RSMNTRIAMEDIDA

CHALLENGE ACCEPTED

1. Medida

def $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice **semiálgebra** si

(I) $X, \emptyset \in \mathcal{S}$
(II) Si $A, B \in \mathcal{S}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{S}$
(III) Para cualquier $A, B \in \mathcal{S}$, existen $(C_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{S}$ disjuntos tales que $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n C_i$

def $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice **álgebra** si

(I) $X \in \mathcal{A}$
(II) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

En particular, $\mathcal{A}$ es una semiálgebra.

def $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice **clase monótona** si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $A_n \nearrow A$ o $A_n \searrow A$, entonces $A \in \mathcal{M}$. Toda σ-álgebra es clase monótona. Se define también, como siempre, la **clase monótona engendrada** por $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y se denota $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Se tiene que $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.

teo **(de la Clase Monótona)** *Sea $\mathcal{A}$ álgebra y $\mathcal{M}$ clase monótona tales que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. Entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.*

prop **(Monotonía y σ-subaditividad)** *Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una semiálgebra y $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Entonces*

(I) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son disjuntos y $A \in \mathcal{S}$ es tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A$, entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu(A)$$

*En particular, la medida es **monótona creciente** respecto a la inclusión. Además, $B \subseteq A, A \setminus B \in \mathcal{S}, \mu(B) < +\infty \to \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$*

*(II) Si $A \in \mathcal{S}$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ son tales que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, entonces $\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Esto se llama **$\sigma$-subaditividad**.*

obs *Sea $X = \mathbb{R}$ y la familia $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{(a, b] : a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}$. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ resulta ser semiálgebra y $\sigma(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

def Una función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se dice **medida exterior** si

(I) $\mu^* = 0$
(II) $A \subseteq B \to \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
(III) μ^* es σ-subaditiva. O sea,

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

def Sea $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medida exterior. Un conjunto $A \in \mathcal{P}(X)$ se dirá **μ^*-medible** si

$$\forall E \in \mathcal{P}(X) \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

Notemos que la desigualdad $\leq$ es obvia por σ-subaditividad. Luego, para las demostraciones basta probar el otro lado solamente.

teo *Sea $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medida exterior. La familia $\eta = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$ es una σ-álgebra y la restricción de μ^* a η es una medida.*

teo **(Carathéodory)** *Sea $\mathcal{S}$ semiálgebra y $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida. Definimos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ por $\mu^*(A) = \inf_{(A_n)\in\mathcal{R}(A)} \sum_n \mu(A_n)$. Entonces μ^* es medida exterior, extensión de μ y la σ-álgebra de conjuntos μ^*-medibles, η, contiene a $\sigma(\mathcal{S})$.*

teo **(Hahn)** *Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una semiálgebra y una medida $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ σ-finita. Entonces existe una única medida que extiende μ a $\sigma(\mathcal{S})$.*

lem *Sea $\mathcal{S}$ una semiálgebra y $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida. Consideremos μ^* la medida exterior asociada a μ. Entonces $\forall A \in \mathcal{P}(X), \exists B \in \sigma(\mathcal{S})$ tal que $A \subseteq B$ y $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.*

prop **(Pepepe)** *En el caso del lema anterior,*

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \mu^*(A) = \inf_{\substack{B\in\sigma(\mathcal{S}) \\ A\subseteq B}} \mu^*(B)$$

teo *Sea $\mathcal{S}$ una semiálgebra y $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida σ-finita. Sea μ la única extensión a $\sigma(\mathcal{S})$. Sea μ^* la medida exterior asociada a μ y η el conjunto de los μ^*-medibles. Entonces $(X, \eta, \mu^*|_\eta)$ es la completación de $(X, \sigma(\mathcal{S}), \mu)$. O sea, la extensión de Carathéodory nos entrega exactamente el espacio completado de la única extensión de μ a $\sigma(\mathcal{S})$.*

def Sea $(X, \mathcal{T}, \mu)$ espacio de medida, (X, Θ) espacio topológico Hausdorff-separado. Denotemos por $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X, \Theta)$ a la tribu boreliana de X y supongamos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Diremos que μ es **regular** si

(I) Para todo K compacto, $\mu(K) < +\infty$
(II) Para todo $A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) = \inf_{\substack{\theta\in\Theta \\ A\subseteq\theta}} \mu(\theta)$
(III) Para cualquier $\theta \in \Theta$, $\mu(\theta) = \sup_{\substack{K\in\mathcal{K} \\ K\subseteq\theta}} \mu(K)$

$\mathcal{K}$ será el conjunto de compactos de (X, Θ). Al ser Hausdorff, todo compacto es cerrado, luego, medible.

prop *Sea $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espacio de medida regular. Entonces para todo $A \in \mathcal{T}$ con medida finita, $\mu(A) = \sup_{\substack{K\in\mathcal{K} \\ K\subseteq A}} \mu(K)$*

prop *Sea $(X, \mathcal{T}, \mu)$ espacio de medida, (X, Θ) espacio topológico Hausdorff-separado; tales que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, X es unión numerable de compactos y si $K \in \mathcal{K}$, entonces tiene medida finita. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(I) μ es regular.
(II) Para todo $A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) = \inf_{\substack{\theta\in\Theta \\ A\subseteq\theta}} \mu(\theta)$
(III) Para todo $A \in \mathcal{T}, \epsilon > 0$, existe $\theta \in \Theta$ tal que $A \subseteq \theta$ y $\mu(\theta \setminus A) \leq \epsilon$
(IV) Para todo $A \in \mathcal{T}, \epsilon > 0$, existe $F \subseteq A$ cerrado tal que $\mu(A \setminus F) \leq \epsilon$

En cualquiera de estos casos se tiene que $\mu(A) = \sup_{\substack{K\in\mathcal{K} \\ K\subseteq A}} \mu(K)$ y considerando el espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu|_{\mathcal{B}})$, se tiene que $\mathcal{T} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$.

