comportamiento lineal, con comportamiento de resorte “duro” y con comportamiento de “resorte blando”. Cuando la relación existente entre la fuerza aplicada al resorte y su deformación es como la indicada en la curva superior, se dice que el resorte tiene comportamiento de resorte “duro”, pues para obtener un determinado desplazamiento de él, se requiere una fuerza mayor que la requerida si hubiese tenido comportamiento lineal. Cuando la relación existente entre la fuerza aplicada al resorte y su deformación es como la indicada en la curva inferior, se dice que el resorte tiene comportamiento de resorte “blando”, pues para obtener un determinado desplazamiento de él, se requiere una fuerza menor que la requerida si hubiese tenido comportamiento lineal.

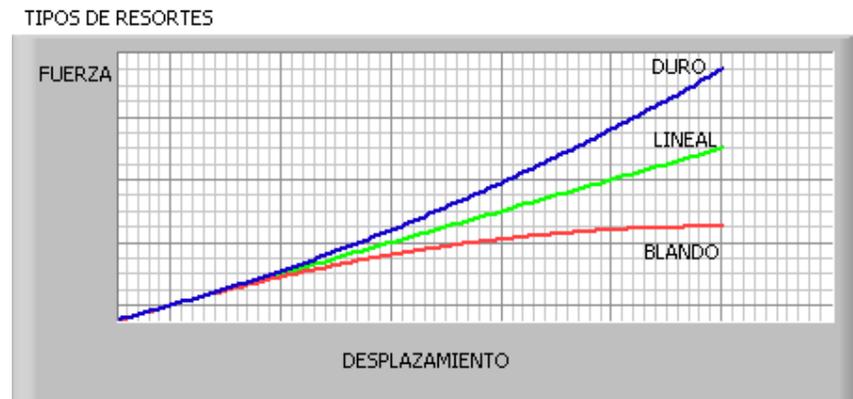


FIG. 2.24. Comportamiento lineal y no-lineal (resorte duro y resorte blando) de un elemento elástico

Causas comunes donde las máquinas pasan a tener un comportamiento no lineal son, como se indica en figura 2.25, las siguientes:

- Vibraciones de muy grande amplitudes, como las que se generan cuando se excitan zonas resonantes muy poco amortiguadas
- Máquina con soldaduras o grietas en las uniones entre los diferentes elementos de ellas

(recordar que se habla de esto cuando las superficies en contacto se separan)

➤ Rozamientos parciales entre partes del rotor con partes del estator.

