

CONTROL 2

Prof. Jaime San Martín

Aux. Arturo Prat

Pregunta 1 : Sea (X, τ, μ) un espacio de medida finita completo. Consideremos además el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$, donde λ es la medida de Lebesgue. Para $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ definimos los conjuntos

$$G(f) := \{(x, t) : 0 \leq t < f(x)\}$$

y

$$H(f) := \{(x, t) : 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

- (i) Pruebe que si f es medible entonces G es medible en el producto $\tau \otimes \mathcal{L}$.
- (ii) Pruebe que $\int_X f(x) d\mu(x) = \mu \otimes \lambda(G)$. Demuestre además que $\mu \otimes \lambda(H - G) = 0$ y deduzca que la curva $\{(x, t) : t = f(x)\}$ tiene medida cero en el producto.

Pregunta 2 : Sea (X, τ, μ) un espacio de medida finita completo, con $\mu(X) = 1$.

- 2 (i) Considere la σ -álgebra: $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$, donde $A \in \tau$ verifica $0 < \mu(A) < 1$. Si f es una función τ -medible y positiva calcule la única función $g \geq 0$ que es \mathcal{F} -medible y que satisface

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \int_B f d\mu = \int_B g d\mu.$$

De un ejemplo donde claramente f y g son distintas.

- 1 (ii) Generalice al caso en que \mathcal{F} es generada por una partición finita $(A_i)_{i=1, \dots, n} \subset \tau$ donde $\forall i \mu(A_i) > 0$. Para ello estudie las funciones \mathcal{F} -medibles y en particular pruebe que todo conjunto $B \in \mathcal{F}$ es una reunión finita de una subcolección de $(A_i)_{i=1, \dots, n}$. Debe probar entonces que para f función τ -medible y positiva existe una única función $g \geq 0$ \mathcal{F} -medible tal que

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \int_B f d\mu = \int_B g d\mu.$$

Se pide además calcular g .

Ind. Reduzca a probar la propiedad para los $(A_i)_{i=1, \dots, n}$.

- 2 (iii) Nuestro propósito es ahora generalizar lo anterior para una sub σ -álgebra $\mathcal{F} \subset \tau$ arbitraria. Para ello considere $\nu(A) = \int_A f d\mu$ y pruebe que ν es una medida σ -finita

absolutamente continua con respecto a μ . Concluya que existe una única (μ -c.t.p.) función $g \geq 0$ \mathcal{F} -medible, tal que

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \int_B f d\mu = \int_B g d\mu.$$

¿Qué sucede si f es \mathcal{F} -medible? ¿Cómo extendería este resultado para f integrable? Si denotamos por $g = P(f)$ pruebe que P es una transformación lineal de $L^1(\tau)$ en $L^1(\mathcal{F})$, que satisface:

- P es monótona, es decir $h \leq f$ entonces $P(h) \leq P(f)$. Concluya que $|P(f)| \leq P(|f|)$.
- P es continua y más aún $\|P(f)\| \leq \|f\|$.
- $P(1) = 1$
- $P(P(f)) = P(f)$.

Como aplicación de lo anterior considere $([0,1]^2, \mathcal{L}^2, dx \otimes dy)$ donde $dx \otimes dy$ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 . Considere la colección de conjuntos

$$\mathcal{F} = \{[0,1] \times A \subseteq [0,1]^2 : A \in \mathcal{L}\}.$$

Pruebe que \mathcal{F} es una sub σ -álgebra de \mathcal{L}^2 , y calcule cuanto vale $P(f)$ donde $f(x,y) = \sin(xy)$.

Ind. Pruebe que g es \mathcal{F} -medible ssi existe una función h que es \mathcal{L} -medible tal que $g(x,y) = h(y)$ $dx \otimes dy$ -c.t.p.