teo *Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_F, \mu_F)$ un espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes. Entonces μ_F es regular. Más aún, si consideramos la medida exterior μ_F^* de Carathéodory asociada a μ_F en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mu_F^*(A) = \inf_{\substack{A\subseteq\theta \\ \theta\in\Theta}} \mu_F(\theta)$.*

teo *Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ un espacio de medida finita. Entonces μ es regular.*

teo **(Hahn-Jordan)** *Sea $\mathcal{T}$ una σ-álgebra y $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una medida con signo. Entonces μ_+, μ_- y $|\mu|$ son medidas que van de $\mathcal{T}$ a $\overline{\mathbb{R}}_+$. μ_- es acotada. Se tiene que $\mu = \mu_+ - \mu_-$ y $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$.*
Si $\mu_1 : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\mu_2 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+$ son medidas tales que $\mu = \mu_1 - \mu_2$, entonces $\mu_+ \leq \mu_1$, y $\mu_- \leq \mu_2$. Además, $|\mu|$

es la medida más pequeña que satisface que para todo $A \in \mathcal{T}$, $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$.
Por último, existe una partición medible de X, que llamaremos $\{P, N\}$, que satisface que $\forall A \in \mathcal{T}, A \subseteq P \Rightarrow \mu(A) \geq 0$ y $\forall A \in \mathcal{T}, A \subseteq N \Rightarrow \mu(A) \leq 0$.

2. Integración

def Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{I})$ dos espacios medibles. Una función $f : X \to Y$ se dirá $\mathcal{T}$-$\mathcal{I}$ **medible** (o simplemente **medible**) si para todo $B \in \mathcal{I}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.
Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio medible, denotaremos por $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, \mathcal{T}, \overline{R})$ al conjunto de las funciones $f : X \to \overline{R}$ que son $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ medibles. Análogamente, $\mathcal{M}_+$ son las funciones medibles que toman valores positivos. Si f es $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ medible, entonces también es $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ medible

prop *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio medible y consideremos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\overline{RR})$ una colección tal que $\sigma(\mathcal{C}) = \beta(\overline{\mathbb{R}})$. Entonces $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y solo si para todo $A \in \mathcal{C}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$*

prop *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$, entonces las funciones $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ y $\liminf_n f_n$ son medibles. En particular, si $f_n \to f$ puntualmente, f es medible.*

prop *Toda función simple es medible.*

lem *Sea $f \in \mathcal{M}_+$. Entonces existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \xi_+$ tal que para todo $x \in X$, $f_n(x) \nearrow f(x)$. Esto lo denotaremos $f_n \nearrow f$*

def Sea $f \in \mathcal{M}_+$. Tomemos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \xi_+$ tal que $f_n \nearrow f$. Se define la **integral de** f como $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$. Esta definición es consistente. Además es monótona y lineal.

lem *Sea $f \in \mathcal{M}_+$. Entonces*

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{g \in \xi_+ \\ g \leq f}} \int g d\mu$$

teo *Sea $f \in \mathcal{M}$, entonces $f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1$. En este caso, se tiene $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$. Además, la integral sigue siendo lineal y monótona para funciones en $\mathcal{L}^1$.*

cor *Sea $f \in \mathcal{L}^1$. Entonces $f = 0$ ctp ssi para todo $A \in \mathcal{T}$, $\int_A f d\mu = 0$.*

prop *Sea $f, g \in \mathcal{L}^1$. Entonces $f \leq g$ ctp ssi para todo $A \in \mathcal{T}$, $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$. Además, $f = g$ ctp ssi para todo $A \in \mathcal{T}$, $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$. Por si fuera poco, sea h función tal que $h = f$ ctp. Entonces $h \in \mathcal{L}^1$ y $\int h d\mu = \int f d\mu$.*

3. Convergencia y L^p

teo **(Convergencia Monótona)** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_+$ tal que $f_n \nearrow f$. Entonces $\int f_n d\mu \nearrow \int f d\mu$.*

cor *Sea $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_+$. Entonces*

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int g_n d\mu$$

prop *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1$ una sucesión de funciones positivas tales que $f_n \searrow f$. Entonces $f \in \mathcal{L}^1$ y $\int f_n d\mu \searrow \int f d\mu$.*

prop *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1$ tales que $f_n \nearrow f$. Entonces $f \in \mathcal{L}^1$ si y sólo si $\lim_n \int f_n d\mu < +\infty$.*

lem **(Fatou, primera forma)** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_+$. Entonces $\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu$*

cor *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_+$ tal que $f_n \to f$. Supongamos que $\liminf_n \int f_n d\mu < +\infty$. Entonces $f \in \mathcal{L}^1$ y $\int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu$.*

lem **(Fatou)** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1$ y $g \in \mathcal{L}^1$. Entonces se tiene que si $\liminf_n f_n \in \mathcal{L}^1$ y $f_n \geq g$, entonces $\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu$. Además, si $\limsup_n f_n \in \mathcal{L}^1$ y $f_n \leq g$, entonces $\int \limsup_n f_n d\mu \geq \limsup_n \int f_n d\mu$.*

teo **(Convergencia Dominada de Lebesgue)** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia en $\mathcal{L}^1$ tal que $f_n \to f$, puntualmente. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}^1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ domina la secuencia, es decir, $|f_n| \leq g$. Entonces $f \in \mathcal{L}^1$ y $\int |f_n - f| d\mu \to 0$. En particular se tiene que $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.*

def Sea $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espacio de medida. Consideremos una sucesión de funciones $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Se dirá que f_n **converge ctp** a la función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si el conjunto $\{x : \limsup_n f_n(x) > \liminf_n f_n(x)\} \cup \{x : \lim_n f_n(x) \neq f(x)\}$ es despreciable. Si $\mathcal{T}$ es completa, se tiene que $f_n \to f$ ctp si y sólo si $\mu(\{x : \lim_n f_n(x) = f(x)\}^c) = 0$

