

MEDIDA E INTEGRACIÓN – EXAMEN

JAIME SAN MARTÍN & MAURICIO DUARTE.

3 DE JULIO 2007

P1. Acordemos que $0 \notin \mathbb{R}_+$. Recuerde que $X_t : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $\omega \mapsto X_t(\omega) = \omega(t)$, se denomina proceso empírico.

En esta pregunta, el objetivo es probar la existencia de una única medida de probabilidad \mathbb{P} en $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}^{\mathbb{R}_+})$ que satisface las dos condiciones siguientes

i. Para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se satisface que

$$\mathbb{P}(X_t \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_A \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx,$$

ii. Si $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, entonces las variables aleatorias

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son independientes con respecto a \mathbb{P} .

Para esto primero pruebe el siguiente lema

Lema 1. Sean Y_1, \dots, Y_n v.a. distribuidas como $\mathcal{N}(0, t_k)$, donde $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$; tales que $Y_1, Y_2 - Y_1, \dots, Y_n - Y_{n-1}$ son independientes. Entonces la distribución conjunta de (Y_1, \dots, Y_n) es

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2t_1}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{k+1} - t_k)}} \exp\left(-\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2(t_{k+1} - t_k)}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Puede serle útil la siguiente identidad para $r, s > 0$

$$\frac{(z-x)^2}{r} + \frac{(x-y)^2}{s} = \frac{(z-y)^2}{r+s} + \frac{r+s}{rs} \left(x - \frac{1}{r+s}(yr + zs)\right)^2.$$

P2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia creciente de sub σ -álgebras de \mathcal{F} , tales que $\sigma(\cup_n \mathcal{F}_n) = \mathcal{F}$.

(a) Probar que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $n \geq 1$ se tiene

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{P}(E_n) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} |f| d\mathbb{P}$$

donde $E_n = \left\{ \omega \in \Omega : \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{E}(f | \mathcal{F}_k)(\omega) > \lambda \right\}$. Para ello suponga que $f \geq 0$ y defina para $1 \leq k \leq n$

$$E_k^n = \left\{ \omega \in \Omega : \left[\forall j \in \{1, \dots, k-1\}, \mathbb{E}(f | \mathcal{F}_j)(\omega) \leq \lambda \right] \wedge [\mathbb{E}(f | \mathcal{F}_k)(\omega) > \lambda] \right\}.$$

(0.5 pts) Pruebe que $E_k^n \in \mathcal{F}_k$.

(0.5 pts) Pruebe que $E_n = \cup_{k=1}^n E_k^n$.

(1 punto) Pruebe que $\int_{E_n} f d\mathbb{P} \geq \lambda \mathbb{P}(E_n)$.

(0.5 pts) Concluya el resultado para f arbitraria.

(b) (1 punto). Probar que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\lambda > 0$

$$\mathbb{P} \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}(f | \mathcal{F}_n)(\omega) > \lambda \right\} \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} |f| d\mathbb{P}.$$

(c) (1 punto). Probar que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se tiene que

$$\mathbb{E}(f | \mathcal{F}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \text{en } L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

Pruebe primero que el resultado es cierto para $f \in \cup_{n \geq 1} L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$. Luego recuerde que dada $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\varepsilon > 0$ se puede encontrar una función $g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$, para algún $n \geq 1$, tal que $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$.

(d) (1.5 pts). Probar que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $g \in \cup_{n \geq 1} L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ se tiene que

$$\mathbb{P} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(f | \mathcal{F}_n) - f| > \lambda \right\} \leq \frac{4}{\lambda} \int_{\Omega} |f - g| d\mathbb{P}.$$

Concluya que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}(f | \mathcal{F}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \text{puntualmente } \mathbb{P} - c.s.$$

Tiempo: 5 hrs.