

Control Recuperativo Teoría de la Medida 2003

Profesor: Alejandro Maass

P1.— Sea X un espacio métrico compacto. Sea $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ la σ -álgebra Boreliana de X . Sea $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ una medida finita. El propósito de este problema es probar el resultado siguiente:

$$\forall B \in \mathcal{B},$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists F \subseteq X, \text{ cerrado}, \exists U \subseteq X, \text{ abierto}, \text{ tal que } F \subseteq B \subseteq U, \quad \mu(U \setminus F) \leq \epsilon. (*)$$

Para probar el resultado se sugiere:

- (a) Probar que la propiedad (*) es cierta para todo cerrado de X .
- (b) Defina $\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{B} : \text{ la propiedad } (*) \text{ es cierta } \}$, y pruebe que es σ -álgebra.
- (c) Concluya.

P2.— Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida finita. Sea $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia creciente de particiones finitas \mathcal{B} -medibles, es decir, $\alpha_n \subseteq \mathcal{B}$ y dado $A \in \alpha_{n+1}$ existe $B \in \alpha_n$ tal que $A \subseteq B$ en cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{B}_\infty = \sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n)$.

- (a) Caracterice las funciones $\sigma(\alpha_n) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ medibles, $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Pruebe que dada una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, en $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, y dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ y una función $\sigma(\alpha_N) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ medible, $f_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\left| \int_{\Omega} f_N d\mu - \int_{\Omega} f d\mu \right| < \epsilon$$

P3.— Sea $\Omega \neq \emptyset$.

(A) Se dice que \mathcal{C} es una clase que recubre si $\emptyset \in \mathcal{C}$ y dado $A \subseteq \Omega$ existe $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Sea $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\tau(\emptyset) = 0$. Se define $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(E_n) : (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right\}.$$

Probar que μ^* es medida exterior.

(B) Se dice que una medida exterior $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ es regular si $\forall A \subseteq \Omega, \exists E \in \mathcal{B}^*, A \subseteq E, \mu^*(E) = \mu^*(A)$.

Asuma que μ^* es una medida exterior regular y que $\mu^*(\Omega) < \infty$. Probar que

$$E \in \mathcal{B}^* \text{ si y sólo si } \mu^*(\Omega) = \mu^*(E) + \mu^*(E^c)$$

P4.– Sea (Ω, \mathcal{B}) un espacio medible y $T : \Omega \rightarrow \Omega$ una transformación $\mathcal{B} - \mathcal{B}$ -medible. Sea

$$\mathcal{M}(\Omega, T) = \{\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1] : \mu \text{ es probabilidad, } \mu(T^{-1}B) = \mu(B)\}$$

Se dice que $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, T)$ es ergódica si

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mu(T^{-1}B \Delta B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0 \vee \mu(B) = 1$$

(4.1) Probar que $\mathcal{M}(\Omega, T)$ es convexo.

(4.2) Probar que $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, T)$ es ergódica si y sólo si μ es un punto extremo del convexo $\mathcal{M}(\Omega, T)$ (esto es, no se puede tener $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$ con $p \in (0, 1)$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\Omega, T)$, $\mu_1 \neq \mu_2$). Para esto se aconseja seguir el camino siguiente.

(4.2.1) Probar \Leftarrow : asuma que μ no es ergódica y escriba μ como combinación convexa de medidas en $\mathcal{M}(\Omega, T)$.

(4.2.2) Para \Rightarrow : asuma que $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$ con $p \in [0, 1]$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\Omega, T)$, y pruebe que $\mu_1 = \mu_2$. Para ello,

- Pruebe que existe $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, $f \geq 0$, tal que $\mu_1(B) = \int_B f d\mu$, $B \in \mathcal{B}$.
- Considere $E = \{w \in \Omega : f(w) < 1\}$ y pruebe que $\int_{E \setminus T^{-1}E} f d\mu = \int_{T^{-1}E \setminus E} f d\mu$.
- Concluya que $f = 1$.
- Concluya que $\mu_1 = \mu_2$.

(4.3) Probar que si $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega, T)$ son ergódicas y $\mu \neq \nu$ entonces $\mu \perp \nu$. (Hint.: use el Teorema de descomposición de Lebesgue)

P5.– Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida.