teo **(Convergencia Dominada de Lebesgue, versión CTP)** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia en $\mathcal{L}^1$ tal que $f_n \to f$ ctp. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}^1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $|f_n| \leq g$ ctp. Entonces $f \in \mathcal{L}^1$ y $\int |f_n - f| d\mu \to 0$. Además se tiene que $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.*

teo **(Pseudo-recíproca de TCD)** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1$ y $f \in \mathcal{L}^1$ tales que $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Entonces existe $g \in \mathcal{L}^1$ y una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $|f_{n_k}| \leq g$ ctp y $f_{n_k} \to f$ ctp.*

prop **(Desigualdad de Hölder)** *Sean p y $q \in [1, +\infty]$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sean ahora $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces $fg \in L^1$ y $\left|\int fg d\mu\right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$*

prop *Sean p, q, $r \in [1, +\infty]$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Sean $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces $fg \in L^r$ y $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$*

prop **(Teorema de Convergencia Dominada, versión L^p)** *Sea $1 \leq p < +\infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ tal que $f_n \to f$ ctp. Supongamos que existe $g \in L^p$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \geq g$ ctp. Entonces $f \in L^p$ y $\|f_n - f\|_p \to 0$. Ojo que para $p = +\infty$ no hay, en general, un resultado de convergencia dominada.*

lem *Sea X un espacio topológico localmente compacto. Sea K un compacto y F un cerrado tales que $K \cap F = \emptyset$, entonces existe una función $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f|_K = 1$ y $f|_F = 0$.*

def Sea f función a valores reales. Su **soporte** es el conjunto $\operatorname{sop} f = \operatorname{adh}\{x : f(x) \neq 0\}$

lem *Sea $1 \leq p < +\infty$, entonces $(\xi \cap L^p)$ es denso en L^p.*

teo *Sea X espacio topológico localmente compacto y β la tribu boreliana de X. Sea μ una medida regular sobre β. Denotemos $C_0(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es continua y $\operatorname{sop} f$ es compacto$\}$ Entonces para $1 \leq p < +\infty$ se tiene que $C_0(X, \mathbb{R})$ es denso en L^p. Esto no es cierto, en general, para $p = +\infty$.*

4. Diferenciabilidad

prop *Sea $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espacio de medida y $g \in \mathcal{M}_+$. Consideremos la medida $\nu(A) = \int_A g d\mu$. Entonces $f \in L^1(X, \mathcal{T}, \nu)$ si y solo si $fg \in L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. En este caso, además se cumple $\int f d\nu = \int f g d\mu$.*

def Sean μ_1, μ_2 dos medidas (con o sin signo) sobre $\mathcal{F}$. Se dirá que μ_2 es **absolutamente continua** con respecto a μ_1 ($\mu_2 \ll \mu_1$) si para $A \in \mathcal{F}$ se tiene $\mu_1(A) = 0 \Rightarrow \mu_2(A) = 0$.

teo **(Radon-Nikodým general)** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio medible y μ medida positiva σ-finita y ν medida con signo σ-finita sobre $\mathcal{T}$ tales que $\nu \ll \mu$. Entonces existe una función $g : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{T}$-medible tal que $g_- \in L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ que satisface $\nu(A) = \int_A g_+ d\mu - \int_A g_- d\mu$ y g es única μ-ctp. Si ν es positiva, se puede escoger una densidad g positiva. Además, en este último caso $g \in L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ si y sólo si ν es finita.*

teo *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio medible. Sea ν medida con signo finita y μ medida σ-finita. Entonces ν es absolutamente continua con respecto a μ si y sólo si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } \mu(A) < \delta \Rightarrow |\nu(A)| \leq \varepsilon$$

teo **(Descomposición de Lebesgue)** *Sea μ una medida σ-finita y sea ν medida con signo σ-finita. Entonces existe una descomposición $\nu = \nu_a + \nu_s$ donde ν_a y ν_s son medidas con signo tales que $\nu_a \ll \mu$ y $\nu_s \amalg \mu$. Esta descomposición es única y si ν es positiva, entonces ν_a y ν_s también lo son.*

teo **(Lebesgue)** *Toda función monótona es derivable ctp.*

cor *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible e integrable en $[a, b]$. Entonces $\varphi(x) = \int_a^x f(u)du$ es continua y derivable ctp. No sabemos si $\varphi' = f$.*

prop *Son de variación acotada las funciones monótonas sobre $[a, b]$, las lipschitzianas sobre $[a, b]$. La continuidad no asegura variación acotada. Toda función de variación acotada es derivable ctp.*

teo **(Derivada de la integral)** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $\frac{d}{dx} \int_a^x f(u)du = f(x)$ ctp.*

def $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dirá **absolutamente continua** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier familia numerable de intervalos disjuntos (a_k, b_k) se cumple que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

Si f es absolutamente continua, es continua y tiene variación acotada, luego es derivable ctp.

lem *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua y monótona, tal que $f' = 0$ ctp. Entonces f es constante.*

teo *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua. Entonces f' es integrable y $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(u)du$*

cor *Toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona y continua por la derecha se puede escribir como $f = f_1 + f_2 + f_3$, funciones monótonas tales que f_1 es absolutamente continua, f_2 es continua y $f_2' = 0$ ctp, y f_3 es función de saltos. Esta descomposición es única si $f_2(a) = f_3(a) = 0$.*

