

Corrigé de l'épreuve d'"Intégration et Analyse Hilbertienne"

Exercice 1. – 1) Posons $g(t, x) = \frac{f(t)}{1+|xt|}$. Comme $\forall x, \forall t, |g(t, x)| \leq |f(t)|$ et que $f \in L^1$, on vérifie que F est bien définie et bornée par $|F(x)| \leq \|f\|_1$, pour tout x . Comme $g(t, x) = g(t, -x)$, F est paire.
2) Pour vérifier la continuité, on peut appliquer le corollaire 2.3.10 du poly, car i) ii) et iii) sont vérifiées pour la fonction g (la domination résulte de l'inégalité $|g(t, x)| \leq |f(t)|$).

Lorsque $|x| \rightarrow \infty$ on a pour tout $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $g(t, x) \rightarrow 0$ (i.e la convergence simple vers zéro a lieu, sauf en $t = 0$ qui constitue un ensemble de mesure nulle). Par ailleurs, $\forall x, \forall t, |g(t, x)| \leq |f(t)|$, et $f \in L^1$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que $F(x)$ tend vers zéro lorsque $|x| \rightarrow \infty$.

3) Notons F_d la restriction de F à l'intervalle fermé $[0, +\infty[$. Pour tout $t \in [1, -1] \setminus \{0\}$ l'application $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$. De plus, pour $x \in [0, +\infty[$ on a $|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)| = \frac{|t|}{(1+|xt|)^2} |f(t)| \leq |t||f(t)|$, qui est une fonction de t intégrable sur $[-1, +1]$. On peut alors appliquer le théorème 2.3.11 de dérivation sous le signe somme pour voir que F_d est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Par la formule (2.11) du polycopié (dérivation sous le signe somme), on trouve, pour $x \in [0, +\infty[$, et en considérant séparément chacune des intégrales sur les intervalles $[-1, 0]$ et $[0, 1]$

$$F'_d(x) = - \int_{-1}^{+1} \frac{|t|}{(1+|xt|)^2} f(t) dt$$

En raisonnant comme pour la question 2) on vérifie que l'on peut appliquer le corollaire 2.3.10 du polycopié, de sorte que F'_d est continue sur $[0, +\infty[$. La discussion précédente entraîne en particulier que F est dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, de dérivée $F' = F'_d$ sur $]0, +\infty[$ et que F possède une dérivée **à droite** en zéro $F'_+(0) = F'_d(0) = - \int_{-1}^{+1} |t|f(t)dt$.

4) Notons F_g la restriction de F à l'intervalle $] -\infty, 0]$. Par parité on a $F_g(x) = F_d(-x)$ de sorte que F_g est de classe C^1 sur $] -\infty, 0]$, et on a pour $x \in] -\infty, 0]$, $F'_g(x) = -F'_d(-x) = \int_{-1}^{+1} \frac{|t|}{(1+|xt|)^2} f(t)dt$. On en déduit comme à la question 3) que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et possède une dérivée **à gauche** en zéro $F'_-(0) = F'_g(0) = \int_{-1}^{+1} |t|f(t)dt$. On a donc montré que F possède en zéro des dérivées à gauche et à droite. Pour que F soit dérivable en zéro il faut et il suffit que celles-ci coïncident, i.e $F'_g(0) = F'_d(0)$ (cette valeur commune est alors celle de la dérivée en zéro). En particulier, si f est positive l'intégrale $\int_{-1}^{+1} |t|f(t)dt$ est non nulle, et les dérivées à gauche et à droite en zéro diffèrent, de sorte que F n'est pas dérivable en zéro.

5) Au vu des questions 3) et 4), nous savons que F est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et que pour que F soit dérivable en zéro il faut et il suffit que les dérivées à gauche et à droite en zéro coïncident, i.e $F'_g(0) = F'_d(0)$. Cette dernière condition s'écrit $\int_{-1}^{+1} |t|f(t)dt = 0$.

6) En appliquant le théorème 2.3.11 à F' et en raisonnant comme à la question 3) on vérifie que la restriction de F' à chacun des intervalles $[0, \infty]$ et $[0, \infty[$ est dérivable, de dérivée continue. Pour montrer que F'' existe et est continue sur \mathbb{R} tout entier, il suffit alors de vérifier que $F''_g(0)$ et $F''_d(0)$ coïncident. Ceci est une conséquence immédiate du fait que la dérivée seconde de F est paire sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, résultat que l'on déduit de nouveau de la parité de F elle-même.

7) L'application T est clairement linéaire et l'inégalité $\forall x, \forall t, |g(t, x)| \leq |f(t)|$, entraîne $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$, de sorte que T est continue de L^1 vers C_b^0 muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et de plus on obtient ainsi $\|T\| \leq 1$. Montrons qu'en fait $\|T\| = 1$. Pour ce faire, on remarque que si f est positive, F atteint son

maximum pour $x = 0$, et ainsi $\|T(f)\|_\infty = F(0) = \int_{-1}^{+1} f(t)dt = \|f\|_1$. Il suffit alors de choisir une fonction positive dont la norme L^1 vaut 1, par exemple $f = \frac{1}{2}$ pour conclure.

