# Auxiliar 2: Teoría de la Medida

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Amitai Linker - Felipe Subiabre
25 de octubre de 2011

**P1.** En esta pregunta se mostrará una colección numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}$, cuya $\sigma$-álgebra engendrada corresponde a $\sigma(\tau_{\mathbb{R}})$:

(a) Sea $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \tau_{\mathbb{R}}$ una familia cualquiera de abiertos en $\mathbb{R}$. Muestre que existe $\{\Theta_{\lambda_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ numerable que cumple

$$\bigcup_{\imath\in\mathbb{N}} \Theta_{\lambda_i} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Theta_\lambda$$

(b) Muestre que, si definimos $\mathcal{C} \equiv \{(-\infty, p],\ p \in \mathbb{Q}\}$, entonces $\sigma(\tau_{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{C})$

(c) Sea $f : \Omega \to \Omega'$ una función, y $\tau$ una colección de conjuntos de $\Omega'$. Muestre que

$$\sigma(f^{-1}(\tau)) = f^{-1}(\sigma(\tau))$$

(d) Utilice los dos últimos resultados para mostrar que si $f : (X, \tau_X) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ es un homeomorfismo, entonces

$$\{f^{-1}(-\infty, p]\}_{p\in\mathbb{Q}}$$

Es una colección numerable de cerrados en $X$, tales que su $\sigma$-álgebra engendrada es $\sigma(\tau_X)$

**P2.** (a) Sea $\mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra sobre $\Omega$, y sea $E \subseteq \Omega$. Muestre que

$$\mathcal{A} \cap E \equiv \{A \cap E,\ A \in \mathcal{A}\}$$

Es una $\sigma$-álgebra sobre $E$

(b) Sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de $\sigma$-álgebras sobre $\Omega$, tal que $\mathcal{A}_i \subsetneq \mathcal{A}_{i+1}$. Muestre que $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$ no es una $\sigma$-álgebra

**P3.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre $\Omega$, y $\mu$ una medida finita sobre $\sigma(\mathcal{A})$. Sea $d : \sigma(\mathcal{A}) \times \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+^*$ definida como

$$d(A, B) = \mu(A \triangle B)$$

(a) Defina la relación $\sim$ como $A \sim B \Leftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0$. Muestre que es una relación de equivalencia.

(b) Muestre que $\bar{d}$, la extensión de $d$ a $\sigma(\mathcal{A})/\sim$ es métrica

(c) Muestre que en la topología de $\sigma(\mathcal{A})/\sim$ dada por la métrica anterior, $[\mathcal{A}]$ es un conjunto denso