5. Dualidad

teo *Sea $(X, \mathcal{T}, \mu)$ espacio de medida. Consideremos $p \in [1, +\infty)$ y su conjugado q. Definamos $\varphi : L^q \to (L^p)^*$ de manera que si $g \in L^q$ y $f \in L^p$, entonces $\varphi(g)f = \int_X fg d\mu$. Con esta definición se satisface que si $1 < p < +\infty$, entonces φ es una isometría lineal biyectiva. Si $p = 1$ y μ es σ-finita, entonces lo mismo. Esto dice que podemos identificar al dual de L^p con L^q.*

cor *Si $1 < p < +\infty$, entonces L^p es reflexivo.*

obs *En general, el dual de L^1 no es L^∞.*

6. Medida producto

obs *Dados dos espacios de medida $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$, en general $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ no es σ-álgebra. Se define $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \sigma(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$.*

def Sea $A \subseteq \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$. Para $a_1 \in X_1$ y $a_2 \in X_2$, se definen las **fibras** de A como

- $A^1(a_1) = \{x_2 \in X_2 : (a_1, x_2) \in A\} \subseteq X_2$
- $A^2(a_2) = \{x_1 \in X_1 : (x_1, a_2) \in A\} \subseteq X_1$

Las fibras se comportan bien bajo complemento y unión arbitraria. Si $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, entonces todas las fibras $A^1(a_1) \in \mathcal{T}_2$ y viceversa. Si los espacios originales eran de medida σ-finita, entonces la función $\varphi_A(x_1) = \mu_2(A^1(x_1))$ es $\mathcal{T}_1$-medible y viceversa.

teo *Sean dos espacios de medida σ-finita. Entonces existe una única medida, $\mu_1 \otimes \mu_2$, sobre $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ talque para todo $A \in \mathcal{T}_1$ y para todo $B \in \mathcal{T}_2$, $\mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$. Además, $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ es σ-finita y para todo $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ se tiene que*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_{X_1} \mu_2(A^1(x_1))d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(A^2(x_2))d\mu_2(x_2)$$

obs *Aunque $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ sean completas, $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ en general no lo es. Se denotará por $\mathcal{T}_1 \overline{\otimes} \mathcal{T}_2$ y $\mu_1 \overline{\otimes} \mu_2$ a las completaciones respectivas en el espacio producto.*

teo *Sea $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ que es $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ medible. Entonces $f(\cdot, x_2) : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{T}_1$-medible para todo $x_2 \in X_2$ y viceversa. Además, si f es $\mathcal{T}_1 \overline{\otimes} \mathcal{T}_2$-medible, entonces $f(\cdot, x_2)$ es $\overline{\mathcal{T}_1}$-medible μ_2-ctp y viceversa.*

teo **(Fubini-Tonelli)** *Sea $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ que es $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$-medible. Entonces se cumple que $x_1 \to \int f(x_1, x_2)d\mu_2(x_2)$ es una función $\mathcal{T}_1$-medible y viceversa. Además, se tienen las integrales iteradas:*

$$\begin{aligned}\int f d\mu_1 \otimes \mu_2 &= \int_{X_1} \int_{X_2} f(x_1, x_2)d\mu_2(x_2)d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_2} \int_{X_1} f(x_1, x_2)d\mu_1(x_1)d\mu_2(x_2)\end{aligned}$$

Por otro lado, si la función fuera $\mathcal{T}_1 \overline{\otimes} \mathcal{T}_2$-medible, entonces la función $x_1 \mapsto \int f(x_1, x_2)d\mu_2(x_2)$ está definida μ_1-ctp y es $\mathcal{T}_1$ medible. Se tiene la misma propiedad para la otra coordenada y también se tienen las integrales iteradas. Una función $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ que sea $\mathcal{T}_1 \overline{\otimes} \mathcal{T}_2$-medible es integrable si y sólo si alguna de las integrales iteradas, $\int_{X_1} \int_{X_2} |f(x_1, x_2)|d\mu_2(x_2)d\mu_1(x_1)$ o $\int_{X_2} \int_{X_1} |f(x_1, x_2)|d\mu_1(x_1)d\mu_2(x_2)$, es finita. También se tendrán las integrales iteradas.

def Se define inductivamente: $\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^{n+1} = \mathcal{B}^n \otimes \mathcal{B}$ y $\mu^1 = \mu$, $\mu^{n+1} = \mu^n \otimes \mu$. Entonces $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mu^n)$ es un espacio de medida. Se define $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{B}^n}$. Entonces el espacio $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \mu^n)$ es la **medida de Lebesgue en** $\mathbb{R}^n$.

lem *Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son colecciones tales que $\sigma(\mathcal{C}_i) = \mathcal{T}_i$, entonces $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$.*

teo *$(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \mu^n)$ es regular.*

teo *Sea $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$. Consideremos la función afín $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $H(x) = \alpha x + v$. Entonces los borelianos y la completación son invariantes bajo H, es decir, $H(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $H(\mathcal{L}^n) = \mathcal{L}^n$. Además, para todo $A \in \mathcal{L}^n$, se tiene que $\mu^n(H(A)) = |\alpha|^n\mu^n(A)$. Si $\alpha = 1$, se deduce que μ^n es invariante bajo traslaciones. Una función*

$f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ es medible si y sólo si $f\circ H$ es medible. Será integrable si y sólo si $f\circ H$ es integrable y en este caso se tiene que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |\alpha|^n\int_{\mathbb{R}^n} f(\alpha x+v)dx$. A esto se le llama cambio de variables afín.

teo *Sean $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para casi todo $x\in\mathbb{R}^n$, la aplicación $y\mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable. Se define $x\mapsto (f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)dy$. Entonces $(f*g)$ es integrable y se tiene que $\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$. La operación $*$ es asociativa, conmutativa ctp y distribuye con respecto a la suma. El operador $*: L^1\times L^1\to L^1$ es bilineal continuo.*

teo *Sea $1\le p<+\infty$ y $h\in\mathbb{R}^n$. Consideremos $T_h : L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ dado por $T_h(f)=f(\cdot+h)$. Entonces T_h es una isometría y satisface que para todo $f\in L^p$, $\lim_{h\to 0}\|T_h(f)-f\|_p=0$.*

def Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto y definamos la clase de funciones

$$C_0^\infty=\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n : f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\text{ y }\operatorname{sop} f\subset\subset\Omega\}$$

