

## MEDIDA E INTEGRACIÓN

Profesor Cátedra : Jaime San Martín  
Profesor Auxiliar : Mauricio Duarte

TRABAJO DIRIGIDO  
9 DE MAYO DE 2007

**P1.** Sea  $(X, \tau, \mu)$  un espacio de medida finita completo, con  $\mu(X) = 1$ .

- (a) Considere la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ , donde  $A \in \tau$  verifica  $0 < \mu(A) < 1$ . Si  $f$  es una función  $\tau$ -medible y positiva calcule la única función  $g \geq 0$  que es  $\mathcal{F}$ -medible y que satisface

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \int_B f \, d\mu = \int_B g \, d\mu.$$

De un ejemplo donde claramente  $f$  y  $g$  son distintas.

- (b) Generalice al caso en que  $\mathcal{F}$  es generada por una partición finita  $(A_k)_{k=1\dots n} \subset \tau$  donde  $\forall i \, \mu(A_i) > 0$ . Para ello estudie las funciones  $\mathcal{F}$ -medibles y en particular pruebe que todo conjunto  $B \in \mathcal{F}$  es una reunión finita de una subcolección de  $(A_i)_{i=1\dots n}$ . Debe probar entonces que para  $f$  función  $\tau$ -medible y positiva existe una única función  $g \geq 0$ ,  $\mathcal{F}$ -medible tal que

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \int_B f \, d\mu = \int_B g \, d\mu.$$

Se pide además calcular  $g$ .

- (c) Nuestro propósito es ahora generalizar lo anterior para una sub  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F} \subset \tau$  arbitraria. Para ello considere  $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$  y pruebe que  $\nu$  es una medida  $\sigma$ -finita absolutamente continua con respecto a  $\mu$ . Concluya que existe una única ( $\mu$ -ctp) función  $g \geq 0$ ,  $\mathcal{F}$ -medible, tal que

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \int_B f \, d\mu = \int_B g \, d\mu.$$

¿Qué sucede si  $f$  es  $\mathcal{F}$ -medible? ¿Cómo extendería este resultado a para  $f$  integrable? Si denotamos por  $g = P(f)$  pruebe que  $P$  es una transformación lineal de  $L^1(\tau)$  en  $L^1(\mathcal{F})$ , que satisface

- $P$  es monótona, es decir  $h \leq f$ , entonces  $P(h) \leq P(f)$ . Concluya que  $|P(f)| \leq P(|f|)$ .
- $P$  es continua y más aún  $\|P(f)\| \leq \|f\|$ .
- $P(1) = 1$ .
- $P$  es idempotente.