

Apuntes de Teoría de la Medida

Ricardo Faro

27 de septiembre de 2006

Índice General

1	Medida	1
1.1	Introducción Histórica.	1
1.2	σ -álgebras de conjuntos	4
1.2.1	Álgebras y σ -álgebras.	4
1.2.2	σ -álgebra de Bórel.	9
1.3	Medida	13
1.3.1	Cargas.	16
1.3.2	Propiedades de haz en los espacios de medida. . .	18
1.4	Extensión de medidas	20
1.4.1	Medidas exteriores	20
1.4.2	Teoremas de extensión de medidas	23
1.5	Compleción	28
1.6	Medidas de Lebesgue–Stieltjes	31
1.6.1	Medidas de Lebesgue–Stieltjes en \mathbb{R}	31
1.6.2	Medidas de Lebesgue–Stieltjes en \mathbb{R}^n	36
1.6.3	Propiedades de la medida de Lebesgue.	42
1.6.4	Regularidad.	44
1.6.5	El conjunto de Cantor.	47
1.6.6	Sobre los conjuntos Lebesgue medibles.	48
1.7	Medidas de Hausdorff	50
1.7.1	Medidas de Hausdorff en \mathbb{R}^n	53
1.8	Bibliografía y comentarios	55
2	Integración	63
2.1	Introducción histórica	63
2.2	Funciones medibles	64
2.2.1	Propiedades básicas de las funciones medibles. . .	64
2.2.2	Funciones simples	67

2.2.3	Operaciones básicas de las funciones medibles. . . .	69
2.2.4	Existencia de Lebesgue medibles no de Borel. . . .	69
2.3	Integración	72
2.3.1	Propiedades básicas de la integral.	75
2.4	Teoremas básicos de integración	77
2.4.1	Teorema de la convergencia dominada.	84
2.4.2	Dependencia de un parámetro.	87
2.4.3	Otras propiedades.	88
2.5	Integrales de Riemann y de Lebesgue	92
2.6	Bibliografía y comentarios	97
3	Espacio de medida producto	101
3.1	Introducción	101
3.2	Producto finito de espacios medibles	103
3.3	Teorema de la medida producto	106
3.3.1	Medidas de transición	107
3.4	El teorema de Fubini	112
3.4.1	Teorema de Fubini para dos espacios	112
3.4.2	Producto de más de dos espacios.	118
3.5	Compleción de la medida producto	120
3.6	Aplicaciones. Convolución	122
3.7	Producto de infinitos espacios medibles	126
3.8	Bibliografía y comentarios	128
4	El Teorema de Radon–Nikodym	131
4.1	Introducción	131
4.2	Teorema de descomposición de carga	132
4.3	Medidas reales y medidas complejas	138
4.4	El Teorema de Radon–Nikodym	142
4.5	Singularidad	151
4.6	Bibliografía y comentarios	154
5	Diferenciación	157
5.1	Introducción	157
5.2	Diferenciación de medidas	158
5.3	Derivación e integración	163
5.3.1	Funciones de variación acotada.	164
5.3.2	Medidas y funciones de variación acotada.	167
5.3.3	Teorema fundamental del cálculo.	168
5.4	Transformaciones diferenciables	172

5.4.1	Transformaciones lineales.	172
5.4.2	Transformaciones y medidas de Hausdorff.	175
5.5	El teorema de cambio de variable	177
5.6	Cálculo de la constante γ_n	187
5.7	Bibliografía y comentarios	191
6	Espacios de funciones medibles	195
6.1	Los espacios \mathcal{L}_p	195
6.1.1	El espacio \mathcal{L}_∞	196
6.2	Los espacios de Banach L_p	198
6.2.1	Desigualdades fundamentales.	198
6.2.2	El espacio \mathcal{L}_p para $0 < p < 1$	201
6.2.3	Los espacios L_p	201
6.2.4	Compleción de los espacios L_p	204
6.3	Espacios duales	209
6.4	El espacio dual de L_p	214
6.5	Tipos de convergencias	223
6.6	Aplicaciones que conservan la medida	227
6.7	Bibliografía y comentarios	230
7	Medida y topología	237
7.1	Espacios Hausdorff LC	237
7.2	Medidas regulares	242
7.2.1	Funciones continuas y funciones medibles	245
7.3	Teoremas de representación de Riesz	249
7.4	Bibliografía y comentarios	256
	Ejercicios difíciles	265
	Ejercicios resueltos	267

Capítulo 1

Medida

1.1 Introducción Histórica.

El concepto de *medida* tiene una larga historia de más de 5000 años, que surge del manejo de longitudes, áreas y volúmenes fundamentalmente y de la necesidad de su cálculo. Estos tres ejemplos particulares de medidas son los que han servido como guía para sacar a la luz el concepto que detrás de ellos se escondía.

Las primeras demostraciones satisfactorias de teoremas relativos a áreas y volúmenes aparecen en el libro de EUCLIDES (300 a.c.?) “*Los Elementos*” (ver VANDALEN–MONNA, p. 78 y BOYER, p. 129). Sin embargo en este libro no hay definición de *longitud*, *área* ó *volumen*; Euclides las considera características que puede medir respectivamente en las figuras que sí define

Línea es una *longitud sin anchura*. (Libro I, Def.2).

Superficie es lo que sólo tiene *longitud y anchura* (Libro I, Def.5).