Las funciones $f\in C_0^\infty$ se pueden entender definidas sobre $\mathbb{R}^n$ o sólo sobre Ω. Se define $\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ por

$$\rho(x)=\begin{cases} c\exp\left[\frac{1}{\|x\|^2-1}\right] & \|x\|<1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

donde c es una constante que depende de n y hace que $\int\rho(x)dx=1$. ρ es positiva y se prueba que $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además, $\operatorname{sop}\rho=\overline{B}(0,1)$. Se define entonces, para $\varepsilon>0$, la función $\rho_\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por $\rho_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ que satisface $\operatorname{sop}\rho_\varepsilon=\overline{B}(0,\varepsilon)$ y además $\int\rho_\varepsilon(x)dx=1$. La familia $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}\subseteq C_0^\infty$ se llama **nucleo regularizador**.

teo *Sea $f\in L^p$ y f_ε su regularización. Entonces $f_\varepsilon\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\lim_{\varepsilon\to 0}\|f_\varepsilon-f\|=0$. En particular, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

teo *Sea $1\le p<\infty$ y $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto. Entonces $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$*

teo *Sea $1\le p<\infty$ y $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto. Entonces $L^p(\Omega)$ es separable. L^∞ no es separable en general.*

teo *Sea $1\le p<+\infty$ y $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto. Un conjunto $A\subseteq L^p(\Omega)$ es relativamente compacto si y sólo si*

(I) A es acotado. Es decir, existe $C<\infty$ tal que para todo $f\in A$, $\|f\|\le C$

(II) A es equicontínuo en media de orden p. Es decir, para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que para cada $f\in A$, si $\|h\|\le\delta$, entonces $\|T_h((f)-(f)\|_p\le\varepsilon$.

(III) Para todo $\varepsilon>0$ existe $B\subseteq\Omega$ boreliano acotado tal que para todo $f\in A$,

$$\left(\int_{\Omega\setminus B}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\varepsilon$$

Notar que la condición 3 se cumple altiro si Ω es acotado.

teo **(Cambio de variables)** *Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto y $\varphi:\Omega\to\varphi(\Omega)$ una función biyectiva de clase $\mathcal{C}^1$ tal que para todo $x\in\Omega$, $|\varphi'(x)|>0$. Entonces, para toda función $f\in L^1(\varphi(\Omega))$ se cumple*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(x)dx=\int_\Omega (f\circ\varphi)(x)|\varphi'(x)|dx$$

lem *Si para todo $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), A\subseteq\Omega$ se cumple que $\mu^n(\phi(A))=\int_A|\varphi'(x)|dx$, entonces se tiene el teorema de cambio de variables. Más aún, la igualdad se cumple si y sólo si se cumple para todo abierto contenido en Ω.*

lem *Todo abierto contenido en Ω es unión disjunta y numerable de conjuntos de la forma $R=\prod_{i=1}^n(a_i,b_i]$ con $a_i,b_i\in\mathbb{R}$.*

7. Medidas de Radon

Supondremos que (X,Θ) es un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. $C_0(X)$ es el conjunto de funciones $f:X\to\mathbb{R}$ continuas a soporte compacto.

lem **(Partición de la unidad)** *Sea $K\subseteq X$ un compacto y $(\theta_i)_{i=1}^n\subseteq\Theta$ un recubrimiento finito de K. Entonces existen funciones $\varphi_i:X\to[0,1]$ continuas a soporte compacto tal que $\operatorname{sop}\varphi_i\subseteq\theta_i$ tal que para todo $x\in K$, $\sum_{i=1}^n\varphi_i(x)=1$.*

def Un funcional lineal $L:C_0(X)\to\mathbb{R}$ se dirá **medida de Radon** si para todo $K\in\mathcal{K}$, la restricción de L a $\mathcal{C}_K(X)$ es continua.

prop *Si $L:C_0(X)\to\mathbb{R}$ es lineal, entonces L es medida de Radon si y sólo si para todo $K\in\mathcal{K}$ existe $\gamma_K\in\mathbb{R}_+$ tal que para todo $f\in\mathcal{C}_K(X), |L(f)|\le\gamma_K\|f\|$*

def $M(X)$, el conjunto de medidas de Radon, es un espacio vectorial. Para $L\in M(X)$ y $K\in\mathcal{K}$ se define

$$\|L\|_K=\sup_{\substack{f\in\mathcal{C}_K(X)\\ \|f\|\le 1}}|L(f)|$$

y también $\|L\|=\sup_{K\in\mathcal{K}}\|L\|_K\in\overline{\mathbb{R}}_+$

prop *$L\in(C_0(X))^*$ si y sólo si $\|L\|<\infty$. Esto implica que $(C_0(X))^*\subseteq M(X)$, si X es compacto, entonces hay igualdad. Si no lo es, en general la inclusión es estricta.*

teo *Sea $L:C_0(X)\to\mathbb{R}$ un operador lineal. Se dirá que L es positivo si $f\ge 0$ implica que $L(f)\ge 0$. Todo operador lineal positivo sobre $C_0(X)$ es una medida de Radon.*

obs *$M_+(X)$ son las medidas de Radon positivas. Es un cono. La relación $L_1\le L_2\Leftrightarrow(L_2-L_1)\in M_+(X)$ es relación de orden parcial que hace a $M(X)$ un espacio vectorial ordenado.*

teo *Sean $L,\ H\in M(X)$. Entonces existe un único funcional $T\in M(X)$ que cumple que $L\le T$, $H\le T$ y que si $G\in M(X)$ tal que $L\le G$ y $H\le G$, entonces $T\le G$. En ese caso, anotamos $T=L\vee H$. Análogamente, se tiene $L\wedge H$. Entonces $M(X)$ es un espacio de Riesz.*

cor *Toda medida de Radon es diferencia entre dos funcionales lineales positivos.*

teo **(Riesz)** *Sea $L\in M_+(X)$. Entonces existe una única medida regular μ definida sobre $\mathcal{B}(X,\Theta)$ tal que*

$$\forall f\in\mathcal{C}_0(X)\qquad L(f)=\int fd\mu$$

cor *Toda medida de Radon (y, luego, todo elemento de $C_0(X)^*$) se puede representar de la forma $L(f)=\int fd\mu_1-\int fd\mu_2$.*

cor **(Dual de $C(X)$)** *Si X es compacto, entonces el dual de $C(X)$ se puede identificar con $M(X)$.*

