

ANÁLISIS II

Prof. Alejandro Ramírez

Facultad de Matemáticas, PUC

Tarea 1

1. **Clase monótona.** Definimos una *clase monótona* como una colección de conjuntos que es cerrada bajo límites monótonos de sucesiones crecientes y decrecientes de conjuntos. Demuestre que un álgebra es una σ -álgebra si y sólo si es una clase monótona.
2. **Función ternaria de Cantor.** Sea x un número real en $[0, 1]$ con expansión ternaria $\{a_n\}$. Defina $N = \infty$ si ningún a_n es 1, y en caso contrario defina N como el valor más pequeño de n tal que $a_n = 1$. Sea $b_n = a_n/2$ para $n < N$ y $b_N = 1$. Muestre que

$$\sum_{n=1}^N \frac{b_n}{2^n},$$

es independiente de la expansión ternaria de x y que la función f definida como,

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{2^n},$$

es continua y monótona en el intervalo $[0, 1]$. Muestre que f es constante en cada intervalo contenido en el complemento del conjunto ternario de Cantor, y que f mapea el conjunto ternario de Cantor en el intervalo $[0, 1]$.

3. **Conjunto medible que no es Borel-medible.** Sea f_1 la función ternaria de Cantor, y defina $f(x) = f_1(x) + x$.
 - a) Muestre que f es un homeomorfismo de $[0, 1]$ en $[0, 2]$.
 - b) Muestre que f mapea el conjunto ternario de Cantor en un conjunto F de medida de Lebesgue 1.
 - c) Sea $g = f^{-1}$. Muestre que existe un conjunto medible A tal que $g^{-1}(A)$ no es medible.
 - d) De un ejemplo de una función continua g y una función medible h tal que $h \circ g$ no es medible.
 - e) Muestre que existe un conjunto medible que no es Borel medible.
4. **Monotonía.** Demuestre que una medida finitamente aditiva μ definida en una σ -álgebra \mathcal{M} es numerablemente aditiva si y sólo si satisface cualquiera de las dos condiciones equivalentes:
 - (i) Si A_n es una sucesión no-creciente en \mathcal{M} y $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ entonces $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
 - (ii) Si A_n es una sucesión no-decreciente en \mathcal{M} y $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ entonces $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
5. **Átomos de medidas finitas.** Sea μ una medida positiva y finita en (X, \mathcal{M}) y $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ medible. Demuestre que el conjunto,

$$\{\alpha \in \mathbf{R} : \mu[f(x) = \alpha] > 0\},$$

es numerable.

6. **Lema de Riemann-Lebesgue.** Demuestre que si $f \in L_1(\mathbf{R})$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x)e^{nxi}dx = 0$.
7. Considere el espacio $L_1(\mathbf{R})$ de funciones Borel-medibles, Lebesgue integrables. Sea $g \in L_1(\mathbf{R})$ acotada tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)| = 0$. Demuestre que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int g(t)f(t/n)dt = 0.$$