

## Ejercicios de Teoría de la Medida

**Ejercicio 1** Demostrar que si  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  es una clase monótona, también lo son

$$\{A \in \mathcal{M} : A^c \in \mathcal{M}\}, \quad \{A \in \mathcal{M} : \forall B \in \mathcal{C}, A \cap B \in \mathcal{M}\},$$

para cualquier  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ .

**Ejercicio 2** Demostrar que para cada  $A \subset \mathbb{R}$ ,

$$\inf\left\{\sum(b_n - a_n) : A \subset \cup(a_n, b_n]\right\} = \inf\left\{\sum(b_n - a_n) : A \subset \cup[a_n, b_n)\right\}.$$

**Ejercicio 3** ¿Es la unión de  $\sigma$ -álgebras  $\sigma$ -álgebra? ¿Y la intersección?

**Ejercicio 4** ¿Cuales son los más pequeños intervalos  $(a, b]$  cuyas uniones finitas o numerables forman  $\sigma(\mathcal{C})$ , para la clase  $\mathcal{C} = \{(0, 1/n] : n \in \mathbb{N}\}$  en  $(0, 1]$ ?

**Ejercicio 5** Describir  $\sigma(\mathcal{C})$ , para la clase

$$\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{N} : 2n \in A, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

**Ejercicio 6** Dar todas las medidas exteriores en el conjunto  $\Omega = \{0, 1\}$ . Idem en  $\Omega = \{0, 1, 2\}$ .

**Ejercicio 7** Sea  $\Omega$  un conjunto infinito y

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega, \{x\}(\forall x \in \Omega)\}, \quad \rho : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty], \quad \rho(\emptyset) = 0, \rho(\Omega) = \infty, \rho(\{x\}) = 1.$$

Dar la medida exterior generada por  $\rho$  y la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}_*$ .

**Ejercicio 8** Demostrar que para cada  $E \subset \mathbb{N}$ ,  $\mu^*(E) = n/(n+1)$  si  $E$  tiene  $n$  elementos y  $\mu^*(E) = \infty$  si  $E$  es infinito, es una medida exterior. Encontrar  $\mathcal{A}_*$ .

**Ejercicio 9** Sean  $A_n$  conjuntos medibles tales que  $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ . Demostrar que casi seguro todo punto está a lo sumo en un número finito de conjuntos  $A_n$ .

**Ejercicio 10** Sea  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  un espacio de medida y  $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  una aplicación, demostrar que  $\mathcal{A}_2 = \{B : F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mu_2 = F_*\mu_1$ , es decir  $\mu_2(B) = \mu_1(F^{-1}(B))$  una medida y que si el primer espacio es completo, también lo es el segundo.

**Ejercicio 11** Sea  $\mathcal{C} = \{[a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}$  y  $\mathcal{F} = \{(a, b] : a < b \in \mathbb{R}\}$ . Demostrar que  $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{F})$ . ¿Qué  $\sigma$ -álgebra es?

**Ejercicio 12** Demostrar que  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{C})$ , para

$$\mathcal{C} = \{\{x_i \leq b\} : i \in \{1, \dots, n\}, b \in \mathbb{R}\}.$$

**Ejercicio 13** Dado un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Demostrar:

(a) Si  $A, B \in \mathcal{A}$  y  $\mu(A \Delta B) = 0$  entonces  $\mu(A) = \mu(B)$ .

(b) La relación entre conjuntos medibles  $A \simeq B$  si y sólo si  $\mu(A \Delta B) = 0$ , es de equivalencia.

(c) En el espacio cociente  $\mathcal{X} = \mathcal{A} / \simeq$  la aplicación

$$\rho(A, B) = \mu(A \Delta B),$$

satisface  $\rho(A, A^c) = \mu(\Omega)$ , por tanto en general  $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$  toma el valor  $\infty$ , sin embargo define una métrica en el sentido<sup>1</sup> de que verifica las tres propiedades habituales. Demostrar que para la topología natural —en la que las bolas abiertas de radio finito son base—, para cada  $A \in \mathcal{X}$ , los  $B$  que están a distancia finita de  $A$  es un abierto y que estos abiertos o coinciden o son disjuntos y descomponen  $\mathcal{X}$  en componentes abiertas que sí son espacios métricos y son tales que la aplicación  $A \in \mathcal{X} \rightarrow A^c \in \mathcal{X}$  es una isometría que lleva una componente en otra (si  $\mu(\Omega) = \infty$ ) y las aplicaciones de  $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$

$$(A, B) \rightarrow A \cup B, \quad (A, B) \rightarrow A \cap B, \quad (A, B) \rightarrow A \Delta B,$$

son continuas.