Exercice 2. 1) Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $B_{n,t} = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > t\}$. Il s'agit de montrer que $\mu(B_{n,t})$ tends vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Comme la fonction $|f_n - f|$ est mesurable de X vers \mathbb{R} , l'ensemble $B_{n,t}$ qui est l'image réciproque du borélien $]t, +\infty[$ appartient à la tribu \mathcal{A} . Par ailleurs, $A_{n,t} = \cup_{p \geq n} B_{p,t}$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n,t}$ qui est une réunion dénombrable d'ensembles de \mathcal{A} appartient aussi à la tribu \mathcal{A} . La famille $\{A_{n,t}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille décroissante d'ensembles, dont l'intersection est de mesure nulle, car f_n converge vers f presque partout. Comme $\mu(X)$ est fini, il en est de même pour $\mu(A_{n,t})$. On peut donc appliquer le théorème 1.3.15 iv) du polycopié qui affirme que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{n,t}) = \inf_n \mu(A_{n,t}) = \mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_{n,t}) = 0.$$

Comme $B_{n,t} \subset A_{n,t}$, on en déduit $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_{n,t}) = 0$.

REMARQUE. On peut aussi démontrer la propriété en appliquant le théorème de convergence dominée à la fonction caractéristique de l'ensemble $B_{n,t}$.

2) On peut prendre pour fonction f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = 0$ pour $x < n$ et $f_n(x) = x - n$ pour $x \geq n$. On vérifie que f_n converge simplement vers 0, et que pour $t \geq 0$, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\} =]n + t, \infty[$, qui est de mesure infinie.

COMMENTAIRE : cette question montre que l'hypothèse " $\mu(X)$ est fini" est essentielle pour obtenir la conclusion de la première question.

3) On applique le lemme de Fatou à la suite de fonctions positives mesurables $g_n \equiv f_n^2$. Il vient donc $\int_X \liminf f_n^2 \leq \liminf \int_X f_n^2 \leq \limsup \int_X f_n^2 \leq M$. Comme f_n converge vers f presque partout, on a $\liminf f_n^2 = f^2$ presque partout, ce qui entraîne le résultat.

4) On écrit $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - f(x)| \times 1$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\int_A |f_n - f| d\mu \leq \left(\int_A |f_n - f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_A d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \|f_n - f\|_2 \sqrt{\mu(A)}.$$

Par ailleurs comme $\|\cdot\|_2$ est une norme, on a

$$\|f_n - f\|_2 \leq \|f_n\|_2 + \|f\|_2 \leq 2M,$$

où on a utilisé la question 3) pour la dernière inégalité. On conclut en combinant les deux inégalités.

5) On se donne $t > 0$ et on écrit

$$\|f_n - f\|_1 = \int_X |f_n - f| d\mu = \int_{B_{n,t}} |f_n - f| d\mu + \int_{X \setminus B_{n,t}} |f_n - f| d\mu \leq \int_{B_{n,t}} |f_n - f| d\mu + t\mu(X).$$

En utilisant la question 4) pour $A \equiv B_{n,t}$ on obtient donc l'inégalité

$$\|f_n - f\|_1 \leq 2M \sqrt{\mu(B_{n,t})} + t\mu(X). \quad (1)$$

Introduisons maintenant $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $\|f_n - f\|_1 \leq \varepsilon$. Choisissons d'abord $t = \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}$. Il résulte de la première question que, pour t fixé, $B_{n,t}$ tend vers zéro, de sorte qu'il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a $\sqrt{\mu(B_{n,t})} \leq \frac{\varepsilon}{4M}$. On vérifie alors grâce à (1) que l'on obtient bien l'inégalité désirée.