Sólido es lo que tiene *longitud, anchura y profundidad* (Libro XI, Def.1).

tampoco define que es *medir*, es una palabra que utiliza no sólo en estas tres “magnitudes”, sino también en los números; por ejemplo en el libro VII, las definiciones 3 y 4 dicen

3.- *Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor.*

4.- *Pero partes cuando no lo mide.*

por ejemplo 3 es “parte” de 15 y 6 es “partes” de 15.

Las longitudes las daba en comparación con un segmento unidad, las áreas con un cuadrado unidad y los volúmenes con un cubo unidad, de este modo dio los valores correspondientes a figuras simples como polígonos y poliedros y demostró teoremas como el de Pitágoras. Otros autores griegos más que dar la medida de una figura daban resultados del tipo: A y B tienen igual área ó volumen. Por ejemplo ARQUÍMEDES (287–212 a.c.) atribuye a EUDOXO (408–355 a.c.) la demostración de que el volumen de un cono es un tercio del volumen del cilindro de la misma base y altura. Esto sin conocer este volumen, para el que hace falta conocer el área del círculo, que descubrió casi 100 años después el propio ARQUÍMEDES demostrando que es el de un triángulo rectángulo con un cateto el radio y el otro la longitud de la circunferencia; suyo también es que el volumen de la esfera es $2/3$ el volumen del cilindro ó que el área de la esfera es la del cilindro circunscrito (ver BOYER, p.177). Para esta última, que demuestra en *Sobre la esfera y el cilindro* (ver la bibliografía en la pág.59), utiliza los axiomas de Euclides junto con cinco principios de los que destacan

4.- *Dos superficies que tienen los mismos límites en un plano son desiguales cuando ambas son cóncavas en la misma dirección y una de ellas está completamente limitada por la otra y por el plano que tiene los mismos límites que esta otra, o cuando una de ellas sólo está parcialmente limitada por la otra y el resto es común. La superficie limitada es la menor.*

5.- *Dadas dos líneas, dos superficies o dos sólidos desiguales, si el exceso de una de estas figuras sobre la otra se añade a sí mismo un cierto número de veces, se puede superar una u otra de las figuras que se comparan entre sí.*

(este último es el conocido **axioma de Arquímedes**). Y en la demostración hace un uso riguroso del concepto de límite.

Por último suya es también la mejor acotación de π de la época: $3 + (10/71) < \pi < 3 + (10/70)$.

Así se mantuvieron mas o menos las cosas durante 2000 años, hasta que en 1883 G. CANTOR (1845–1918) dió la primera definición de medida $m(A)$ de un conjunto arbitrario (acotado) $A \subset \mathbb{R}^n$. Otros autores como STOLZ en 1884 y HARNACK en 1885 dan definiciones equivalentes en \mathbb{R} .

Para ellas la propiedad aditiva de la medida $m[A \cup B] = m[A] + m[B]$, para conjuntos disjuntos A y B , se satisfacía si los conjuntos estaban “*completamente separados*”, pero no en general, pues con sus definiciones un conjunto y su adherencia median lo mismo y por tanto los racionales y los irracionales de $[0, 1]$ median 1, lo mismo que todo $[0, 1]$.

El primero en considerar qué conjuntos A son medibles y dar una definición de su medida fue en 1887 G. PEANO (1858–1932), el cual consideró la medida $m[A]$ de sus predecesores (que en el caso del plano definía mediante aproximaciones externas de A con polígonos) y a la que llamó *medida exterior* y consideró, para $A \subset R$, con R un rectángulo, la *medida interior* de A como $m[R] - m[R \setminus A]$; definió conjunto medible como aquel cuya medida interna coincide con la externa y demostró que la medida era aditiva. Además explicó la relación existente entre medida e integración, demostrando (ver PESIN, p.38) que una función acotada $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, era Riemann integrable si y sólo si el conjunto E de \mathbb{R}^2 limitado por la gráfica de f y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ era medible, en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = m[E].$$

En 1892 C. JORDAN (1838–1922) dió una definición mas simple utilizando una malla de cuadrados de igual lado, en lugar de polígonos, para aproximar el conjunto.

Sin embargo estas definiciones eran pobres, pues por ejemplo con ellas los racionales ya no eran medibles.

E. BOREL (1871–1956) dió, en su doctorado de 1894, el siguiente paso importante considerando la numerable aditividad para sus medidas. Además dió una definición razonable de conjuntos de medida nula, de hecho mientras que para sus antecesores los racionales de $[0, 1]$ median 1, BOREL concluyó que median menos que $\epsilon \sum (1/n^2)$ —y por tanto cero—, considerando para cada $r_n \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ un segmento de longitud ϵ/n^2 , con $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño.

Se sabía desde CANTOR que todo abierto $A \subset \mathbb{R}$ era unión, $A = \cup I_n$, a lo sumo numerable de intervalos abiertos I_n disjuntos. BOREL define su medida como la serie $m[A] = \sum m[I_n]$ y describe la clase de los conjuntos (ahora llamados “*borelianos*”) que pueden obtenerse a partir de los abiertos, mediante iteraciones en las que se hacen uniones ó diferencias $A \setminus B$ numerables de conjuntos de la clase, e indica que para estos conjuntos puede definirse una medida que es “*numerablemente aditiva*” (i.e.

la medida de una unión numerable y disjunta de conjuntos medibles es la suma de sus medidas). La numerable aditividad de BOREL frente a la finita aditividad de PEANO–JORDAN fue una propiedad básica que permitió obtener los resultados fundamentales en la teoría de integración abstracta, teoría que desarrolló fundamentalmente H. LEBESGUE (1875–1941) a partir de su tesis de 1902. La numerable aditividad y la integración están muy relacionadas, de hecho la originalidad de LEBESGUE no reside tanto en haber extendido la integral de Riemann, como en su descubrimiento —obtenido independientemente por W.H. YOUNG para funciones semicontinuas— del teorema fundamental sobre el paso al límite de la integral, que obtiene como consecuencia de ser la medida numerablemente aditiva.