(5.1)

(5.1.1) Sea $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Probar que

$$\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f| d\mu = 0$$

(5.1.2) Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ y $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ tal que $f_n \rightarrow f$ puntualmente cuando $n \rightarrow \infty$. Probar que si $\int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces

- (1) $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f_n| d\mu = 0$ uniformemente en n .
- (2) $\forall \epsilon > 0, \exists A_{\epsilon} \in \mathcal{B}, \mu(A_{\epsilon}) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}, \int_{A_{\epsilon}^c} |f_n| d\mu < \epsilon$

(Hint.: probar que dado $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ y $\epsilon > 0$ existe $A_{\epsilon} \in \mathcal{B}$ tal que $\int_{A_{\epsilon}^c} |g| d\mu < \epsilon$.)

(5.2) Sunponga en esta parte que μ es una medida finita. Diremos que una familia F de funciones en $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ es *uniformemente integrable* si: (i) $\sup\{\int_{\Omega} |f| d\mu : f \in F\} < \infty$ y (ii) $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f| d\mu = 0$ uniformemente en $f \in F$.

(5.2.1) Pruebe que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1_{\mathbb{R}^+}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ converge puntualmente a f entonces

$$\left(\int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f d\mu, f \in L^1_{\mathbb{R}^+}(\Omega, \mathcal{B}, \mu) \right) \Rightarrow \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ es unif. integrable}$$

(Hint.: probar que $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ y para ello pruebe que $\int_{\Omega} \min(f_n, f) d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$ y $\int_{\Omega} \max(f_n, f) d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$.)

(5.2.2) Considere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ convergiendo puntualmente a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Asuma que $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f_n| d\mu = 0$ uniformemente en n . Vamos a probar que $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Para ello:

- Pruebe que $\forall \epsilon > 0, \forall \bar{\epsilon} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, \mu(|f_n - f_m| > \epsilon) \leq \bar{\epsilon}$.
- Pruebe que $\|f_n - f_m\|_1 \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$.
- Concluya que $\{\|f_n\|_1 : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado y que $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

(5.3) Asuma que $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de medida finito. Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ tal que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a f . Vamos a probar que

$$\|f_n\|_p \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \|f\|_p \Leftrightarrow f_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f \text{ en } L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$$

cuando $1 \leq p < \infty$. Para ello:

(5.3.1) Pruebe \Leftarrow .

(5.3.2) Pruebe \Rightarrow :

- Pruebe que $\int_{\Omega} |f_n|^p - |f|^p d\mu \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ y que $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f_n|^p d\mu = 0$ uniformemente en n .
- Pruebe que para $1 \leq p < \infty$ se tiene

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |f_n - f_m|^p d\mu \right)^{1/p} = 0$$

- Concluya que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Llame g al límite.
- Pruebe que $\forall \epsilon > 0, \mu(|f_n - g| > \epsilon) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.
- Concluya que $g = f$ como elementos de $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

P6.– Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$. Probar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r = \|f\|_{\infty}$$

(es decir el límite existe, pudiendo ser ∞ , y es igual a la norma infinito de f).

Para probar este resultado se sugiere:

- Probar el resultado cuando $\|f\|_\infty = 0$.
- Probar para $\|f\|_\infty > 0$ que $\liminf_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r \geq \|f\|_\infty$: para cada $0 < \alpha < \|f\|_\infty$ y $r > 1$ pruebe que

$$\|f\|_r^r \geq \alpha^r \mu(A_\alpha) \quad \text{y} \quad 0 < \mu(A_\alpha) < \infty$$

donde $A_\alpha = \{w \in \Omega : |f(w)| > \alpha\}$.

- Probar para $\infty > \|f\|_\infty > 0$ que $\limsup_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r \leq \|f\|_\infty$.
- Concluir.

P7.– Sea X un espacio métrico compacto. Denotamos por $C(X)$ al espacio de las funciones a valores reales continuas y por $\mathcal{M}(X)$ al conjunto de las medidas de probabilidad definidas en los borelianos de X ($\mathcal{B}(X)$).