8. Probabilidades

A partir de ahora, los espacios medibles X serán Ω y se llamarán **espacio muestral**, las medidas μ serán $\mathbb{P}$ y se llamarán **medidas de probabilidad**, $\mathbb{P}(\Omega)=1$, las σ-álgebras seguirán siendo $\mathcal{T}$, los $A\in\mathcal{T}$ serán **eventos**. Las funciones medibles $X:\Omega\to\mathbb{R}$ serán **variables aleatorias**, y $\mathbb{E}(X)=\int Xd\mathbb{P}$ será la **esperanza**.

obs *Si X es variable aleatoria, $\sigma(X)=X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es σ-álgebra contenida en $\mathcal{T}$, y X es $\sigma(X)$-medible.*

def Sean $(A_i)_{i\in I}\subseteq\mathcal{T}$. Se dirán **independientes** si para todo $J\subseteq I$ finito, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)=\prod_{j\in J}\mathbb{P}(A_j)$. Si tenemos $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{T}$, se dirán independientes si para todo $A\in\mathcal{F}$ y para todo $B\in\mathcal{G}$, $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Si X e Y son variables aleatorias, se dirán independientes si $\sigma(X)$ y $\sigma(Y)$ lo son. Una colección de variables aleatorias $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es independiente si para todo $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\subseteq\mathcal{B}(\mathbb{R})$, se tiene que $(X_\lambda^{-1}(A_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ es independiente.

prop *Si $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{C}_1)$ y $\mathcal{G}=\sigma(\mathcal{C}_2)$ son dos σ-álgebras generadas por dos π-sistemas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, entonces $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son independientes si y sólo si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ lo son.*

prop *Si $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ son dos π-sistemas tales que $\sigma(\mathcal{I}_1)=\sigma(\mathcal{I}_2)=\mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces dos variables aleatorias X e Y son independientes si y sólo si para todo $A\in\mathcal{I}_1$ y todo $B\in\mathcal{I}_2$, $\mathbb{P}(X^{-1}(A)\cap Y^{-1}(B))=\mathbb{P}(X^{-1}(A))\mathbb{P}(Y^{-1}(B))$.*

prop *Si $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ son variables aleatorias independientes y $f_\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son funciones medibles, entonces $(f_\lambda\circ X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ son variables aleatorias independientes.*

prop *Si X e Y son variables aleatorias integrables e independientes, entonces XY es integrable y $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*

def Sea X una variable aleatoria, se define la **función de distribución** de X como $F_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donde $F_X(t)=\mathbb{P}(X\le t)$. Dos variables aleatorias son iguales **en ley** si sus funciones de distribución coinciden, se denota $X_1\sim X_2$. Si $X_1,\dots,X_n$ son variables aleatorias, entonces la medida $\mu_{X_1,\dots,X_n}(A)=\mathbb{P}((X_1,\dots,X_n)\in A)$ para $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se llamará la **distribución de** X y $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)=\mathbb{P}(X_1\le x_1,\dots,X_n\le x_n)$ es la función de distribución del vector $(X_1,\dots,X_n)$.

obs *F_X es creciente y continua por la derecha, la medida de Lebesgue-Stieltjes que define (sobre $\mathbb{R}$) se denota μ_X y es exactamente igual a $\mu_X(A)=\mathbb{P}(X\in A)$. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es medible, entonces $f\in L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mu_X)$ si y sólo si $(f\circ X)\in L^1(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ y en tal caso,*

$$\int_{\mathbb{R}}fd\mu_X=\int_\Omega(f\circ X)d\mathbb{P}=\mathbb{E}(f(X))$$

prop *Dos variables aleatorias X e Y son independientes si y sólo si $\mu_{X,Y}=\mu_X\otimes\mu_Y$.*

obs *Sean $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias independientes, con sus distribuciones respectivas $F_1,\dots,F_n$. Si consideramos $Y_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ como las variable aleatorias "coordenada", la idea es definir una medida $\mathbb{P}$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que $Y_1,\dots,Y_n$ sean independientes y que $Y_i\sim X_i$. $\mathbb{P}=\mu_{F_1}\otimes\cdots\otimes\mu_{F_n}$ hace la pega.*

def Supongamos que tenemos $(X_t)_{t\in T}$ independientes, con distribución F_t cada una. Sea $J\subseteq T$ finito, supongamos que $|J|=n$. Sea $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, se define el **cilindro** de base A en las coordenadas J como

$$R=A\times\mathbb{R}^{T-J}=\{x\in\mathbb{R}^T:(x(t):t\in J)\in A\}$$

Si definimos $\mathcal{C}_T$ como el conjunto de todos los cilindros, se tiene que es álgebra, y se le define $\mathcal{B}^T=\sigma(\mathcal{C}_T)$.