1.2 σ –álgebras de conjuntos

1.2.1 Álgebras y σ –álgebras.

En la lección siguiente definiremos el concepto de “*medida*”, que engloba términos como: *longitud*, *área*, *volumen*, *probabilidad*, etc. Para ello consideraremos un conjunto Ω del que queremos *medir* (en algún sentido), algunos de sus subconjuntos. El objetivo de esta lección consiste en definir la estructura que tiene la colección de todos esos conjuntos que vamos a “medir” y estudiar sus consecuencias básicas.

Definición. Llamaremos σ –álgebra en Ω a una colección \mathcal{A} de subconjuntos de Ω con las siguientes propiedades:

- a) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- b) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
- c) Si $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

si la tercera condición se satisface sólo para uniones finitas, diremos que \mathcal{A} es un *álgebra*.

Se sigue de forma inmediata que una σ –álgebra es cerrada para intersecciones numerables y un álgebra para intersecciones finitas.

Definición. Llamaremos *espacio medible* al par (Ω, \mathcal{A}) , donde Ω es un conjunto y \mathcal{A} es una σ –álgebra de Ω y *conjuntos medibles* a los elementos de \mathcal{A} .

Veamos ahora algunos simples ejemplos de álgebras y σ -álgebras:

Ejemplo 1.2.1 $\mathcal{P}(\Omega)$ es la mayor σ -álgebra de Ω .

Ejemplo 1.2.2 $\{\emptyset, \Omega\}$ es la menor σ -álgebra de Ω .

Ejemplo 1.2.3 Sea Ω con infinitos elementos (numerable o no) y consideremos la colección \mathcal{A} de todos los subconjuntos $A \subset \Omega$, tales que A ó A^c sea numerable. Entonces \mathcal{A} es σ -álgebra de Ω .

Ejemplo 1.2.4 Sea Ω con infinitos elementos y consideremos la colección \mathcal{A} de todos los subconjuntos A de Ω , tales que A ó A^c sea finito. Entonces \mathcal{A} es álgebra pero no σ -álgebra de Ω .

Ejemplo 1.2.5 Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y sea \mathcal{A} la colección de todas las uniones finitas y disjuntas de los intervalos¹ $(a, b]$, (a, ∞) , con $-\infty \leq a \leq b < \infty$. Entonces \mathcal{A} es álgebra pero no σ -álgebra.

Nota 1.2.6 Llamaremos *límite superior* y *límite inferior* de una sucesión de conjuntos A_n respectivamente a los conjuntos

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n, \quad \liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n,$$

y denotaremos con

$$\begin{aligned} A_n \uparrow A &\Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } \bigcup A_n = A. \\ A_n \downarrow A &\Leftrightarrow A_n \supset A_{n+1}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } \bigcap A_n = A. \end{aligned}$$

Definición. Una *clase monótona* \mathcal{C} de Ω es una familia de subconjuntos de Ω satisfaciendo las condiciones:

- a) Si $A_n \in \mathcal{C}$ y $A_n \uparrow A$, entonces $A \in \mathcal{C}$.
- b) Si $A_n \in \mathcal{C}$ y $A_n \downarrow A$, entonces $A \in \mathcal{C}$.

Ejemplo 1.2.7 Sea $\Omega = \mathbb{R}$, la colección de todos los intervalos es clase monótona y no es σ -álgebra.

A continuación damos unas simples propiedades de estas estructuras conjuntistas.

¹Para $a = b$, entendemos $(a, a] = \emptyset$

Proposición 1.2.8 *Una familia \mathcal{A} de Ω es una σ -álgebra si y sólo si es álgebra y clase monótona.*

Demostración. Hágase como ejercicio. Obsérvese que toda unión numerable $\cup A_i$, se puede poner como unión de una sucesión creciente de conjuntos del álgebra

$$B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i. \quad \blacksquare$$

Proposición 1.2.9 *La intersección de álgebras, σ -álgebras o clases monótonas en Ω es respectivamente un álgebra, una σ -álgebra, o una clase monótona.*

Definición. Si \mathcal{C} es una familia de subconjuntos de Ω , denotaremos con $\sigma(\mathcal{C})$ la mínima σ -álgebra que contiene a \mathcal{C} , que por el resultado anterior existe y es la intersección de todas las σ álgebras que la contienen (observemos que al menos hay una, $\mathcal{P}(\Omega)$). Del mismo modo se tiene la existencia de la mínima álgebra que contiene a la familia, que denotamos $\alpha(\mathcal{C})$ y la mínima clase monótona que la contiene, que denotamos con $\mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Nota 1.2.10 Si hay confusión y necesitamos hacer referencia al conjunto Ω denotaremos las familias de conjuntos anteriores: $\sigma_\Omega(\mathcal{C})$, $\alpha_\Omega(\mathcal{C})$ y $\mathcal{M}_\Omega(\mathcal{C})$ respectivamente.

