MA5702 Control y optimización de sistemas. Semestre 2011-02
Profesor: Omar Larré
Auxiliares: Félix Carrasco

Pauta Control I

25 de noviembre de 2011

$\boxed{\textbf{P2}}$ a) SOLUCIÓN: La ecuación para el estado adjunto es $\dot{p}(t) = 0$ lo que implica que p es constante. El control optimal se escribe en función de la variable adjunta como $u(t) = p(t)$ y por lo tanto es también constante. La condición final para p es $p(T) = -cx(T)$, y entonces $u(t) = -cx(T)$, y como $\dot{x} = u$ tenemos que la trayectoria óptima es $x(t) = -cx(T)t + x_0$ con

$$x(T) = \frac{x_0}{1 + cT}.$$

b) SOLUCIÓN: La ecuación de Riccati asociada es

$$\dot{E} = 2 - 2E - \frac{E^2}{2}, \; E(T) = 0, \tag{1}$$

y probando soluciones de la forma $E(t) = \frac{2\dot{\beta}(t)}{\beta(t)}$ tenemos que

$$\dot{E} = \frac{2\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{2(\dot{\beta})^2}{b^2} = \frac{2\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{E^2}{2},$$

entonces volviendo a (1) se obtiene

$$\frac{2\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{E^2}{2} = 2 - 2E - \frac{E^2}{2}$$

y luego $\frac{\ddot{\beta}}{\beta} = 1 - \frac{2\dot{\beta}}{\beta}$, lo que equivale a

$$\ddot{\beta} = \beta - 2\dot{\beta}. \tag{2}$$

La condición $E(T) = 0$ equivale a $\dot{\beta}(T) = 0$, $\beta(T) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Resolviendo el polinomio asociado a la EDO (2)

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

tenemos que las soluciones son $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. La solución es $\beta(t) = Ae^{\lambda_1(t-T)} + Be^{\lambda_2(t-T)}$, con $A + B = \beta(T)$ y $\lambda_1 A + \lambda_2 B = 0$. Luego

$$\beta(t) = \left(\frac{\lambda_2 b(T)}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) e^{\lambda_1(t-T)} + \left(\frac{\lambda_1 b(T)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) e^{\lambda_2(t-T)}$$

y por lo tanto el control cerrado es

$$u(t) = E(t)x(t),$$

donde

$$E(t) = \frac{2\dot{\beta}(t)}{\beta(t)} = 2\frac{\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\right) e^{\lambda_1(t-T)} + \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right) e^{\lambda_2(t-T)}}{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\right) e^{\lambda_1(t-T)} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right) e^{\lambda_2(t-T)}}.$$