Auxiliar 8: Teoría de la Medida

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Amitai Linker - Felipe Subiabre
6 de diciembre de 2011

P1. (**Integrabilidad uniforme**): En clases se demostró el teorema de convergencia dominada, éste teorema da criterios adecuados según el cual una sucesión que converge μ-c.t.p. converge en términos de su integral. En este ejercicio veremos criterios en espacios de medida finita, para los cuales esta convergencia sigue siendo cierta.

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita, y sea $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de funciones integrables (Γ es un conjunto cualquiera). Diremos que esta familia es uniformemente integrable ssi

$$\lim_{a \to \infty} \sup_{\gamma \in \Gamma} \int_{|f_\gamma| > a} |f_\gamma| d\mu \;=\; 0$$

(a) Muestre que si f es integrable, entonces $\{f\}$ es una familia uniformemente integrable. De forma más general, muestre que cualquier colección finita de funciones integrables es uniformemente integrable.

(b) Muestre una colección de funciones integrables que no sea uniformemente integrable

(c) Muestre que una colección de funciones, $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es uniformemente integrables ssi:

- $\sup_{\gamma \in \Gamma} \int_X |f_\gamma| d\mu \;<\; \infty$
- $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) \leq \delta \Rightarrow \sup_{\gamma \in \Gamma} \int_A |f_\gamma| d\mu \;\leq\; \epsilon$

(d) Muestre que, si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones integrables, y f es integrable, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int |f_n - f| d\mu \iff f_n \xrightarrow{\mu} f \;\wedge\; \{f_n\} \text{ es uniformemente integrable}$$

P2. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Dada una medida con signo, μ, definimos $\|\mu\|$ como

$$\|\mu\| \;=\; \mu^+(X) + \mu^-(X)$$

Y llamaremos $(\mathcal{M}^f, X, \mathcal{A})$ al espacio de las medidas con signo en $(X, \mathcal{A})$ tales que $\|\mu\|$ es finito.

(a) Muestre que éste es un espacio vectorial, y que $\|\cdot\|$ es norma

(b) Muestre que este espacio es de Banach

(c) Sean μ y ν dos medidas de probabilidad en $(X, \mathcal{A})$. Muestre que si existe $\alpha \in (0, 1)$, tal que

$$\|\alpha\mu - (1 - \alpha)\nu\| \;=\; 1$$

Entonces $\mu \perp \nu$

(d) Sean $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de medidas finitas en el espacio, con $\nu_n \ll \mu_n$, y en que existen μ y ν tales que $\|\mu_n - \mu\| \to 0$ y $\|\nu_n - \nu\| \to 0$. Muestre que

$$\frac{d\nu_n}{d\mu_n} \xrightarrow{|\mu|} \frac{d\nu}{d\mu}$$

P3. Sean μ y ν dos medidas en el espacio $(X, \mathcal{A})$, tales que $\nu \ll \mu$, y μ es finita. Muestre que, si existe $A \in \mathcal{A}$ con $0 < \nu(A) < \infty$, entonces existe un conjunto $S \in \mathcal{A}$ tal que $\nu|_S$ toma valores en $\{0, \infty\}$, $\nu(S^c) > 0$, y $\nu|_{S^c}$ es medida σ-finita