Proposición 1.2.11 *Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ entonces*

$$\alpha(\mathcal{C}) \subset \alpha(\mathcal{D}), \quad \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D}) \quad \text{y} \quad \mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{D}).$$

El siguiente resultado es importante no sólo por lo que dice sino porque nos ofrece un buen ejemplo en el que se utiliza (tres veces) una técnica común en Teoría de la medida, el *principio de los buenos conjuntos*.

Lema 1.2.12 *Si \mathcal{A} es álgebra, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es álgebra.*

Demostración. 1.- $\Omega \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ es obvio pues $\Omega \in \mathcal{A}$.

2.- $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, pues la clase $\{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$ es monótona² y contiene al álgebra \mathcal{A} , por tanto es $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

²Observemos que la demostración no se hace para un elemento A , sino para todos los elementos a la vez, viendo que tienen estructura de clase monótona. En esto consiste el principio de los buenos conjuntos.

3.- $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, pues la clase

$$\{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \forall B \in \mathcal{A}\},$$

es monótona y contiene a \mathcal{A} , por tanto es $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, es decir que para todo $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y todo $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, lo cual significa que la clase (también monótona)

$$\{B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \forall A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$$

contiene a \mathcal{A} y por tanto es $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. ■

Teorema de la clase monótona 1.2.13 *Si \mathcal{A} es álgebra entonces*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Demostración. Por (1.2.8) $\sigma(\mathcal{A})$ es clase monótona, por tanto $\sigma(\mathcal{A}) \supset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Por el lema anterior $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es álgebra y por (1.2.8) σ -álgebra, por tanto $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. ■

Hay distintas clases de conjuntos que generan la misma álgebra, pero entre ellas las hay más útiles, como las que tienen las siguientes propiedades.

Definición. Llamaremos *clase elemental* de Ω a una familia \mathcal{C} de subconjuntos de Ω satisfaciendo las condiciones:

- a) $\emptyset \in \mathcal{C}$.
- b) Si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{C}$.
- c) Si $A \in \mathcal{C}$, A^c es unión finita disjunta de elementos de \mathcal{C} .

Ejemplo 1.2.14 En $\Omega = \mathbb{R}$ es una clase elemental la familia

$$\mathcal{C} = \{(a, b], (a, \infty), (-\infty, b] : a \leq b \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 1.2.15 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles. La familia de los *productos de medibles*,

$$\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n = \{A_1 \times \cdots \times A_n \subset \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n : A_i \in \mathcal{A}_i\},$$

es una clase elemental.

Proposición 1.2.16 *Si \mathcal{C} es una clase elemental, la familia de uniones finitas disjuntas de conjuntos de \mathcal{C} es el álgebra $\alpha(\mathcal{C})$.*

Demostración. Basta ver que la familia \mathcal{A}_0 de uniones finitas disjuntas de conjuntos de \mathcal{C} es álgebra, pues $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_0 \subset \alpha(\mathcal{C})$.

Se tiene: $\emptyset \in \mathcal{C} \subset \mathcal{A}_0$ y si $R, Q \in \mathcal{A}_0$, con $R = \cup_{i=1}^m R_i$, $R_i \in \mathcal{C}$ disjuntos y $Q = \cup_{j=1}^k Q_j$, con los $Q_j \in \mathcal{C}$ disjuntos, entonces

$$R \cap Q = \cup_{i=1}^m (R_i \cap Q) = \cup_{i=1}^m \cup_{j=1}^k (R_i \cap Q_j) \in \mathcal{A}_0,$$

ya que los $R_i \cap Q_j \in \mathcal{C}$ y son disjuntos. Por último es cerrado por paso al complementario, pues por definición para $R_i \in \mathcal{C}$, $R_i^c \in \mathcal{A}_0$ y para $R \in \mathcal{A}_0$ como antes,

$$R^c = \cap_{i=1}^m R_i^c \in \mathcal{A}_0. \quad \blacksquare$$

Dada una familia de conjuntos \mathcal{C} en Ω y un $A \subset \Omega$, consideramos la familia en A

$$\mathcal{C} \cap A = \{C \cap A : C \in \mathcal{C}\}.$$

En el siguiente resultado usamos esta notación y volvemos a utilizar el *principio de los buenos conjuntos*.

Proposición 1.2.17 *Para cada $A \subset \Omega$ se tiene que*

$$\sigma(\mathcal{C}) \cap A = \sigma_A(\mathcal{C} \cap A).$$

Demostración. Se demuestra fácilmente que $\sigma(\mathcal{C}) \cap A$ es una σ -álgebra de A que contiene a $\mathcal{C} \cap A$, por lo tanto

$$\sigma(\mathcal{C}) \cap A \supset \sigma_A(\mathcal{C} \cap A),$$

y para demostrar la otra inclusión consideramos la familia de “buenos conjuntos”

$$\mathcal{A} = \{C \in \sigma(\mathcal{C}) : C \cap A \in \sigma_A(\mathcal{C} \cap A)\},$$

la cual es σ -álgebra y satisface $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$, por tanto

$$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}),$$

y se tiene el resultado. \blacksquare

1.2.2 σ -álgebra de Bórel.

Un caso particularmente importante de espacio medible se tiene cuando (Ω, \mathcal{T}) es un espacio topológico y consideramos la clase de los abiertos \mathcal{T} para generar la llamada *σ -álgebra de Borel* de Ω , que denotaremos $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\Omega)$ y a sus elementos llamamos *borelianos*.

Ejemplo 1.2.18 Los abiertos y cerrados son borelianos y si el espacio es Hausdorff también los compactos (pues son cerrados).