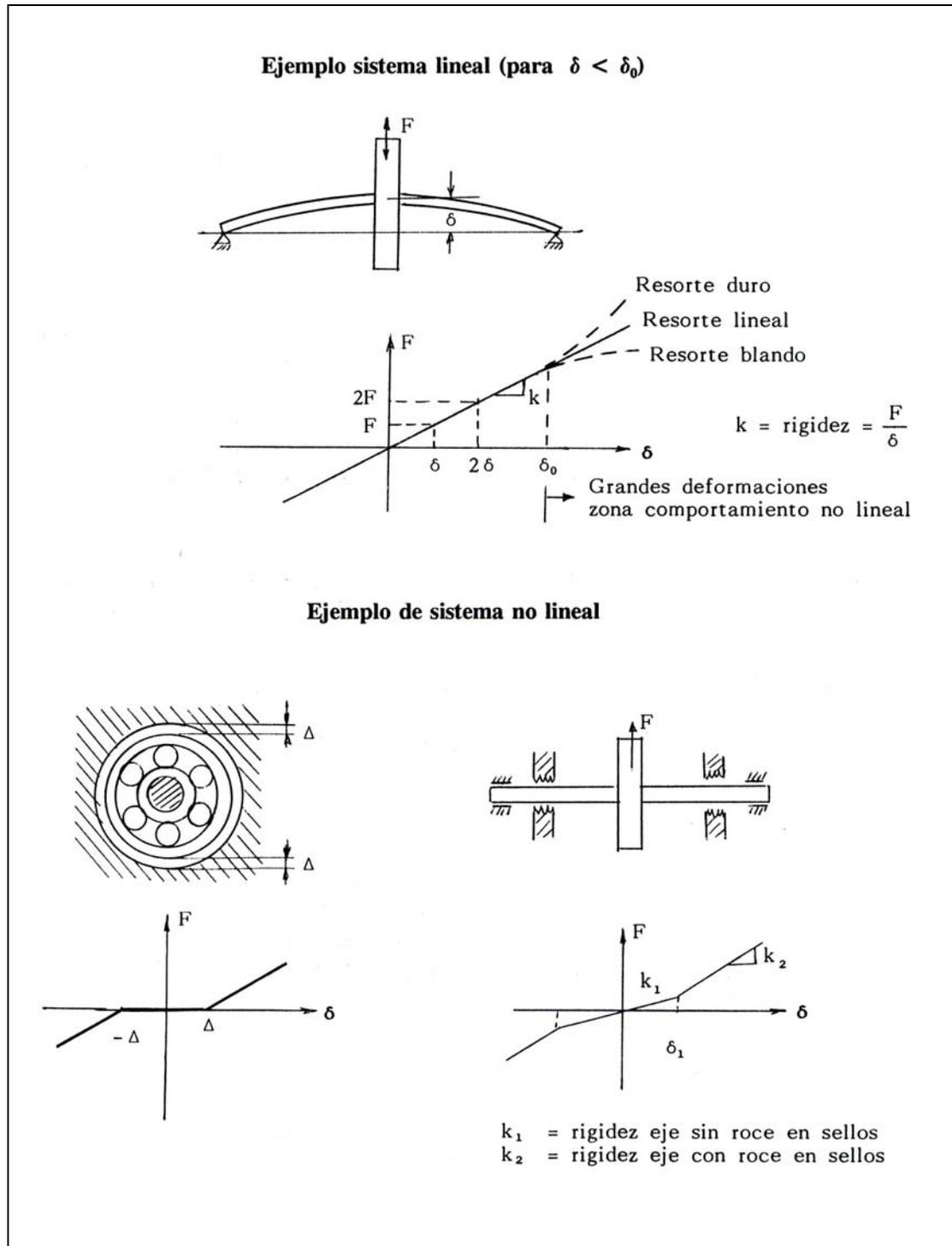


FIG. 2.25. Causas de comportamiento no-lineal de máquinas

Las principales diferencias en el comportamiento vibratorio de una máquina con comportamiento lineal y no-lineal son las siguientes:

➤ La vibración generada por la acción de una fuerza sinusoidal es:

i) Si la máquina tiene comportamiento lineal:

- ⇒ forma de onda armónica y a la misma frecuencia que la de la fuerza aplicada.
- ⇒ espectro vibratorio con una sola componente a la frecuencia de la fuerza

ii) Si la máquina tiene comportamiento no-lineal:

- ⇒ forma de onda deformada diferente a la forma armónica
- ⇒ espectro vibratorio con varias componentes cuyas frecuencias son:
 - Múltiplos enteros de la frecuencia de la fuerza aplicada, ó
 - Múltiplos de una fracción de la fuerza aplicada.(en teoría cualquier fracción $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, ...; en la práctica sin embargo son más frecuentes los múltiplos de $1/2$ para el caso de las solturas y los múltiplos de $1/3$ para el caso de rozamientos parciales)

Figura 2-26 a) muestra la diferencia en la respuesta vibratoria de una máquina al desbalanceamiento del rotor para el caso de máquina con comportamiento lineal(sin solturas) y para el caso de comportamiento no-lineal(con solturas).

Figura 2-26 b) muestra la respuesta vibratoria de una máquina al desbalanceamiento del rotor para el caso de máquina con comportamiento no-lineal debido a un rozamiento parcial del rotor con el estator.

➤ Los equipos de medición de vibraciones miden simultáneamente la amplitud de la vibración debido al desbalanceamiento residual ($f=RPM$) y la velocidad de rotación en la partida y/o parada de la máquina. Los resultados se muestran en un gráfico amplitud de la vibración versus RPM, llamado gráfico de partidas/paradas

Figura 2-27 muestra la diferencia en el comportamiento vibratorio de una máquina en un ensayo de partidas y paradas para:

- caso 1: comportamiento lineal
- caso 2: comportamiento no lineal.

Se observa que cuando la máquina tiene comportamiento lineal para cada velocidad de rotación existe una amplitud de vibración bien determinada. Sin embargo, cuando la máquina tiene comportamiento no-lineal existe una zona marcada por las líneas verticales a trazos para la cual la máquina puede vibrar para una misma velocidad de rotación con diferentes amplitudes.

