

Guía 2. Medida e integración, Otoño 2006

Prof. Joaquin Fontbona

Auxs: Jorge Lemus, Aitor Aldunate.

Problema 1:

- i) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un Boreliano tal que $\lambda(A) < \infty$ donde λ denota la medida de Lebesgue y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible finita ctp. (A tiene la tribu traza). Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto medible $B \subset A$ no vacío tal que $\lambda(A \setminus B) < \varepsilon$ y $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada.
- ii) Sea $\varepsilon > 0$. Pruebe que existe un abierto $V_\varepsilon \subseteq [0, 1]$ denso en $[0, 1]$ y tal que $\lambda(V_\varepsilon) < \varepsilon$.
- iii) Sean (X, τ, μ) espacio de medida. Pruebe que $f_n \in L^1$ convergen en L^1 a f ssi $\int_A f_n d\mu$ converge a $\int_A f d\mu$ uniformemente en $A \in \tau$.

Problema 2:

Sean f_n funciones integrable que convergen c.t.p. a f integrable.

- i) Probar que si las f_n son positivas c.t.p., entonces f_n converge a f en L^1 ssi $(\int f_n d\mu)$ converge a $\int f d\mu$.
- ii) Dar un ejemplo donde $f = 0$, $\int f_n d\mu = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y f_n no converge a 0 en L^1 .

Problema 3:

Sea X un espacio métrico y $\epsilon > 0$. Se define $\mu_\epsilon^*(A) = \min\{|I| : A \subseteq \bigcup_{i \in I} B(x_i, \epsilon)\}$.

a) Probar que μ_ϵ^* es una medida exterior.

b) Se define $\psi(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_\epsilon^*$. Encontrar explícitamente $\psi(A)$ y pruebe que es una medida.

Problema 4:

Borel -Cantelli y convergencia c.t.p.

Sea (X, τ, μ) espacio de medida.

- i) Sean (A_n) conjuntos medibles t.q. $\sum \mu(A_n) < \infty$. Pruebe que $\mu(\limsup A_n) = 0$.
- ii) Muestre que una sucesión de funciones medibles f_n reales converge c.t.p. a f ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\mu(\limsup_n \{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0$.

iii) Si f_n son tales que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\sum_n \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) < \infty$$

entonces f_n converge c.t.p. a f . De un ejemplo de que esta condición no es necesaria

iv) Pruebe que si $\varepsilon_n > 0$ es una sucesión convergente a 0, y f_n una sucesión de funciones medibles t.q.

$$\sum_n \mu(\{|f_n| > \varepsilon_n\}) < \infty$$

entonces f_n converge c.t.p. a 0. Si además $\sum \varepsilon_n < \infty$, entonces la serie $\sum f_n$ converge absolutamente c.t.p.

Problema 5:

- i) Sea (X, τ, μ) espacio de medida y $f \in L^1$. Pruebe que $\nu : \tau \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\nu(A) = \int_A f d\mu$ define una medida con signo finita. Encuentre ν_+ , ν_- y $|\nu|$
- ii) Sea (X, τ) espacio medible y ν medida con signo finita sobre τ . Se define $L^1(X, \tau, \nu) := L^1(X, \tau, |\nu|)$, y para $f \in L^1(X, \tau, \nu)$,

$$\int f d\nu := \int f d\nu_+ - \int f d\nu_-.$$

Verifique que esta definición tiene sentido, y que si $\|\nu\|_{VT} = |\nu|(X)$ denota la norma en variación total de ν , entonces

$$\|\nu\|_{VT} = \sup\left\{\int f d\nu : f \text{ medible acotada t.q. } \|f\|_{\text{unif}} \leq 1\right\},$$

donde $\|f\|_{\text{unif}} = \sup_{x \in X} |f(x)|$, y por lo tanto $\nu \in \{f : \text{medible acotada}\}^*$ (dual topológico).