Proposición 1.2.19 *Si \mathcal{X} es un espacio topológico e $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ es un subespacio suyo, entonces*

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}.$$

Demostración. Por ser $\mathcal{T}(\mathcal{Y}) = \mathcal{T}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}$ y por (1.2.17). ■

Definición. Llamamos *base* de un espacio topológico a una colección de abiertos tal que todo abierto del espacio es unión de abiertos de la base.

Proposición 1.2.20 *Si un espacio topológico tiene una base numerable de abiertos³ \mathcal{N} , entonces $\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{N})$.*

Demostración. Obvio pues $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{N})$, por tanto $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{B}(\Omega)$. ■

Ejemplo 1.2.21 En $\Omega = \mathbb{R}$ con la topología usual $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, de las uniones arbitrarias de intervalos abiertos (a, b) , podemos tomar como $\mathcal{N} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$, para el que $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Como consecuencia veamos que

$$\mathcal{C} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$$

(en los ejercicios se verán más familias generadoras).

Demostración. Por una parte $(a, b] = (a, \infty) \cap (b, \infty)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y por otra

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n} \right],$$

por lo que $\mathcal{N} \subset \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y el resultado se sigue. ■

³Esto suele nombrarse diciendo que el espacio satisface el *segundo axioma de numerabilidad*.

Ejemplo 1.2.22 En $\Omega = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, definimos la topología $\overline{\mathcal{T}}$, formada por las uniones arbitrarias de intervalos del tipo

$$[-\infty, b), \quad (a, b), \quad (a, \infty],$$

con $a \leq b \in \mathbb{R}$, para la que $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \overline{\mathcal{T}} \cap \mathbb{R}$. Esta topología tiene una base numerable $\mathcal{N}_{\overline{\mathbb{R}}}$ formada por los mismos intervalos pero con $a, b \in \mathbb{Q}$. Observemos que por (1.2.19) se tiene

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \cap \mathbb{R},$$

por lo tanto como $\mathbb{R}, \{-\infty\}, \{\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, se tiene que

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{E, E \cup \{\infty\}, E \cup \{-\infty\}, E \cup \{\infty, -\infty\} : E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Ejemplo 1.2.23 Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, podemos considerar la base numerable \mathcal{N} formada por los rectángulos abiertos (a, b) con $a, b \in \mathbb{Q}^n$, donde para $a = (a_i), b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ utilizamos la notación

$$\begin{aligned} (a, b) &= \prod (a_i, b_i) = \{(x_1, \dots, x_n) : a_i < x_i < b_i\}, \\ (a, b] &= \prod (a_i, b_i] = \{(x_1, \dots, x_n) : a_i < x_i \leq b_i\}, \quad \text{etc...} \end{aligned}$$

Proposición 1.2.24 La σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ está generada por cualquiera de las clases:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}^n\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{(a, b], a, b \in \mathbb{R}^n\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{H = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \leq b\}, \text{ para algún } 1 \leq i \leq n \text{ y } b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Demostración. Por una parte todo abierto es unión numerable de rectángulos abiertos con extremos en \mathbb{Q}^n , por otra parte observemos que

$$(a, b] = \{x_1 \leq a_1\}^c \cap \{x_1 \leq b_1\} \cap \dots \cap \{x_n \leq a_n\}^c \cap \{x_n \leq b_n\},$$

por tanto se tienen la primera y tercera inclusiones (las otras son obvias)

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_3) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \quad \blacksquare$$

Nota 1.2.25 Dada una clase \mathcal{F} de conjuntos, denotaremos respectivamente con

$$\mathcal{F}_\delta, \quad \mathcal{F}_\sigma,$$

las familias de todas las posibles intersecciones numerables de elementos de \mathcal{F} , y las de las uniones numerables.

Estas clases de conjuntos juegan un papel importante en el estudio de la relación entre topología y medida (cuestión que trataremos en el Tema VI). Por ahora veamos algunas relaciones conjuntistas entre estas familias.

Denotemos con \mathcal{C} y \mathcal{A} respectivamente las familias de los cerrados y de los abiertos de \mathbb{R}^n .

Proposición 1.2.26 *En los términos anteriores se tiene que*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_\sigma, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_\delta, \quad \mathcal{A}_{\delta\delta} = \mathcal{A}_\delta, \quad \mathcal{C}_{\sigma\sigma} = \mathcal{C}_\sigma, \dots \\ \mathcal{A} &\subset \mathcal{A}_\delta \subset \mathcal{A}_{\delta\sigma} \subset \mathcal{A}_{\delta\sigma\delta} \subset \dots \\ \mathcal{C} &\subset \mathcal{C}_\sigma \subset \mathcal{C}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{C}_{\sigma\delta\sigma} \subset \dots \end{aligned}$$

donde en las dos últimas filas queremos indicar que cada uno de los dos conjuntos a la izquierda de \subset está contenido en cada uno de los de la derecha y por tanto corresponden a cuatro inclusiones.

Nota 1.2.27 Como consecuencia del *Teorema de la categoría*⁴ de Baire, que se verá en Análisis Funcional, puede probarse sin dificultad que

$$\mathbb{Q} \in \mathcal{C}_\sigma, \quad \mathbb{Q} \notin \mathcal{A}_\delta$$

pues en caso contrario tendríamos abiertos V_n tales que

$$\mathbb{Q} = \bigcap V_n, \quad \mathbb{R} = \bigcup V_n^c \cup \mathbb{Q} = \bigcup V_n^c \cup \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\} \cup \dots$$

y por el Teorema de Baire algún V_n^c tendría interior no vacío, siendo $V_n^c \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ejercicios

Ejercicio 1.2.1 Demostrar que una clase no vacía \mathcal{A} es un álgebra en Ω si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:

- i) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
- ii) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.