obs *Si dotamos a $\mathbb{R}^T$ de la topología producto (la que tiene por base los cilindros que tienen un producto finito de abiertos), podemos dotarla también de los borelianos $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Se tiene que $\mathcal{B}^T\subseteq\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Si T es numerable, hay igualdad. Si no, la inclusión es estricta.*

def Una colección $\mathbb{F}=\{\mu_{(t_1,\dots,t_n)}:n\in\mathbb{N},t_1,\dots,t_n\in T\}$ se dirá de **leyes finito-dimensionales** si todo $\mu_{(t_1,\dots,t_n)}\in\mathcal{F}$ es una medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, si $\mathbb{P}$ es una probabilidad en $\mathcal{B}^T$, $n\in\mathbb{N}$ y $t_1,\dots,t_n\in T$, definimos $\mathbb{P}_{(t_1,\dots,t_n)}:\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ por

$$\mathbb{P}_{(t_1,\dots,t_n)}(A)=\mathbb{P}(A\times\mathbb{R}^{T-\{t_1,\dots,t_n\}})$$

el conjunto $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ de estas medidas de probabilidad se llama la **familia de leyes finito-dimensionales** asociadas a $\mathbb{P}$.

def Sea $\mathbb{F}$ una familia de leyes finito-dimensionales. Decimos que $\mathbb{F}$ satisface las **condiciones de consistencia de Kolmogorov** si

(I) Dado $\mu_{(t_1,\dots,t_n)}\in\mathbb{F}$ y dada cualquier permutación $\pi\in\Sigma_n$ se tiene que para todo $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu_{(t_1,\dots,t_n)}(A)=\mu_{(t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)})}(\pi(A))$, donde $\pi(A)=\{y\in\mathbb{R}^n:\exists x\in A,y=\pi(x)\}$.

(II) Dados $t_1,\dots,t_n,t_{n+1},\dots,t_{n+m}\in T$ se cumple que para todo $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mu_{(t_1,\dots,t_n,t_{n+1},\dots,t_{n+m})}(A\times\mathbb{R}^m)=\mu_{(t_1,\dots,t_n)}(A)$$

obs *Si $\mathbb{P}$ es probabilidad en $\mathbb{R}^T$, entonces $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ satisface las condiciones de consistencia de Kolmogorov.*

teo **(Consistencia de Kolmorogov)** *Sea $\mathbb{F}$ una familia de leyes finito-dimensionales que satisface las condiciones de consistencia de Kolmogorov. Entonces existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}$ definida sobre $\mathcal{B}^T$ tal que $\mathbb{F}=\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$.*

def Supongamos que para todo $t\in T$ se tiene una medida de probabilidad μ_t sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, definimos la familia de leyes finito dimensionales $\mathbb{F}$ como $\mu_{(t_1,\dots,t_n)}=\mu_{t_1}\otimes\cdots\otimes\mu_{t_n}$. $\mathbb{F}$ satisface las condiciones de Kolmogorov, así que hay una medida $\mathbb{P}$ sobre $\mathcal{B}^T$ que tiene estas leyes finito-dimensionales. $\mathbb{P}$ se denota $\bigotimes_{t\in T}\mu_t$ y se llama **medida producto** en $\mathbb{R}^T$.

obs *Si X_t son variables aleatorias independientes, podemos tomar μ_t la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a la función de distribución de X_t. Así, el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^T,\mathcal{B}^T,\bigotimes_{t\in T}\mu_t)$ hace que las variables aleatorias coordenada Y_t sean independientes y cada Y_t tiene la misma distribución que X_t.*

def Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Dada una σ-álgebra $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ y una variable aleatoria integrable X, diremos que una variable aleatoria $Z:\Omega\to\mathbb{R}$ es **esperanza condicional** de X con respecto a $\mathcal{G}$ si Z es $\mathcal{G}$-medible y para todo $A\in\mathcal{G}$, $\int_AZd\mathbb{P}=\int_AXd\mathbb{P}$.

teo *Sea X una variable aleatoria integrable. Entonces existe una esperanza condicional de X con respecto a $\mathcal{G}$ y la notaremos $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, que es integrable y única ctp.*

prop *Si X es $\mathcal{G}$-medible, entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})=X$.*

prop *Si $X=Y$ ctp, entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})=\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ ctp.*

prop *Para todo $\alpha\in\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X+\alpha Y|\mathcal{G})=\mathbb{E}(X|\mathcal{G})+\alpha\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$.*

prop *Si $X\le Y$ ctp, entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\le\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ ctp.*

prop *Sean $X_n\ge 0$ tales que $X_n\nearrow X$, todo integrable. Entonces $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})\nearrow\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.*

prop *Sea X_n, Y tales que $Y\le X_n$. Supongamos $X=\liminf_n X_n$, todo integrable. Entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\le\liminf_n\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})$.*

prop *Sea X_n integrables tales que $X_n\to X$ ctp. Supongamos que existe una variable aleatoria Y integrable tal* *que $|X_n| \leq Y$. Entonces X es integrable y $\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})\|_1 \to 0$.*

prop *Si Y es $\mathcal{G}$-medible y acotada, entonces $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.*

prop *Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G})$.*

prop *Si X es tal que $\sigma(X)$ es independiente de $\mathcal{G}$, entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.*

prop *Si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.*

prop *Si $X \in L^p$ e $Y \in L^q$, Hölder conjugados y $p \in (1, +\infty)$. Entonces $|\mathbb{E}(XY|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|X|^p|\mathcal{G})^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}(|Y|^q|\mathcal{G})^{\frac{1}{q}}$.*

prop *Si $X, Y \in L^p$ y $p \in (1, +\infty)$. Entonces $\mathbb{E}(|X + Y|^p|\mathcal{G})^{\frac{1}{p}} \leq \mathbb{E}(|X|^p|\mathcal{G})^{\frac{1}{p}} + \mathbb{E}(|Y|^q|\mathcal{G})^{\frac{1}{q}}$.*

teo **(Desigualdad de Jensen)** *Sea $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa. Si X es tal que X y $\Phi(X)$ son integrables, entonces $\Phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(\Phi(X)|\mathcal{G})$*

prop *Si $X \in L^p(\mathcal{F})$, entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \in L^p(\mathcal{G})$. De hecho, $\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\|_p \leq \|X\|_p$, y tenemos que $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G}) : L^p(\mathcal{F}) \to L^p(\mathcal{G})$ es un operador lineal continuo de norma 1. Si $p = 2$, el operador es exactamente la proyección ortogonal sobre $L^p(\mathcal{G})$.*

def Si X e Y son variables aleatorias, Y integrable, la **esperanza condicional de Y dado X** se define como $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y|\sigma(X))$.