Exercice 3. 1) Comme $\varphi_n = \mathbf{1}_{D^n}$, on a $\int_\Omega \varphi_n dP = P(D^n)$. Comme $P(D^n) = \frac{1}{2}$, on obtient l'égalité désirée. Par ailleurs $\varphi_n^2 = \varphi_n$, d'où $\|\varphi_n\|_2 = \sqrt{\int_\Omega \varphi_n^2 dP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- 2) On a $\varphi_n \varphi_m = \mathbf{1}_{D^n \cap D^m}$, de sorte que $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = P(D^n \cap D^m)$. Or $D^n \cap D^m = \{\omega \mid \omega^n = 1 \text{ et } \omega^m = 1\}$, et on vérifie alors (Cf feuille d'exercices numéro 2, exercice 1) que $P(D^n \cap D^m) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.
- 3) Notons d'abord que $\|\mathbf{1}\|_2 = \|\varphi_0\|_2 = 1$ et que $\langle \mathbf{1}, \varphi_n \rangle = \int_{\Omega} \varphi_n dP = \frac{1}{2}$. Il vient alors par développement pour tout $n \geq 1$ $\|\psi_n\|_2^2 = 4\|\varphi_n\|_2^2 + \|\mathbf{1}\|_2^2 - 4\langle \mathbf{1}, \varphi_n \rangle = 1$, et pour $n \neq m$, $\langle \psi_n, \psi_m \rangle = 4\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle + \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle - 2\langle \mathbf{1}, \varphi_n \rangle - 2\langle \mathbf{1}, \varphi_m \rangle = 0$, ce qui donne le résultat.
- 4) La fonction θ_n ne prend pour valeurs que 0 ou 1, et $\theta_n(\omega) = 0$ ssi $\omega_p = 0$, pour tout $1 \leq p \leq n$. On a donc $1 - \theta_n = \mathbf{1}_{C(1, \dots, 1)}$, où on a répété le chiffre 1 n fois, et ainsi $\int_{\Omega} (1 - \theta_n) dP = P(C(1, \dots, 1)) = \frac{1}{2^n}$, et donc $\int_{\Omega} \theta_n dP = 1 - \frac{1}{2^n}$. Par ailleurs $\|(1 - \theta_n)\|_2^2 = \int_{\Omega} (1 - \theta_n)^2 dP = \int_{\Omega} (1 - \theta_n) dP = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, donc θ_n converge vers $\mathbf{1}$ dans L^2 .
- REMARQUE. La suite $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée par $\mathbf{1}$: elle admet donc une limite pour tout point de Ω . Au vu de la définition de θ_n , cette limite vaut 1, sauf pour $\omega = 0$, pour lequel elle vaut zéro : la limite vaut donc $\mathbf{1}$ pour presque tout ω . On peut donc également invoquer le théorème de convergence monotone pour aboutir au résultat.
- 5) Pour $1 \leq i \leq n$, on a $\theta_n(\omega) \varphi_i(\omega) = \varphi_i(\omega)$ pour tout ω (pour le voir distinguer les cas $\varphi_i(\omega) = 1$ et $\varphi_i(\omega) = 0$). Il en résulte que $\langle \theta_n, \varphi_i \rangle = \int_{\Omega} \theta_n \varphi_i dP = \int_{\Omega} \varphi_i dP = \frac{1}{2}$. Pour $i > n$, on vérifie que $\theta_n(\omega) \varphi_i(\omega) = 1$ si et seulement si $\omega_i = 1$ et si il existe un entier $1 \leq j \leq n$ tel que $\omega_j = 1$, c'est à dire ssi $\omega \in A \equiv \cup \{C_s, s \in \{0, 1\}^i \mid s_i = 1 \text{ et } \exists 1 \leq j \leq n \text{ tel que } s_j = 1\}$. Le nombre d'ensembles C_s distincts composant la réunion A est $(2^n - 1)(2^{i-n-1})$. Comme ils sont disjoints et que leur probabilité vaut 2^{-i} , on en déduit $P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$. Par ailleurs, on a $\langle \theta_n, \varphi_i \rangle = P(A)$, ce qui donne le résultat.
- 6) La projection $p(\theta_n)$ sur la base hilbertienne $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de F s'écrit d'après le cours

$$p(\theta_n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\theta_n) \psi_i = \sum_{i=0}^{\infty} \langle \psi_i, \theta_n \rangle \psi_i$$

- On calcule explicitement chacun des coefficients $c_i(\theta_n) \equiv \langle \psi_i, \theta_n \rangle$: d'abord $\langle \psi_0, \theta_n \rangle = \langle \mathbf{1}, \theta_n \rangle = 1 - 2^{-n}$ grâce à la question 4), puis pour $1 \leq i \leq n$, $\langle \psi_i, \theta_n \rangle = 2\langle \varphi_i, \theta_n \rangle - \langle \mathbf{1}, \theta_n \rangle = 2^{-n}$, et enfin pour $i > n$, $\langle \psi_i, \theta_n \rangle = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}) - (1 - 2^{-n}) = 0$.
- 7) D'après le théorème de projection, on a $\theta_n \in F$ ssi $\theta_n = p(\theta_n)$. Par ailleurs $\|\theta_n\|_2^2 = \|p(\theta_n)\|_2^2 + \|\theta_n - p(\theta_n)\|_2^2$, et on en déduit que $\theta_n \in F$ ssi $\|\theta_n\|_2 = \|p(\theta_n)\|_2$. Comme $\theta_n^2 = \theta_n$, on a d'après la question 4) $\|\theta_n\|_2^2 = 1 - 2^{-n}$. Pour $p(\theta_n)$ la relation de Bessel-Parseval nous donne

$$\|p(\theta_n)\|_2^2 = \sum_{i=0}^n c_i^2(\theta_n) = \frac{1}{4^n} [(2^n - 1)^2 + n].$$

L'égalité $\|\theta_n\|_2 = \|p(\theta_n)\|_2$ est donc équivalente à $2^n = n + 1$, qui n'est vérifiée que pour $n = 1$.