⁴Este resultado dice que si un espacio métrico completo \mathcal{X} es unión de una sucesión de cerrados U_n , entonces para algún n , $\text{Int } U_n$ es no vacío (ver Ash, pág.398).

Ejercicio 1.2.2 Dada una aplicación $F: \Omega \longrightarrow \Omega'$, demostrar las siguientes propiedades:

- (i) $F^{-1}(\cup B_i) = \cup F^{-1}(B_i)$, $F^{-1}(\cap B_i) = \cap F^{-1}(B_i)$, $F^{-1}(B^c) = [F^{-1}(B)]^c$,
- (ii) $F(\cup A_i) = \cup F(A_i)$, $F(\cap A_i) \subset \cap F(A_i)$,
- (iii) Si F es sobre $F(A)^c \subset F(A^c)$.
- (iv) Si F es inyectiva $F(A)^c \supset F(A^c)$ y $F(A)^c \cap F(\Omega) = F(A^c)$.

Ejercicio 1.2.3 Dada una aplicación $F: \Omega \rightarrow \Omega'$, demostrar que:

- (a) Si \mathcal{A} es una σ -álgebra de Ω , $\mathcal{A}' = \{B \subset \Omega' : F^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ lo es de Ω' .
- (b) Si \mathcal{A}' es una σ -álgebra de Ω' , $\mathcal{A} = F^{-1}[\mathcal{A}'] = \{F^{-1}(B) \subset \Omega : B \in \mathcal{A}'\}$ lo es de Ω .
- (c) Si $C \subset \mathcal{P}(\Omega')$, $\sigma[F^{-1}(C)] = F^{-1}[\sigma(C)]$.
- (d) Demostrar que si (Ω, \mathcal{T}) y (Ω', \mathcal{T}') son espacios topológicos y F es continua, entonces $F^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\Omega)$, para todo $B \in \mathcal{B}(\Omega')$.

Ejercicio 1.2.4 Consideremos las siguientes extensiones de una familia \mathcal{C} de subconjuntos de Ω :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{C} \text{ ó } A^c \in \mathcal{C}\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{A_1 \cap \dots \cap A_n : A_i \in \mathcal{C}_1, n \in \mathbb{N}\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{A_1 \cup \dots \cup A_n : A_i \in \mathcal{C}_2, n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Demostrar que $\mathcal{C}_3 = \alpha(\mathcal{C})$.

Ejercicio 1.2.5 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles. Demostrar que la familia de los productos de medibles,

$$\mathcal{R} = \{A_1 \times \dots \times A_n \subset \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n : A_i \in \mathcal{A}_i\},$$

es una clase elemental.

Ejercicio 1.2.6 Demostrar que la σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se genera por las familias:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{C}_2 &= \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{C}_4 &= \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{C}_5 &= \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{C}_6 &= \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.7 Demostrar que la σ -álgebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ se genera por la familia $\mathcal{C} = \{(a, b] : a, b \in \overline{\mathbb{R}}\}$.

Ejercicio 1.2.8 Demostrar: (a) $\emptyset \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \Omega$.

(b) Si $A_n \uparrow A$ (ó $A_n \downarrow A$), entonces $\limsup A_n = \liminf A_n = A$.

Ejercicio 1.2.9 ¿Puede una σ -álgebra infinita contener sólo una colección numerable de elementos?

1.3 Medida

Definición. Por una *medida*⁵, en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) —con \mathcal{A} álgebra—, entenderemos una función no negativa

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty],$$

que satisface:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) Es *numerablemente aditiva*, es decir si dados $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$ disjuntos —es decir tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$ — y cuya unión esté en \mathcal{A} (esto es automático si \mathcal{A} es σ -álgebra), entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Si la condición (b) sólo es válida para colecciones finitas de conjuntos disjuntos, A_1, \dots, A_n , diremos que la medida es *aditiva*.

Diremos que una medida μ es σ -finita si existe una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos $A_n \in \mathcal{A}$, tal que $\cup A_n = \Omega$ y cada $\mu(A_n) < \infty$. Llamaremos *probabilidad* a toda medida verificando $\mu(\Omega) = 1$.

Definición. Llamaremos *espacio de medida* a toda terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, donde μ es una medida sobre la σ -álgebra⁶ \mathcal{A} de Ω .

Definición. Diremos que un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es *completo* si para cada $B \subset A$, con $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$, también es $B \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 1.3.1 La medida delta de Dirac. Consideremos $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$, $x \in \Omega$ y $\mu(E) = 0$, si $x \notin E$ y $\mu(E) = 1$, si $x \in E$. Es la **probabilidad concentrada en x** , ó *delta de Dirac en x* , suele denotarse con δ_x .

Ejemplo 1.3.2 La medida de contar. Consideremos $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$, con $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = n$ si A es finito y tiene $n \in \mathbb{N}$ elementos y $\mu(A) = \infty$ en cualquier otro caso.

⁵Algunos autores la llaman *medida positiva*.

⁶En algunas ocasiones \mathcal{A} es sólo álgebra, en cuyo caso lo especificaremos.

Ejemplo 1.3.3 Consideremos $\Omega = \mathbb{N}$, y una sucesión de números reales no negativos $p_n \geq 0$. Para cada $A \subset \mathbb{N}$ definimos

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} p_n,$$

la cual es una medida en $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, para la que $\mu(\{n\}) = p_n$. Si la $\sum p_n = 1$ entonces es una probabilidad y si $p_n = 1$ para cada n , μ es la medida de contar en los naturales.

