

Control 2 Análisis II

Agosto 1997

Profesor: Alejandro Maass

Auxiliar: Joaquín Fontbona

Auxiliar: Fernando Schwartz

Pregunta 1.

Considere el espacio de Lebesgue $(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(\mathbb{R}^+), \lambda)$ y $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función Lebesgue medible tal que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{g(x)}{\sqrt{x}} d\lambda(x) < \infty.$$

Se define sobre $L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(\mathbb{R}^+), \lambda)$ el operador T tal que $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^+} g(xy)f(y)d\lambda(y)$.

(1) Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(\mathbb{R}^+), \lambda)$. Probar que $Tf \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(\mathbb{R}^+), \lambda)$.

(2) Probar que

$$\|T\| = \sup\{\|Tf\|_2 / \|f\|_2 \mid f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(\mathbb{R}^+), \lambda), \|f\|_2 \leq 1\} = \int_{\mathbb{R}^+} g(x)x^{-1/2}d\lambda(x).$$

Pregunta 2.

Sean (X, \mathcal{B}, μ) y (Y, \mathcal{F}, ν) espacios de probabilidad, y $\pi : X \rightarrow Y$ una función $\mathcal{B} - \mathcal{F}$ medible tal que $\pi\mu = \nu$ (i.e. $\forall F \in \mathcal{F}, \pi\mu(F) = \mu(\pi^{-1}(F)) = \nu(F)$). Sea $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

(1) Probar que existe $g \in L^1(Y, \mathcal{F}, \nu)$, que es única ν -c.s., tal que $\forall F \in \mathcal{F}$,

$$\int_{\pi^{-1}(F)} f d\mu = \int_F g d\nu.$$

(2) Denotamos $\mathbb{E}(f/Y)$ a la función g del punto (1).

(1) (i) Si $h \in L^1(Y, \mathcal{F}, \nu)$, probar que $h \circ \pi \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ y $\mathbb{E}(h \circ \pi/Y) = h$ ν -c.s.

(2) (ii) Si $h \in L^\infty(Y, \mathcal{F}, \nu)$, probar que $\mathbb{E}(h \circ \pi f/Y) = h \mathbb{E}(f/Y)$ ν -c.s.

Pregunta 3.

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $E \in \mathcal{B}$ un conjunto de medida σ -finita. Sean $f_n : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, y $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ funciones medibles μ -c.s. finitas. Si f_n converge a f μ -c.s. en E probar que existen conjuntos medibles E_n , $n \in \mathbb{N}$, tales que $\mu(E \setminus \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = 0$ y la sucesión de funciones converge uniformemente a f en cada E_n .

Pregunta 4.

Sean $(\Omega_1, \mathcal{B}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ espacios medibles y $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$ medidas de probabilidad sobre \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 respectivamente.

(1) Suponga que $\nu_1 \ll \mu_1$ y $\nu_2 \ll \mu_2$. Probar que $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$ y que

$$\frac{d\nu_1 \otimes \nu_2}{d\mu_1 \otimes \mu_2} = \frac{d\nu_1}{d\mu_1} \frac{d\nu_2}{d\mu_2}, \quad \mu_1 \otimes \mu_2 - c.s.$$

(2) Probar que si $\nu_1 \perp \mu_1$ o $\nu_2 \perp \mu_2$ entonces $\nu_1 \otimes \nu_2 \perp \mu_1 \otimes \mu_2$.

(3) Probar que $\nu_1 \otimes \nu_2 = (\nu_1 \otimes \nu_2)_a + (\nu_1 \otimes \nu_2)_s$, donde $(\nu_1 \otimes \nu_2)_a \ll \mu_1 \otimes \mu_2$ y $(\nu_1 \otimes \nu_2)_s \perp \mu_1 \otimes \mu_2$. Además, probar que $(\nu_1 \otimes \nu_2)_a = (\nu_1)_a \otimes (\nu_2)_a$ y $(\nu_1 \otimes \nu_2)_s = (\nu_1)_s \otimes (\nu_2)_s$.

Tiempo: 4 horas