

MEDIDA E INTEGRACIÓN – CONTROL 3

JAIME SAN MARTÍN, JULIO BACKHOF, OMAR LARRÉ

26 DE JUNIO DEL 2009

P1. (4 puntos) Consideremos $V = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx) : a_m, b_m \in \mathbb{R}, \forall m \geq m_0, a_m = b_m = 0 \right\}$ el espacio vectorial generado por las funciones $\{1, \cos(mx), \sin(mx), m \geq 1\}$. Probaremos que V es denso en $L^2((-\pi, \pi), dx)$.

(1) Pruebe que si V es denso en $C_0((-\pi, \pi))$ entonces V es denso en L^2 .

Considere $f \in C_0((-\pi, \pi))$ y definamos

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(mt) dt$$

para $m \geq 1$, y

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Definimos $S_k(x) = \sum_{m=0}^k a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)$ y $\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n}$. En lo que sigue supondremos que f está extendida a todo \mathbb{R} de manera 2π periódica, es decir $\forall x, f(x+2\pi) = f(x)$. Pruebe que

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(\left(\frac{2k+1}{2}\right)(t-x)\right)}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt$$

y concluya que $\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{n(t-x)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} \right)^2 f(t) dt$

Indicación:

$$\frac{1}{2} + \cos(u) + \cos(2u) + \dots + \cos(mu) = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}u\right)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

$$\sin(u) + \sin(3u) + \dots + \sin((2m-1)u) = \frac{(\sin(mu))^2}{\sin(u)}.$$

Definamos $\phi_n(z) = \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{n(z)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \right)^2$, así demuestre que

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \phi_n(z) dz.$$

(2) Pruebe que $\phi_n \geq 0$; $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(z) dz = 1$; y que $\forall \delta > 0$ suficientemente pequeño $\int_{-\pi}^{-\delta} \phi_n(z) dz =$

$$\int_{\delta}^{\pi} \phi_n(z) dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(3) Pruebe que $\sigma_n \rightarrow f$ uniformemente, para ello note que

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+z)) \phi_n(z) dz$$

y separe esta integral en tres partes $(-\pi, -\delta]$, $(-\delta, \delta)$ y $[\delta, \pi)$.

Concluya que $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in L^2 , y pruebe que V es denso en L^2 .

- P2.** (2 puntos) (1) Consideremos en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ una medida ν tal que para todo compacto K se tiene $\nu(K) < \infty$. Pruebe que ν es regular. También pruebe que existe $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha tal que $F(0) = 0$ y

$$\nu((a, b]) = F(b) - F(a).$$

- (2) Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ la función

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

con $\mu \in \mathbb{R}^n$ y Σ una matriz simétrica definida positiva. Pruebe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1.$$

Para ello le puede ser útil saber que toda matriz simétrica definida positiva tiene una raíz simétrica, es decir existe A simétrica tal que $\Sigma = A^2$. A es invertible ¿por qué?

TIEMPO 3 hrs.