Se tiene que todo operador lineal positivo, $L : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$, verificando $L(1) = 1$, tiene asociada una única medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que $L(f) = \int_X f d\mu$ en cada función $f \in C(X)$. Justifique esta afirmación.

El objetivo de este ejercicio es probar la proposición siguiente.

Proposición. Sean $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(X)$ y $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu$ para cada $f \in C(X)$;
- (b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(C) \leq \mu(C)$ en cada conjunto cerrado $C \subseteq X$;
- (c) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$ en cada conjunto abierto $U \subseteq X$;
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ en cada $A \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\mu(\text{bd}(A)) = 0$, donde $\text{bd}(A)$ es la frontera del conjunto A .

Para probar esta proposición se sugiere:

(7.1) Probar que (b) \Leftrightarrow (c).

(7.2) Probar (a) \Rightarrow (b) (Hint: aproxime los cerrados por abiertos y aplique Teorema de Uryshon).

(7.3) Probar que (b) y (c) \Rightarrow (d).

(7.4) (d) \Rightarrow (a)

(Hint: dada una función $f \in C(X)$ defina $m = \min_{x \in X} f(x) - 1$ y $M = \max_{x \in X} f(x) + 1$. Luego considere la medida $\nu : \mathcal{B}([m, M]) \rightarrow [0, 1]$ por $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$.

Pruebe que dado $\epsilon > 0$ existen reales $t_0 = m < t_1 < \dots < t_k = M$ tales que $t_j - t_{j-1} < \epsilon$ y $\nu(\{t_j\}) = 0$ en cada $j \in \{2, \dots, k\}$.

Use estos valores para definir la partición de X formada por los átomos $A_j = \{x \in X : t_{j-1} \leq f(x) < t_j\}$, $j \in \{2, \dots, k\}$, y concluya.)

P8.– Sea (X, \mathcal{B}, μ) un espacio de probabilidad. Sean $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}_n \dots \subseteq \mathcal{B}$ una secuencia creciente de sigma álgebras de \mathcal{B} tal que $\sigma(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n) = \mathcal{B}$.

(8.1) Probar que para toda $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ y $N \geq 1$ se tiene:

$$\forall \lambda > 0, \mu(E_N) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X |f| d\mu,$$

donde $E_N = \{x \in X : \max_{1 \leq n \leq N} IE(f | \mathcal{B}_n)(x) > \lambda\}$. Para ello: suponga $f \geq 0$ y defina para $1 \leq n \leq N$

$$E_n^{(N)} = \{x \in X : (\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, IE(f | \mathcal{B}_k)(x) \leq \lambda) \wedge IE(f | \mathcal{B}_n)(x) > \lambda\}.$$

- Pruebe que $E_n^{(N)} \in \mathcal{B}_n$;
- Pruebe que $E_N = \bigcup_{n=1}^N E_n^{(N)}$;
- Pruebe que $\int_{E_N} f d\mu \geq \lambda \mu(E_N)$;
- Concluya el resultado para f arbitraria.

(8.2) Probar que para toda $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ y $\lambda > 0$

$$\mu\{x \in X : \sup_{n \geq 1} IE(f | \mathcal{B}_n) > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \int_X |f| d\mu.$$

(8.3) Probar que para toda $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ se tiene que $IE(f | \mathcal{B}_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} IE(f | \mathcal{B})$ en $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

(Hint: pruebe primero que el resultado es cierto para $f \in \bigcup_{n \geq 1} L^1(X, \mathcal{B}_n, \mu)$. Luego recuerde que dada $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ y $\epsilon > 0$ se puede encontrar una función $g \in L^1(X, \mathcal{B}_{n_0}, \mu)$ para algún $n_0 \geq 1$ tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon$.)

(8.4) Probar que para toda $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ se tiene que $IE(f | \mathcal{B}_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} IE(f | \mathcal{B})$ puntualmente (μ -c.s.).

(Hint: use (8.1) o (8.2), y la desigualdad de Markov para probar que

$$\mu\{\limsup_{n \rightarrow \infty} |IE(f | \mathcal{B}_n) - f| > \sqrt{\epsilon}\} \leq \frac{4}{\sqrt{\epsilon}} \int_X |f - g| d\mu$$

donde g y ϵ son como en la parte anterior.)