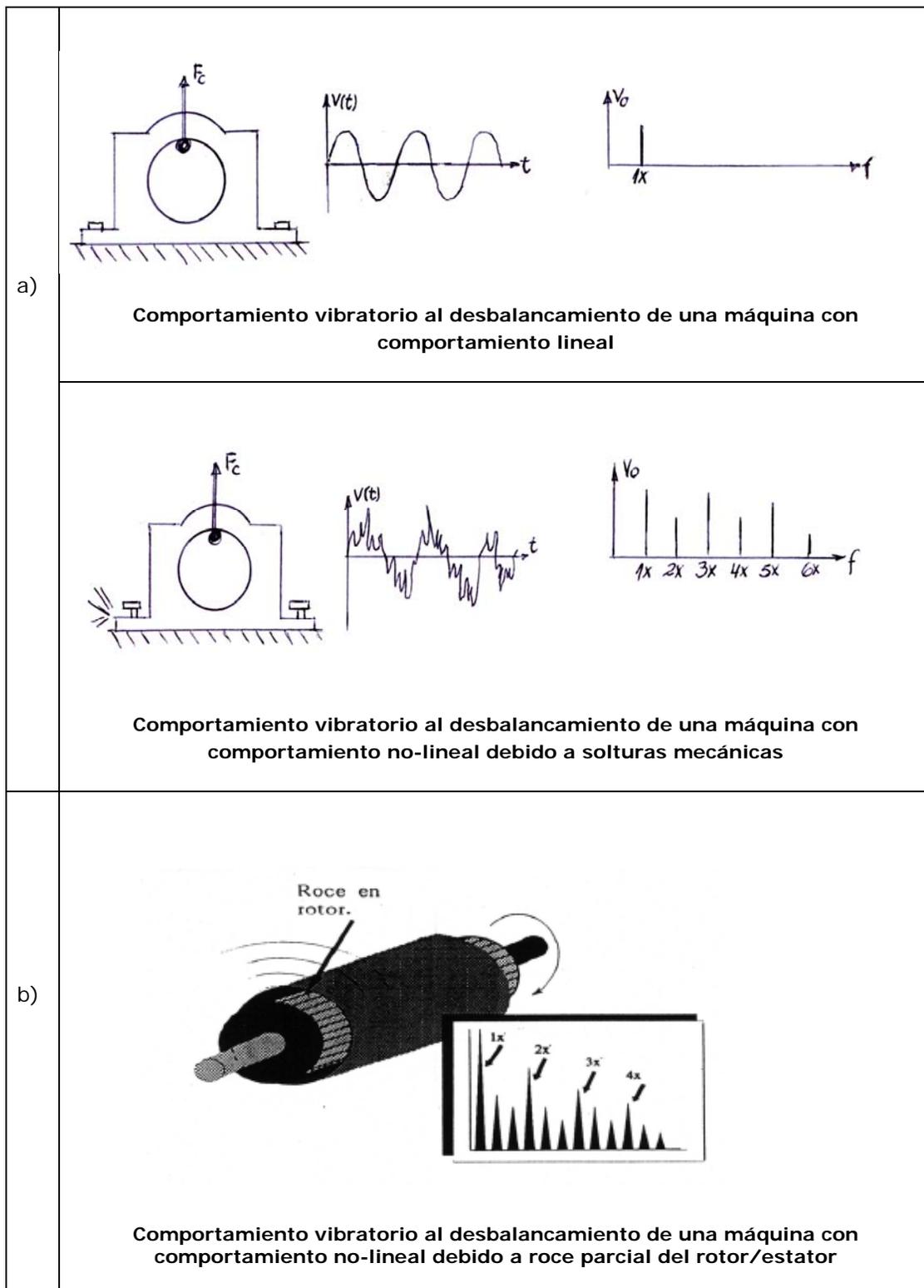


FIG. 2.26. Causas de comportamiento no-lineal de máquinas

Esto genera el llamado "fenómeno de salto", es decir la máquina cuando pasa por esa zona está vibrando con una cierta amplitud y debido a cualquier pequeña perturbación salta bruscamente a la otra amplitud a la cual puede vibrar a dicha velocidad de rotación

➤ Respecto a las frecuencias naturales.

- Cuando la máquina tiene comportamiento lineal, las frecuencias naturales de ellas son independientes de la amplitud vibratoria con que ellas vibren libremente. Estas frecuencias naturales solo dependen de la rigidez y de la masa del sistema vibrando, es decir, son unas constantes.
- Cuando la máquina tiene comportamiento no-lineal, las frecuencias naturales de ellas son dependientes de la amplitud vibratoria con que ellas vibren libremente, por lo tanto no son unas constantes características de las propiedades de rigidez y masa del sistema. La línea punteada de la figura muestra como aumenta (en el caso de un resorte duro) la frecuencia natural con la amplitud de las vibraciones.

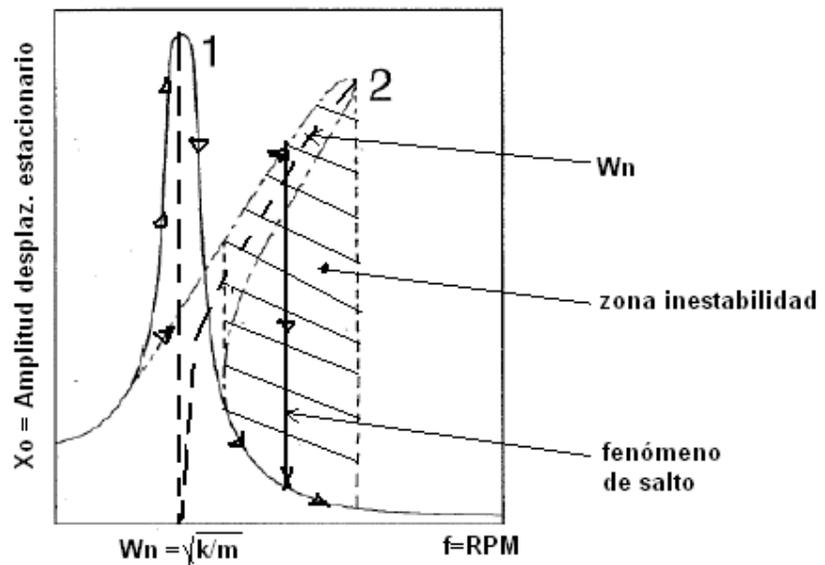


FIG. 2.27. Variación de la componente a 1XRPM con la velocidad de rotación.
 caso1: comportamiento lineal de la máquina
 caso1: comportamiento no-lineal de la máquina con resorte duro