lem **(Doob)** *Sea X una variable aleatoria y $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ función. Z es $\sigma(X)$-medible si y sólo si existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $Z = f(X)$.*

cor *Si X e Y son variables aleatorias, Y integrable, entonces existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible tal que $\mathbb{E}(Y|X) = f(X)$.*

def Se dice que $X = (X_1, \ldots, X_n)$ tiene **densidad** si μ_X es absolutamente continua respecto a μ^n (de Lebesgue). En ese caso, existe $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable tal que para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in A) = \int_A g d\mu^n$$

Si $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible, $H(X_1, \ldots, X_n)$ es $\mathbb{P}$-integrable si y sólo si (Hg) es μ^n-integrable, y se tiene

$$\int_\Omega H(X_1, \ldots, X_n) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^n} H(x_1, \ldots, x_n) g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

obs *Si (X, Y) tiene densidad $f_{X,Y}$, entonces $f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y)dy$ es densidad para X.*

prop *Si X, Y son variables aleatorias y Y es integrable, entonces*

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \frac{\int y f_{X,Y}(x, y)dy}{f_X(x)}$$

para los x tales que $f_X(x) > 0$ y 0 en otro caso. Esta igualdad es dx-ctp.

def Sea μ_n y μ medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}$. Se dice que μ_n **converge débil** a μ si $\lim_n \mu_n(A) = \mu(A)$ para todo $A = (-\infty, x]$ con $\mu(\{x\}) = 0$. Se denotará $\mu_n \Rightarrow \mu$. Tenemos que $\mu_n \Rightarrow \mu$ si y sólo si $F_n(x) \to F(x)$ para todo x de continuidad de F. Para una sucesión de variables aleatorias (X_n) definimos la convergencia **en distribución** o **en ley** si las leyes $\mathcal{L}(X_n) \Rightarrow \mathcal{L}(X)$.

prop *Si (X_n) converge en medida, entonces converge débil al mismo límite. Recordar que convergencia casi segura (ctp) implica convergencia en medida.*

teo **(Skorohod)** *Sean μ_n y μ medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}, \mathcal{B}$ tales que $\mu_n \Rightarrow \mu$. Entonces existen variables aleatorias Y_n e Y en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tales que $Y_n \sim \mu_n$, $Y \sim \mu$ y $Y_n \to Y$ $\mathbb{P}$-casi seguramente.*

teo *Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible y D_h su conjunto de discontinuidades. Si $\mu_n \Rightarrow \mu$ y $\mu(D_h) = 0$, entonces $\mu_n h^{-1} \Rightarrow \mu h^{-1}$.*

teo **(del portmanteau)** *$\mu_n \Rightarrow \mu$ si y sólo si $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ para toda f continua y acotada, si y sólo si $\mu_n(A) \to \mu(A)$ para todo A μ-continuo.*

obs *Si $\mu \sim Y$, con μ probabilidad sobre $\mathbb{R}$ y Y variable aleatoria, entonces $\int f d\mu = \int f(Y) d\mathbb{P}$.*

teo **(Principio de Selección de Helly)** *Para toda familia de distribuciones F_n existe una subsucesión n_k y una función continua a la derecha F tal que $\lim_k F_{n_k}(x) = F(x)$ para todo x de continuidad de F.*

def Una familia de medidas de probabilidad $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se dirá **tensa** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un intervalo acotado I tal que $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mu_\alpha(I^c) < \varepsilon$.

teo *Sea $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ familia de medidas de probabilidad. $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es tensa si y sólo si para toda sucesión $(\mu_{\alpha_n})_n$ existe n_k subsucesión y μ medida de probabilidad tales que $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu$.*

cor *Si una sucesión de medidas de probabilidad es tensa y satisface que para toda subsucesión convergente débil ellas convergen a un mismo límite μ, entonces $\mu_n \Rightarrow \mu$.*

prop *Si $X_n \Rightarrow X$, entonces $\mathbb{E}(|X|) \leq \liminf_n \mathbb{E}(|X_n|)$.*

prop *Si $X_n \Rightarrow X$ y X_n es uniformemente integrable, entonces X es integrable y $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.*

def Dada X, se define su **función característica** como $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int e^{itx} d\mathbb{P}(x)$.

obs *ϕ_X es absolutamente continua, $\phi_X(0) = 1$, su norma está acotada por 1, si X e Y son independientes, entonces $\phi_{aX+bY+c}(t) = \phi_X(at)\phi_Y(bt)e^{itc}$.*

teo **(de Inversión de Fourier)** *Sea μ medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ y $\phi(t)$ su función característica. Luego, si $a < b$,*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt = \mu((a, b]) + \frac{1}{2}(\mu(\{a\}) + \mu(\{b\}))$$

cor *$\phi_X(t) = \phi_Y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ para todo $A \in \mathcal{B}$.*

lem *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea μ_n una medida de probabilidad con función característica ϕ_n. Suponga que existe g cotinua en 0 y $t_0 > 0$ tales que $\lim_n \phi_n(t) = g(t)$ para todo $|t| < t_0$. Entonces μ_n es tensa.*

teo **(Continuidad de Lévy)** *Sea μ_n una familia de medidas de probabilidad y μ medida de probabilidad, con funciones características $\phi_n = \phi_{\mu_n}$ y $\phi = \phi_\mu$. Entonces $\mu_n \Rightarrow \mu$ si y sólo si ϕ_n converge puntualmente a ϕ.*

teo **(del Límite Central)** *Sea X_n una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media μ y varianza σ^2. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Entonces $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \Rightarrow Z$ cuando $n \to \infty$ y $Z \sim N(0, 1)$.*

cor *Para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$