**Ejercicio 14** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f = 0$  en  $\mathbb{Q}$  y  $f(x) = n$  si en la representación decimal de  $x$  hay  $n$  ceros exactamente tras la coma decimal. Demostrar que  $f$  es medible y calcular  $\int f dm$ .

**Ejercicio 15** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f = 0$  en el conjunto ternario de Cantor  $K$  y  $f = n$  en cada intervalo de  $K^c$  de longitud  $3^{-n}$ . Demostrar que  $f$  es medible y calcular  $\int f dm$ .

**Ejercicio 16** Sea  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f = 0$  en  $\mathbb{Q}$  y en los irracionales  $f(x) = [1/x]$ , para  $[y]$  la parte entera de  $y$ . Demostrar que  $f$  es medible y calcular  $\int f dm$ .

**Ejercicio 17** Sea  $f_{2n-1} = I_{[0,1]}$ ,  $f_{2n} = I_{[1,2]}$ , en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ . ¿Se puede aplicar el Lema de Fatou ?, ¿Se da la igualdad al aplicar el Lema de Fatou ?

**Ejercicio 18** Sean  $0 \leq f_n \leq f$  medibles y  $f_n \rightarrow f$ . Demostrar que  $\int f_n \rightarrow \int f$ .

**Ejercicio 19** Para cada  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  definimos

$$\mu(B) = \int_{B \cap (0, \infty)} \frac{1}{1+x} dm,$$

demostrar que  $\mu$  es una medida de Lebesgue–Stieltjes, hallar una función de distribución suya y encontrar una función medible  $f$  no nula en  $(0, \infty)$  y tal que  $\int f d\mu < \infty$  y  $\int f dm = \infty$ .

---

<sup>1</sup>Observemos que el concepto habitual de métrica exige que  $d(x, y) < \infty$ , aunque no es esencial.

**Ejercicio 20** Sean  $f, f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  medibles, tales que  $f_n \rightarrow f$  y  $\int f_n dm = \int f dm$ , demostrar que

$$\int_{-\infty}^x f_n dm \rightarrow \int_{-\infty}^x f dm,$$

**Ejercicio 21** Sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ , tal que para  $n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\int f^n dm = \int f^m dm,$$

probar que existe un boreliano  $B$ , tal que  $f = I_B$  c.s.

**Ejercicio 22** Sean  $f, g$  integrables, ¿es  $\max(f, g)$  integrable?, ¿es  $\min(f, g)$  integrable?

**Ejercicio 23** Dada una función medible  $f$  en un espacio de medida  $\sigma$ -finita  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , demostrar que existe una sucesión de funciones simples  $s_n \rightarrow f$ , tales que  $|s_n| \leq |f|$  y  $\mu\{s_n \neq 0\} < \infty$ .

**Ejercicio 24** ¿Es cierto que si  $\{f \leq r\}$  es medible para todo  $r$  irracional entonces  $f$  es medible?. ¿Y para todo  $r$  racional?

**Ejercicio 25** Demostrar que toda función continua es Borel medible y que si  $V \subset \mathbb{R}^n$  es abierto y  $f \in C^\infty(V)$ ,  $f$  y todas sus derivadas parciales de todos los ordenes son Borel medibles en  $V$ .

**Ejercicio 26** Sea  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  un espacio de medida y  $F: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  una aplicación, demostrar que  $\mathcal{A}_2 = \{B : F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mu_2 = F_*\mu_1$ , es decir  $\mu_2(B) = \mu_1(F^{-1}(B))$  una medida y que  $g: \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tiene integral si y sólo si la tiene  $g \circ F$  y  $\int g \circ F d\mu_1 = \int g d\mu_2$ .

**Ejercicio 27** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  Riemann integrable, con  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$ . Demostrar que  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$  es una función de distribución uniformemente continua.

**Ejercicio 28** Sea  $F$  una función de distribución en  $\mathbb{R}$ . Demostrar que el conjunto de puntos de discontinuidad de  $F$  es numerable y el de continuidad es denso.

