Auxiliar 1: Teoría de la Medida

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Amitai Linker - Felipe Subiabre
20 de octubre de 2011

P1. El Teorema π, λ

Sea X un conjunto. Una clase de subconjuntos $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice π-sistema si

$$A, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}.$$

$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice λ-sistema si

- $X \in \mathcal{I}$.
- $A \in \mathcal{I} \implies A^c \in \mathcal{I}$.
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ son disjuntos, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{I}$.

a) Pruebe que $\mathcal{I}$ es λ-sistema y π-sistema si y sólo si $\mathcal{I}$ es sigma-álgebra.

b) Se define $\lambda(\mathcal{P})$ como el menor λ-sistema que contiene a $\mathcal{P}$ (observe que está bien definido). Demuestre que si $\mathcal{P}$ es π-sistema, entonces $\sigma(\mathcal{P}) = \lambda(\mathcal{P})$.

c) Concluya el Teorema π, λ: Si $\mathcal{P}$ es un π-sistema y $\mathcal{I}$ es un λ-sistema tal que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}$, entonces

$$\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{I}.$$

P2. Sea $\mathcal{S}$ una sigma-álgebra infinita.

a) Pruebe que $\mathcal{S}$ contiene una secuencia infinita de conjuntos disjuntos.

b) Pruebe que $|\mathcal{S}| \geq c$

P3. Sea $\mathcal{E}$ una clase de subconjuntos de un espacio X, con $\emptyset \in \mathcal{E}$.

a) Demuestre que si $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$, entonces $\mathcal{S}$ se puede escribir como la unión de las sigma-álgebras de la forma $\sigma(\mathcal{F})$, con $\mathcal{F}$ recorriendo todos los subconjuntos numerables de $\mathcal{E}$.

b) Sea Ω el conjunto de todos los ordinales finitos o numerables. Para $\alpha \in \Omega$ se definen por inducción transfinita las clases $\mathcal{E}_\alpha$ como sigue:

- $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$
- $\mathcal{E}_\alpha$ contiene los conjuntos de la forma $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donde $A_n \in \mathcal{E}_{\beta_n}$ con $\beta_n < \alpha$, y los conjuntos de la forma A^c con $A \in \mathcal{E}_\beta$, $\beta < \alpha$.

Demuestre que $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{E}_\alpha$.

c) Pruebe que si la clase $\mathcal{E}$ es infinita de cardinal a lo más c, entonces $|\sigma(\mathcal{E})| = c$.