MA5702 Control y optimización de sistemas. Semestre 2011-02
Profesor: Omar Larré
Auxiliares: Félix Carrasco

Control I

25 de noviembre de 2011

P1 (30 %) Considere el sistema controlado lineal autónomo de orden n,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ \forall t \in I;\ x(0) = x_0.$$

con $u(t) \in [-1,1]^m$. Muestre que si se satisface la condición de Kalman y todos las valores propios de la matriz A tienen parte real menor o igual a cero, entonces todo punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ puede ser conducido al origen en tiempo finito. Pare esto:

a) Definamos el conjunto $\mathcal{C} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : 0 \in Acc(x_0, T),\ \text{para algún } T \geq 0\}$. Muestre que si $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$, entonces existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x_0 \in \mathcal{C}$, $v^T x_0 \leq \alpha$.

b) Defina $v(t) = B^T e^{-tA^T} v \in \mathbb{R}^m$. Muestre que $v(t)$ no es identicamente cero en $[0, +\infty)$. Considere el control $u_v(t) := -v(t)/||v(t)||$ si $v(t) \neq 0$ y $u_v(t) = 0$ si no. Muestre que $x_0(v,T) := -\int_0^T e^{-sA} B u_v(s) ds \in \mathcal{C}$ y que $v^T x_0(v,T) = \int_0^T ||v(s)|| ds$.

c) Supongamos que $\int_0^\infty ||v(s)|| ds < +\infty$. Defina $\phi(t) := \int_t^\infty v(s) ds$ y el operador diferencial $D := \frac{d}{dt}$, de modo que $-D\phi(t) = v(t)$. Sea p el polinomio característico de A. Muestre que $q(D)\phi(t)$=0, donde q es el polinomio $q(\lambda) := \lambda p(-\lambda)$, y que entonces $\phi(t)$ es combinación lineal de $(n+1)$ términos de a forma $q_i(t)e^{\lambda_i t}$ para ciertos polinomios $q_1, ..., q_{n+1}$ y $\lambda_1, ...\lambda_{n+1}$ raices del polinomio q, tales que $Re(\lambda_i) \geq 0$, para $i = 1, ..., n+1$. Muestre que lo anterior contradice que $\int_0^\infty ||v(s)|| ds < +\infty$. Concluya.

P2 (30 %)

a) Considere el sistema controlado $\dot{x}(t) = u(t)$ con x y u escalares, y tal que $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$. Para $T > 0$ fijo, considerere el costo

$$C(u) = cx(T)^2 + \int_0^T u(t)^2 dt,$$

con $c > 0$ constante. Encuentre el control que minimiza $C(\cdot)$ y la trayectoria óptima asociada.

b) Considere el sistema controlado $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$ con x y u escalares, tal que $x(0) = x_0$. Para $T > 0$ fijo, considere el costo

$$C(u) = \int_0^T 2x(t)^2 + 2u(t)^2 dt.$$

Encuentre el control que minimiza $C(\cdot)$ en forma de ciclo cerrado.

Indicación: Intente una solución de la ecuación de Riccati de la forma $E(t) = \frac{2\dot{\beta}(t)}{\beta(t)}$ y pruebe que satisface $\ddot{\beta} = \beta - 2\dot{\beta}$, $\dot{\beta}(T) = 0$, $\beta(T) \neq 0$.

P3 (40 %) Un motor de corriente continua funciona gracias a la corriente eléctrica que lo hace rotar. Esta corriente es generada por una fuente de voltaje, permitiendo así controlar la rotación del motor a través del voltaje v. En una versión simplificada, podemos suponer que la intensidad de la corriente, denotada por i, produce un torque en el motor mediante la relación $T = K_1 i$, donde K_1 es un factor constante. Además, existe un roce dinámico en el motor que amortigua el torque producido de manera proporcional

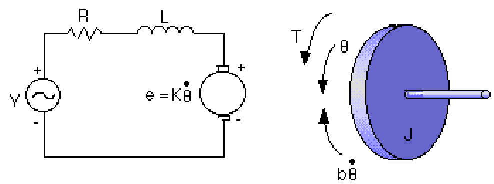

Figura 1: Motor DC

(con constante de proporcionalidad b) a la velocidad angular $\dot{\theta}$, donde θ es el ángulo de rotación del motor. La segunda ley de Newton nos dice entonces que $J\ddot{\theta} = K_1 i - b\dot{\theta}$, donde J es el momento de inercia del motor.

Por otro lado, la ley de inducción de Lorentz establece que la rotación del motor produce a su vez una fuerza electromotriz dada por $\epsilon = K_2\dot{\theta}$, donde K_2 es una constante. Además, en un circuito como el de la Figura 1, la ley de Kirchhoff establece que la suma de voltajes producidos en la inductancia, $V_L(t) = L\frac{di}{dt}$ (relación de inductancia), y en la resistencia, $V_R = iR$ (ley de Ohm), debe ser igual a $v - \epsilon$. Aquí, R y L son considerados constantes.

(a) (1.5 pts.) Encuentre el sistema diferencial lineal controlado que satisfacen la variable de estado $x := (\theta, \dot{\theta}, i)^T$ y el control v. Compruebe la controlabilidad del sistema. Muestre que el sistema sigue siendo controlable cuando se impone $|v| \leq 1$.

(b) (1 pto.) Para un observador de la forma $y = Cx$, con $C^T \in \mathbb{R}^3$, muestre que para asegurar la observabilidad del sistema descrito en la parte (a) es necesario observar siempre, al menos parcialmente, el ángulo θ.

(c) (1.5 pts.) Considere que inicialmente la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la intensidad de la corriente i son iguales a dos valores de referencia $\dot{\theta}_R$ y i_F. Nos interesa llevar en tiempo mínimo estas variables a cero, es decir, detener el motor y la corriente. Simplifique el problema asumiendo que no hay resistencia en el circuito (i.e. $R = 0$) y que sus parámetros satisfacen $\frac{b^2}{J} \geq \frac{4K_1K_2}{L}$. Establezca (sin resolver) la dinámica adjunta y muestre que el voltaje óptimo toma sólo valores -1 y 1, cambiando de signo a lo más una vez.
Indicación: Note que el sistema a resolver se puede reducir a un sistema de 2×2.

(d) (2 pts.) Considere que inicialmente las variables $(\theta, \dot{\theta}, i)^T$ tienen los valores $(0, 1, 1)^T$. Se desea minimizar la cantidad de voltaje y velocidad angular del circuito durante un horizonte de tiempo $[0, T]$, con $T = 1$, así como la velocidad angular y la intensidad de corriente en el instante final T. Plantee esto como un problema lineal cuadrático (considere un costo cuadrático con iguales ponderadores de costo para cada variable) y resuelvalo suponiendo que $K_1 = 0$.

Tiempo: 3 horas
Entregar preguntas en hojas separadas