**Ejercicio 29** Sea  $F$  una función de distribución continua en  $\mathbb{R}$  y  $\mu$  su medida de Lebesgue-Stieltjes asociada. Demostrar que  $\mu(A) = 0$  para  $A$  numerable y que hay conjuntos medibles  $A$  que no contienen ningún abierto y satisfacen  $\mu(A) > 0$ .

**Ejercicio 30** Sea  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de distribución continua y  $\mu$  la medida de Lebesgue-Stieltjes que define. ¿Es  $\mu(a, b) > 0$  para todo  $a < b \in \mathbb{R}$ ?; ¿es  $\mu\{x\} = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ?

**Ejercicio 31** Sea  $\mu$  una medida finita en los acotados de  $\mathbb{R}$ , tal que  $\mu(0, 1] = 1$  y  $\mu(tA) = |t|\mu(A)$ , para cualesquiera  $t \in \mathbb{R}$  y  $A$  boreliano. Demostrar que  $\mu = m$ .

**Ejercicio 32** Sea  $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ , tal que  $0 < m(E) < \infty$ . Demostrar que para cada  $0 < r < 1$ , existe un intervalo abierto  $(a, b)$ , tal que

$$r \cdot m(a, b) < m[(a, b) \cap E].$$

**Ejercicio 33** En el espacio  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  consideramos la probabilidad  $P(n) = 1/2^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) y definimos la función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{K} = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ ,  $f(n) = n \bmod (k)$  y la probabilidad inducida en  $\mathcal{K}$ ,  $\mu(B) = P(f^{-1}(B))$ . Calcular  $\mu(m)$ , para cada  $m \in \mathcal{K}$ .

**Ejercicio 34** Sea  $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots\}$  y para cada  $n \geq 1$  sea  $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Demostrar que las funciones en  $[0, 1]$ ,  $f_n = I_{A_n}$ , son Riemann integrables, que existe  $f = \lim f_n$  y justificar si es o no Riemann integrable  $f$  y si son Lebesgue integrables las  $f_n$  y la  $f$ .

**Ejercicio 35** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue integrable y  $F(x) = \int_{[a, x]} f \, dm$ . Demostrar que si  $f$  es continua en  $x \in (a, b)$ , entonces  $F$  es diferenciable en  $x$  y  $F'(x) = f(x)$ .

**Ejercicio 36** Demostrar que  $F(x, y) = x$ , si  $x \leq y$  y  $F(x, y) = y$  si  $y \leq x$  es una función de distribución en  $\mathbb{R}^2$  ¿donde está concentrada toda la masa de su medida de L-S asociada, y de qué forma?

**Ejercicio 37** Demostrar que si  $F$  y  $G$  son funciones de distribución en  $\mathbb{R}^n$ , con medidas de L-S asociadas  $\mu_F$  y  $\mu_G$ , entonces  $F + G$  también lo es y  $\mu_{F+G} = \mu_F + \mu_G$ .

**Ejercicio 38** Dar una función de distribución asociada a la medida en  $\mathbb{R}^2$  cuya masa está concentrada en la recta  $x + y = 0$  uniformemente, es decir que cada segmento de esa recta mide su longitud.

**Ejercicio 39** Dar una función de distribución asociada a la medida en  $\mathbb{R}^2$  cuya masa está concentrada en la recta  $x = 0$  uniformemente, es decir que cada segmento de esa recta mide su longitud.

**Ejercicio 40** Sea  $V \subset \mathbb{R}$  abierto no vacío,  $K$  compacto y  $m$  la medida de Lebesgue. ¿Es cierto que  $m(V) > 0$ ?, ¿y que  $m(K) < \infty$ ?, ¿y para una medida  $\mu$  de Lebesgue–Stieltjes?

**Ejercicio 41** Demostrar que en  $\mathbb{R}^n$  la dimensión vectorial y de Hausdorff, de sus subespacios, coinciden y calcular la dimensión de Hausdorff de  $H = \{x : |h(x)| = 1\}$ , para  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lineal.

**Ejercicio 42** Consideremos en un espacio normado  $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$  la métrica inducida  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Demostrar que en cada plano  $\pi$  todos los triángulos  $T$ , con una base fija y la misma altura (distancia del tercer vértice a la base) tienen la misma medida de Hausdorff  $H_2(T)$ .

**Ejercicio 43** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida y  $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_{A_n}$ , con  $a_n \in (0, \infty)$  y  $A_n \in \mathcal{A}$  disjuntos, calcular  $\int f^{-1} \, d\mu$ .

