

CONTROL 3: TEORÍA DE LA MEDIDA

PROFESOR: JAIME SAN MARTÍN

AUXILIARES: MAURO ESCOBAR - FELIPE SUBIABRE

11 DE DICIEMBRE DE 2010

P1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Considere $M_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sucesión de variables aleatorias, con M_0 constante y $(M_n)_n \subset L^1$. La sucesión $(M_n)_n$ se dice **martingala** si

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n, \quad \forall n \geq 0$$

con $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)$, para $n \geq 1$.

Sea $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$. Se dice que T es **tiempo de parada** si

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \geq 0.$$

- (a) **(0.5 ptos.)** Pruebe que $\mathbb{E}(M_n) = M_0$, para todo $n \geq 0$.
- (b) **(1 pto.)** Pruebe que $\mathbb{E}(M_n \cdot Z) = \mathbb{E}(M_0 \cdot Z)$, si Z es \mathcal{F}_n -medible, $n \leq K$.
- (c) **(3 ptos.)** Sea T un tiempo de parada acotado, es decir, existe K constante tal que $\mathbb{P}(T \leq K) = 1$. Se define

$$M_T(\omega) = M_{T(\omega)}(\omega).$$

Pruebe el **Teorema de Doob**:

$$\mathbb{E}(M_T) = M_0.$$

Indicación: Considere $M_T = \sum_{n=0}^K M_n \mathbf{1}_{\{T=n\}}$.

- (d) **(1 pto.)** Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un Movimiento Browniano. Pruebe que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala.

Indicación: Calcule $\mathbb{E}(B_{n+1} - B_n | \mathcal{F}_n)$.

- (e) **(0.5 ptos.)** Considere

$$T = \inf\{i \in \mathbb{N} : B_i \geq 1\}.$$

Pruebe que T es tiempo de parada. Se sabe que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Pruebe que $\mathbb{E}(B_T) \geq 1$, luego no se verifica el Teorema de Doob para este tiempo de Parada. ¿Por qué debe fallar?

P2. Se quiere construir una medida \mathbb{P} en $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$, $T = \mathbb{R}_+$, tal que las coordenadas verifican:

$$\begin{aligned} X_t &\sim N(t, t), \quad \forall t > 0 \\ X_t - X_s &\perp X_u, \quad u \leq s \leq t \\ X_0 &= 0. \end{aligned}$$

- (a) **(2 ptos.)** Pruebe que si tal medida \mathbb{P} existe, entonces para $t_1 < \dots < t_n$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}(A) := \mathbb{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A) = \int_A \prod_{i=1}^n q(\Delta_i, x_{i-1} + \Delta_i, x_i) dx_1 \cdots dx_n$$

donde

$$\begin{aligned} x_0 &= t_0 = 0 \\ \Delta_i &= t_i - t_{i-1} \\ q(s, x, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{1}{2s}(x-z)^2}, \quad s > 0, \quad x, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- (b) **(2 ptos.)** Para $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ distintos se define

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}(A) = \mu_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}}(\sigma(A))$$

con $(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$ es el estadístico de orden de t_1, \dots, t_n . Pruebe que la familia

$$\{\mu_{t_1, \dots, t_n} : \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T\}$$

verifica las condiciones de consistencia de Kolmogorov.

- (c) **(2 ptos.)** Pruebe que $(X_t - t)_{t \geq 0}$ es un Movimiento Browniano.

Tiempo: 3 horas.