Otros ejemplos de medidas, de las que estudiaremos algunas a lo largo del curso, son:

Ejemplo 1.3.4 La medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . Demostraremos la existencia de una única medida, definida en los borelianos de \mathbb{R}^n , invariante por traslaciones y que en el cubo unidad vale 1.

Ejemplo 1.3.5 Las medidas de Lebesgue–Stieltjes en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.3.6 La medida de Haar en un grupo localmente compacto⁷, que generaliza a la de Lebesgue en el sentido de que son invariantes por traslaciones en el grupo (ver COHN; FOLLAND).

Ejemplo 1.3.7 La medida asociada a una variedad Riemanniana.

Ejemplo 1.3.8 Las medidas de Hausdorff en un espacio métrico. Más generales que la de Lebesgue nos permitirán definir el área de una superficie del espacio.

Proposición 1.3.9 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, entonces para $A, B \in \mathcal{A}$:

- (a) $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$.
- (b) Si $A \subset B$ entonces $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$.
- (c) Si $A \subset B$ y $\mu(A) = \infty$, entonces $\mu(B) = \infty$.
- (d) Si $A \subset B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (e) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (f) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

⁷Ver la definición de espacio topológico localmente compacto en la pág.237.

(g) Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$$

Demostración. (e) Como $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$, tendremos que

$$\begin{aligned} \mu(A) + \mu(B) &= \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) + \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B) \\ &= \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B). \end{aligned}$$

(g) Por inducción y usando (f). ■

Nota 1.3.10 Los apartados anteriores son válidos también si \mathcal{A} es álgebra y μ es aditiva.

Una de las propiedades básicas y más útiles de las medidas consecuencia de ser numerablemente aditivas, es la de la “*continuidad secuencial*”.

Proposición 1.3.11 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $A_n \in \mathcal{A}$ una sucesión, entonces:

(a) Si $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

(b) Si $A_n \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Demostración. (a) Consideremos los conjuntos disjuntos

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1} = A_n \cap A_{n-1}^c,$$

para los que por inducción se tiene $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$ y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, por tanto

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \mu(B_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{m=1}^n B_m\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(b) Como $A_n \subset A_1$, tenemos por (1.3.9)–(b) que

$$\mu(A_n) + \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) = \mu(A) + \mu(A_1 \setminus A),$$

y todos los términos son finitos por serlo la suma. Ahora como $A_n \downarrow A$, entonces $A_1 \setminus A_n \uparrow A_1 \setminus A$ y por (a) $\lim \mu(A_n) = \mu(A)$. ■

1.3.1 Cargas.

También hay medidas que toman valores negativos —un ejemplo en la física es la carga eléctrica—, pero preferimos no llamarlas medidas para evitar confusión.

Definición. Llamaremos *carga* en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , a toda función $\mu: \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$, numerablemente aditiva y tal que $\mu(\emptyset) = 0$ (como para las medidas la llamaremos *carga aditiva* si sólo es aditiva). Obviamente las medidas son las cargas no negativas.

Nota 1.3.12 Entendemos que la suma en $\overline{\mathbb{R}}$, es la de \mathbb{R} y

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty + a = \infty, & a - \infty &= -\infty + a = -\infty, & \text{para } a \in \mathbb{R}, \\ \infty + \infty &= \infty, & -\infty - \infty &= -\infty, \end{aligned}$$

y $\infty - \infty$ no está definido, además extendemos el orden siendo $-\infty \leq x \leq \infty$ para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Así se tiene por ejemplo que si $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$ y $a + b, c + d$ están bien definidos entonces

$$(1.1) \quad a \leq c, \quad b \leq d \quad \Rightarrow \quad a + b \leq c + d.$$

Por otra parte observemos que toda carga (en particular toda medida) es aditiva, pues como $\mu(\emptyset) = 0$ tendremos que para A y B disjuntos

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots) = \mu(A) + \mu(B),$$

y por tanto aunque hubiésemos puesto que el rango de μ fuese $\overline{\mathbb{R}}$, el hecho es que si es aditiva el rango no puede contener ambos extremos infinitos, pues si existe A con $\mu(A) = \infty$, entonces $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(A^c) = \infty$ y si existe A con $\mu(A) = -\infty$, entonces $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(A^c) = -\infty$.

Por último observemos que si $\mu: \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$ es numerablemente aditiva, entonces es una carga —salvo que sea degenerada y sólo tome el valor $\mu(A) = \infty$ para todo $A \in \mathcal{A}$ —, pues si existe un medible A con $\mu(A) \in \mathbb{R}$, tendremos

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots) = \mu(A) + \sum \mu(\emptyset),$$

y por tanto $\mu(\emptyset) = 0$.

Las cargas conservan algunas de las propiedades de las medidas.

Proposición 1.3.13 Sea μ una carga en (Ω, \mathcal{A}) , con \mathcal{A} álgebra, entonces para $A, B, A_n \in \mathcal{A}$:

- (a) $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$.
- (b) Si $A \subset B$ entonces $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$.
- (c) Si $A \subset B$ y $\mu(A) = \infty$, entonces $\mu(B) = \infty$.
- (d) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (e) Si $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.
- (f) Si $A_n \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Nota 1.3.14 Se sigue de (1.3.9)–(d) que una medida aditiva μ es acotada si y sólo si es finita, es decir que

$$\mu(\Omega) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \mu(A) < \infty, \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

tal resultado no es cierto en general si quitamos la no negatividad (ver prob.4 del Ash, p.12). Sin embargo veremos en (4.2.3) de la página 133, que sí es cierto para cargas sobre σ -álgebras.