**Ejercicio 44** (a) Sean  $f, g$  medibles, demostrar que  $\{f = g\}$  es medible.

(b) Sea  $f$  medible y  $f = g$  c.s. ¿es necesariamente  $g$  medible?, ¿y si el espacio es completo?

(c) Sean  $f \leq g \leq h$ , con  $f$  y  $h$  medibles tales que  $f = h$  c.s. ¿es necesariamente  $g$  medible?, ¿y si el espacio es completo?

**Ejercicio 45** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monótona creciente, ¿es  $f$  Borel medible?

**Ejercicio 46** Sean  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monótonas crecientes, ¿es  $f - g$  Borel medible?

**Ejercicio 47** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  medible y  $a \in \mathbb{R}$ . Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dm = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) dm,$$

en el sentido de que si una integral existe también la otra y coinciden.

**Ejercicio 48** Sea  $\mu$  una probabilidad en los borelianos de  $[0, \infty)$ , y  $F(x) = \mu[0, x]$  su función de distribución, tal que  $\mu\{0\} < 1$  y sea para  $f(x) = x$  y  $x \geq 0$

$$G(x) = \frac{\int_{[0, x]} f d\mu}{\int_{[0, \infty)} f d\mu}.$$

Demostrar que para todo  $x \geq 0$ ,  $G(x) \leq F(x)$ .

**Ejercicio 49** Sea  $\lambda$  una carga en un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , tal que si  $\mu(A) < \infty$  entonces  $|\lambda(A)| < \infty$ . Demostrar que  $\lambda \ll \mu$  sii para cada  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $\mu(E) < \delta$  entonces  $|\lambda(E)| < \epsilon$ .

**Ejercicio 50** Sea  $\lambda$  una medida finita en un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  y

$$f: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty], \quad f(x) = \sup\{\lambda(E) : \mu(E) \leq x\},$$

demostrar que  $f$  es monótona creciente y que si  $f(0) = 0$  entonces  $f$  es continua en 0.

**Ejercicio 51** Sean  $f_n$   $\mu$ -integrables y  $f$  medible tal que  $\lim \int |f_n - f| = 0$ . Demostrar que  $f$  es integrable y que si

$$\mu(A_n \Delta A) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{A_n} f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu.$$

**Ejercicio 52** Sean  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  y  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita tales que el espacio de medida producto es completo. Demostrar que si existe  $B \in \mathcal{A}_2$  no vacío con  $\mu_2(B) = 0$ , entonces  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$ .

**Ejercicio 53** Demostrar que si dos medidas complejas  $\mu, \lambda$  coinciden en un álgebra  $\mathcal{A}_0$ , entonces coinciden en  $\sigma(\mathcal{A}_0)$ .

**Ejercicio 54** Demostrar que dadas dos medidas complejas  $\mu_1$  en  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$  y  $\mu_2$  en  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ , existe una única medida compleja en el espacio producto  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ , tal que para cada producto de medibles  $A \times B$

$$\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

y que para cada medible  $E$  del producto satisface

$$\mu_1 \times \mu_2(E) = \int \mu_1(E^y) d\mu_2 = \int \mu_2(E_x) d\mu_1.$$

**Ejercicio 55** Considérese el toro  $T$  de revolución obtenido al hacer girar una circunferencia de radio  $r$  alrededor de una recta de su plano, de la que su centro dista  $R$ . Calcular su volumen y su área.

**Ejercicio 56** Calcular la longitud del trozo de una hélice que con pendiente 1 está sobre el cilindro  $x^2 + y^2 = r^2$  y cuya proyección da una vuelta.

**Ejercicio 57** Demostrar que la derivada respecto del radio, del volumen  $n$ -dimensional de la bola de  $\mathbb{R}^n$  de radio  $r$  es el área  $n - 1$ -dimensional de su esfera.

**Ejercicio 58** Sea  $f > 0$  integrable en  $\Omega$ . Demostrar que  $\int f^{1/n} d\mu \rightarrow \mu(\Omega)$ .

**Ejercicio 59** Demostrar que si  $f, g > 0$  son integrables en un espacio de medida  $\mu$  finita

$$\lim \frac{\int f^{1/n} d\mu}{\int g^{1/n} d\mu} = 1.$$

**Ejercicio 60** Demostrar que las medidas  $\mu\{n\} = a_n$ ,  $\lambda\{n\} = b_n$  definidas en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , con  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  y  $0 = \inf a_n < \inf b_n$ , son  $\sigma$ -finitas, que  $\mu \ll \lambda$  y calcular  $d\mu/d\lambda$ .

