

Examen Recuperativo

Julio, 2002

Prof. Jaime San Martín

Aux. Ricardo Menares

Pregunta 1: Consideremos $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Diremos que una familia \mathcal{I} de intervalos cerrados, acotados y de interior no vacíos, es un recubrimiento de Vitali de $E \in \mathcal{L}$ si

$$\forall x \in E \forall \epsilon > 0 \exists I \in \mathcal{I} \quad x \in I \text{ con } \mu(I) \leq \epsilon.$$

Supongamos que $0 < \mu(E) < \infty$, probaremos que hay una subfamilia $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ tal que: $\mathcal{J} = (I_k)_k$ es a lo más numerable, los intervalos en \mathcal{J} son disjuntos y

$$\mu(E \setminus \bigcup_k I_k) = 0.$$

Para ello partimos fijando θ , un abierto de medida finita, tal que $E \subset \theta$. Tomemos I_1 cualquiera en \mathcal{I} tal que $I_1 \subset \theta$ (¿hay alguno?). Si $\mu(E \setminus I_1) = 0$ paramos, sino construiremos I_2 . El procedimiento inductivo es como sigue: supongamos construidos $I_1, \dots, I_n \subset \theta$ disjuntos y tal que

$$\mu(E \setminus \bigcup_{k=1}^n I_k) > 0.$$

Denotemos por $R_n = E \setminus \bigcup_{k=1}^n I_k$ y definamos $G_n = \theta \setminus \bigcup_{k=1}^n I_k$. Pruebe que la familia $\{I \in \mathcal{I} : I \subset G_n\}$ es no vacía y que

$$0 < \kappa_n := \sup\{\mu(I) : I \in \mathcal{I}, I \subset G_n\} < \infty.$$

Tomemos $I_{n+1} \in \{I \in \mathcal{I} : I \subset G_n\}$ cualquiera tal que $\mu(I_{n+1}) \geq \kappa_n/2$.

Consideremos sólo el caso en que este procedimiento no para en un número finito de iteraciones esto es $\forall n \mu(R_n) > 0$. Para cada intervalo I_k definimos el intervalo J_k de mismo centro pero 5 veces más largo. Pruebe que $\kappa_n \rightarrow 0$, que se satisface la inclusión:

$$\forall n \geq 1 \quad R_n = E \setminus \bigcup_{k=1}^n I_k \subset \bigcup_{l=n+1}^{\infty} J_l,$$

y concluya el resultado.

Para probar la inclusión le puede ser útil considerar $x \in R_n \subset G_n$ y $J \in \{I \in \mathcal{I} : I \subset G_n\}$ tal que $x \in J$. Pruebe que debe existir un primer $m > n$ tal que $J \notin \{I \in \mathcal{I} : I \subset G_m\}$.

1 pto

3 pto

3 pto

3 pto

Pregunta 2:

Consideremos (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida finita y $f \in L^\infty$ una función positiva tal que $0 < \|f\|_\infty$. Se definen $\alpha_n = \int (f(x))^n d\mu(x)$. Pruebe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \|f\|_\infty.$$

(ii) En lo que sigue consideremos $([0, 1], \mathcal{L}, dx)$. Diga si las afirmaciones siguientes son ciertas o falsas y en cada caso pruebelas o de un contraejemplo según corresponda:

(1) La convergencia casi segura de funciones de L^1 a una función de L^1 implica la convergencia en L^1 .

(2) Si un conjunto medible tiene medida positiva entonces tiene interior no vacío.

(3) Si un conjunto tiene medida 0 entonces es numerable.

(4) $\bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p = L^\infty$

(5) Sea $A \in \mathcal{L}$ que verifica: para todo I intervalo abierto en $[0, 1]$, no vacío, se tiene $\mu(A \cap I) > \frac{1}{2} \mu(I)$. Necesariamente se tiene $\mu(A) = 1$.