

CONTROL 1

Prof. Jaime San Martín

Aux. Arturo Prat

Pregunta 1 : Sea (X, τ, μ) un espacio de medida finita completo. Se dice que una sucesión de funciones medibles (f_n) converge μ -c.t.p. Uniformemente (lo que denotaremos por UCTP) si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \tau, \mu(A) < \varepsilon \text{ y } f_n|_{A^c} \rightarrow f|_{A^c}, \text{ Uniformemente.}$$

El propósito de esta pregunta es probar que UCTP es equivalente a convergencia c.t.p.. Para ello

(i) Considere $B_m^k = \{x \in X : |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\}$, y defina también $A_m^k = \bigcap_{n \geq m} B_n^k$.

Bajo la hipótesis que (f_n) converge puntualmente a f pruebe que la familia $(A_m^k)_m$ es creciente en m y su unión es X , para todo $k \geq 1$ fijo.

(ii) Pruebe que para $\varepsilon > 0$ fijo existe una secuencia m_k tal que $\mu(X \setminus A_{m_k}^k) < \varepsilon/2^k$. Concluya que (f_n) converge UCTP a f , y generalice al caso en que (f_n) converge a f c.t.p..

(iii) Para la recíproca tome $\varepsilon = 1/j$ y utilice la definición de convergencia UCTP.

Pregunta 2 : Consideremos la función $\psi(y) = y \log(y + 1)$ definida en \mathbb{R}_+ . En el espacio de medida $([0, 1], \mathcal{L}, dx)$ definimos el conjunto de clases de equivalencia de funciones medibles

$$B = \left\{ [f] : \int_0^1 \psi(|f(x)|) dx < \infty \right\}.$$

La idea es dotar a este espacio de una norma que lo haga Banach, y probar que se encuentra entre L^1 y L^p : $p > 1$. En lo que sigue no haremos distinción entre funciones y clases de equivalencia.

(i) Pruebe que la función definida en $(0, \infty)$:

$$a \mapsto \int_0^1 \psi\left(\frac{|f(x)|}{a}\right) dx,$$

es estrictamente decreciente y continua si $f \in B, f \neq 0$.

(ii) Definimos

$$\|f\| = \inf\{a > 0 : \int_0^1 \psi\left(\frac{|f(x)|}{a}\right) dx \leq 1\}.$$

Pruebe que $B = \{f : \|f\| < \infty\}$, y que si $f \in B, f \neq 0$ entonces

$$\int_0^1 \psi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|}\right) dx = 1.$$

(iii) Pruebe que $\|\cdot\|$ tiene la siguiente monotonía en B

$$0 \leq f \leq g \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|,$$

y deduzca que si $0 \leq f_n \uparrow f$, con $f_n \in B$, y existe $C < \infty$ tal que $\|f_n\| \leq C$ entonces $f \in B$ y $\|f_n\| \uparrow \|f\|$. Ind.: Utilice Fatou.

(iv) Pruebe que $f_n \rightarrow 0$ en la norma de B si y sólo si $\int_0^1 \psi(|f_n(x)|) dx \rightarrow 0$.

(v) Pruebe el siguiente Teorema de convergencia dominada: si $f_n \rightarrow f$ dx-c.t.p y $|f_n| \leq g \in B$ entonces $\|f_n - f\| \rightarrow 0$

(vi) Pruebe que $\|\cdot\|$ es una norma en B . Para la desigualdad triangular considere $\frac{|f+g|}{\|f\| + \|g\|}$.

(vii) Pruebe que $(B, \|\cdot\|)$ es un Banach contenido en L^1 y que contiene a todo L^p para $p > 1$.

Las siguientes propiedades de ψ le pueden ser útiles:

- Es una función continua, estrictamente creciente, convexa.
- Tiene un crecimiento moderado en ∞ , esto es

$$\begin{aligned} \forall y \geq e \quad y &\leq \psi(y) \\ \forall p > 1 \exists C(p) < \infty, y(p) < \infty \quad \forall y \geq y(p) \quad \psi(y) &\leq C(p)y^p. \end{aligned}$$

- Tiene variación lenta en ∞ :

$$\forall R > 0 \exists D(R) < \infty, y(R) < \infty \quad \forall y \geq y(R) \quad \psi(Ry) \leq D(R)\psi(y)$$

- Finalmente tiene además la propiedad

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C(\varepsilon) < \infty, \forall y \geq \varepsilon \quad y \leq C(\varepsilon)\psi(y).$$