**Ejercicio 61** (a) Demostrar que si  $f_n \rightarrow f$  en  $L_p$ , entonces  $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$ .

(b) Demostrar que si  $f_n \rightarrow f$  en  $L_p$  y  $g_n \rightarrow g$  en  $L_q$ , con  $p$  y  $q$  conjugados, entonces  $f_n g_n \rightarrow f g$  en  $L_1$ .

**Ejercicio 62** Demostrar que para  $F: S_1 \setminus \{p\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección estereográfica desde  $p$  y para la medida de Hausdorff  $H_1$ , la medida imagen  $\mu = F_* H_1$  es de Lebesgue-Stieltjes ( $\mu(B) = H_1[F^{-1}(B)]$ ). Dar su función de distribución.

**Ejercicio 63** Sea  $\mathcal{X}$  HLC (Hausdorff localmente compacto) y  $\mu$  una medida cuasi-regular en  $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ . Demostrar que la unión de todos los abiertos de medida cero por  $\mu$ , es un abierto  $A$  con  $\mu(A) = 0$ . Su complementario se llama soporte de  $\mu$ ,  $A^c = \text{sop}(\mu)$ .

**Ejercicio 64** Sea  $\mathcal{X}$  HLC y  $\mu$  una medida cuasi-regular en  $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ . Demostrar:

(a) Si  $f: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$  es continua entonces  $\int f d\mu = 0$  sii  $f = 0$  en el  $\text{sop}(\mu)$ .

(b)  $x \in \text{sop}(\mu)$  sii para toda  $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$  no negativa, tal que  $f(x) > 0$ , se tiene  $\int f d\mu > 0$ .

**Ejercicio 65** Demostrar que si una curva plana cerrada gira alrededor de un eje del plano que no la corta, el volumen que genera es igual al área limitada por ella multiplicada por la distancia que recorre el centro de masa del área. (Pappus)

**Ejercicio 66** Demostrar que si una curva plana, cerrada ó no, gira alrededor de un eje del plano que no la corta, el área de la superficie que genera es igual a la longitud de la curva multiplicada por la distancia que recorre el centro de masa de la curva. (Pappus)

**Ejercicio 67** Sea  $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Demostrar que el área de  $F(U)$  es<sup>2</sup>

$$\int_U \sqrt{(x_u y_v - x_v y_u)^2 + (x_u z_v - x_v z_u)^2 + (y_u z_v - y_v z_u)^2} du dv.$$

**Ejercicio 68** Calcular

$$\int_0^4 \left( \frac{1}{2} - \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} \right)^2 dm.$$

**Ejercicio 69** Consideremos para  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida, el espacio métrico  $(\mathcal{X}, \rho)$  del ejercicio (13). Demostrar que para una medida compleja  $\lambda$

$$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ se extiende a } \mathcal{X}.$$

en cuyo caso  $\lambda$  es continua.

**Ejercicio 70** Sean  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  integrables.

(a) Demostrar que  $|f^2 + g^2|^{1/2}$  es integrable.

(b) Demostrar que  $h = |f|^r |g|^s$  es integrable para cualesquiera  $r, s > 0$  tales que  $r + s = 1$  y que

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1^r \|g\|_1^s.$$

**Ejercicio 71** Demostrar que en un espacio de medida finita,  $L_r \subset L_s$ , para todo  $0 < s < r < \infty$  y que si  $f_n, f \in L_r$ ,

$$\|f_n - f\|_r \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_s \rightarrow 0.$$

---

<sup>2</sup>En términos vectoriales la integral es

$$\int_U |D_1 \times D_2| \quad \text{para} \quad \begin{aligned} D_1 &= F_* \partial_u = x_u \partial_x + y_u \partial_y + z_u \partial_z. \\ D_2 &= F_* \partial_v = x_v \partial_x + y_v \partial_y + z_v \partial_z. \end{aligned}$$

**Ejercicio 72** Sea  $\mathcal{G}$  un grupo aditivo y  $(\mathcal{G}, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida invariante por traslaciones por la derecha, es decir tal que  $\mu(A + a) = \mu(A)$  para cada medible  $A$  y cada  $a \in \mathcal{G}$ . Demostrar que para cada  $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  medible y  $a \in \mathcal{G}$ .

$$\int_{\mathcal{G}} f(x) d\mu = \int_{\mathcal{G}} f(x - a) d\mu,$$

en el sentido de que si una integral existe también la otra y coinciden.

**Ejercicio 73** Dado un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{A})$  y dos medidas en él  $\mu \leq \nu$ . Demostrar:

- a) Hay una medida  $\lambda$  tal que  $\mu + \lambda = \nu$ .
- b) Si  $\mu$  es  $\sigma$ -finita,  $\lambda$  es única.

**Ejercicio 74** Demostrar que para  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida, la relación  $A \simeq B$  si y sólo si  $\mu(A \Delta B) = 0$ , es de equivalencia, que la aplicación

$$\rho(A, B) = \mu(A \Delta B),$$

es una métrica en el conjunto cociente  $\mathcal{X} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \infty\} / \simeq$  y que el espacio métrico  $(\mathcal{X}, \rho)$  es completo.

**Ejercicio 75** Demostrar que el espacio métrico completo del ejercicio anterior, en el caso particular de  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A}$  los borelianos del intervalo y  $\mu$  la medida de Lebesgue, no es compacto.

**Ejercicio 76** Sean  $f, f_n, g, g_n$  integrables, tales que  $|f_n| \leq g_n$ ,  $f_n \rightarrow f$  c.s.,  $g_n \rightarrow g$  c.s. y  $\int g_n \rightarrow \int g$ . Demostrar que  $\int f_n \rightarrow \int f$ .

**Ejercicio 77** Demostrar que si  $f, f_n \in L_p$  ( $p < \infty$ ) y  $f_n \rightarrow f$  c.s. entonces  $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$  sii  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ .

**Ejercicio 78** Para cada  $1 \leq p \leq \infty$ , ¿bajo que condiciones sobre  $f$  y  $g$  se da la igualdad en la desigualdad de Holder?, ¿y en la de Minkowsky?

**Ejercicio 79** Demostrar que si  $\mu(\Omega) = 1$  y  $f \geq 0$  es medible, entonces para  $k = \int f d\mu$ , se verifica

$$\sqrt{1 + k^2} \leq \int \sqrt{1 + f^2} d\mu \leq 1 + k.$$

Dar una interpretación geométrica de las desigualdades en el caso en que  $f = g'$  y sea continua,  $\mu = m$  y  $\Omega = [0, 1]$ .

**Ejercicio 80** Demostrar que si  $1 \leq r < p < s < \infty$ , entonces: a)  $L_r \cap L_s$  es un espacio de Banach con la norma  $\|f\| = \|f\|_r + \|f\|_s$  y la inclusión  $L_r \cap L_s \rightarrow L_p$  es continua. b) Que  $L_r + L_s$  es un espacio de Banach con la norma  $\|f\| = \inf\{\|g\|_r + \|h\|_s : f = g + h\}$  y la inclusión  $L_p \rightarrow L_r + L_s$  es continua.



**Ejercicio 81** i) Demostrar que para  $x \geq 0$ ,  $\log x \leq x - 1$  y  $x \log x \geq x - 1$ .

ii) Demostrar que si  $\mu(\Omega) = 1$  y  $0 < r < s < \infty$ , entonces para  $f \in L_s$ ,  $\|f\|_r \leq \|f\|_s$  y que para  $\exp\{-\infty\} = 0$  y  $\log 0 = -\infty$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|f\|_p = \exp\left\{\int \log |f| d\mu\right\}.$$

**Ejercicio 82** Demostrar que si  $\mu(\Omega) < \infty$  y  $f \in L_\infty$ ,  $\|f\|_\infty \neq 0$ , entonces para  $a_n = \int |f|^n d\mu$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \|f\|_\infty.$$

**Ejercicio 83** Demostrar la desigualdad de Heisenberg para  $f = f_1 + if_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $f_i \in C^\infty(\mathbb{R})$  y  $f \in L_2$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq 2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Ejercicio 84** Demostrar que si  $f \in L_1(\mathbb{R})$  y  $g \in L_p(\mathbb{R})$ , entonces  $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$  está en  $L_p$  y

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

**Ejercicio 85** Demostrar que en un espacio de medida  $\sigma$ -finito  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , si  $fg \in L_1$  para toda  $f \in L_p$ , entonces  $g \in L_q$ , para  $q$  el conjugado de  $p$ .