Si de una medida ó una carga μ sólo sabemos que es aditiva, el siguiente resultado nos dice cuando es numerablemente aditiva.

Teorema 1.3.15 Una carga aditiva μ sobre un álgebra \mathcal{A} es numerablemente aditiva, si se verifica una de las dos condiciones:

- (a) μ es continua superiormente, es decir dados $A_n, A \in \mathcal{A}$ con $A_n \uparrow A$, $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.
- (b) μ es continua inferiormente en el \emptyset , es decir si dados $A_n \in \mathcal{A}$, con $A_n \downarrow \emptyset$, se tiene $\mu(A_n) \rightarrow 0$.

Demostración. Sea $A_n \in \mathcal{A}$ una sucesión de conjuntos disjuntos tales que $A = \cup A_n \in \mathcal{A}$, entonces para $B_n = \cup_{i=1}^n A_i$ tendremos que $B_n \uparrow A$, por tanto en el caso (a)

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \mu(\cup_{i=1}^n A_i) = \mu(B_n) \rightarrow \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i),$$

y el resultado se sigue. Ahora en el caso (b) como $A \setminus B_n \downarrow A \setminus A = \emptyset$, tendremos que $\mu(A \setminus B_n) \rightarrow 0$, y como

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B_n) + \mu(B_n),$$

el resultado se sigue. ■

1.3.2 Propiedades de haz en los espacios de medida.

Definición. Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Llamamos *restricción del espacio de medida* a un conjunto medible $B \in \mathcal{A}$, al nuevo espacio de medida $(B, \mathcal{A}_B, \mu|_B)$, para

$$\mathcal{A}_B = \{A \in \mathcal{A} : A \subset B\}, \quad \mu|_B(A) = \mu(A).$$

En los libros de TJUR, p.23 y LANG, p.339 se demuestra (ver el tema de medida y topología), que si Ω es *Hausdorff y localmente compacto* y los A_i son un recubrimiento abierto de Ω tal que la restricción a $A_i \cap A_j$ de $(A_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ y $(A_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ coinciden —donde las medidas μ_i satisfacen ciertas propiedades de regularidad—, entonces se puede construir un único espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ cuya restricción a cada A_i es $(A_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$.

Ejercicios

Ejercicio 1.3.1 Consideremos $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, el espacio de medida de contar en los naturales. Encontrar una sucesión $A_n \downarrow \emptyset$ para la que no se verifique $\mu(A_n) \rightarrow \mu(\emptyset) = 0$.

Ejercicio 1.3.2 Consideremos $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, para $\mu(A) = 0$ si A es finito y $\mu(A) = \infty$ en caso contrario.

- (a) Demostrar que μ es aditiva pero no numerablemente aditiva.
- (b) Encontrar una sucesión $A_n \uparrow A$ para la que no se verifique $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Ejercicio 1.3.3 Dada una medida μ y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$, demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ejercicio 1.3.4 Sea $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, aditiva en un álgebra \mathcal{A} . Dada una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos cuya unión está en \mathcal{A} , demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ejercicio 1.3.5 Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$, demostrar que:

- i) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$.
- ii) Que si $\mu(\cup A_n) < \infty$, entonces $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.

Ejercicio 1.3.6 Demostrar el Lema de Borel–Cantelli: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $C_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\limsup C_n) = 0.$$

Ejercicio 1.3.7 Dada una medida finita μ sobre una σ -álgebra \mathcal{A} y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $\liminf A_n = \limsup A_n = A$, demostrar que $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Ejercicio 1.3.8 Dada una sucesión doble $x_{nm} \in (-\infty, \infty]$, tal que para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $x_{nm} \leq x_{n+1, m}$ y $x_{nm} \leq x_{n, m+1}$, demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{nm} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm}.$$

Ejercicio 1.3.9 Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) y una sucesión de medidas en él μ_n . Demostrar:

- a) Si $\mu_n \leq \mu_{n+1}$, entonces $\mu(A) = \lim \mu_n(A)$ define una medida en el espacio.
- b) Sean como sean las μ_n , $\mu(A) = \sum \mu_n(A)$, define una medida en el espacio.

Ejercicio 1.3.10 Dado un espacio no numerable Ω y

$$\mathcal{A} = \{E \subset \Omega : E \text{ ó } E^c \text{ es numerable}\},$$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E \text{ es numerable,} \\ 1, & \text{si } E^c \text{ es numerable,} \end{cases} \quad \text{para cada } E \in \mathcal{A},$$

demostrar que \mathcal{A} es σ -álgebra y μ medida.

Ejercicio 1.3.11 Dado un espacio de medida semifinita $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, es decir tal que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subset E$ y $0 < \mu(F) < \infty$, demostrar que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ y todo $r > 0$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subset E$ y $r < \mu(F) < \infty$.

Ejercicio 1.3.12 Demostrar que toda medida σ -finita es semifinita. Dar un contraejemplo para el recíproco.

Ejercicio 1.3.13 Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, definimos $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, de la siguiente manera

$$\lambda(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A \text{ y } \mu(B) < \infty\},$$

demostrar que:

- a) λ es una medida semifinita.
- b) Que si μ es semifinita entonces $\lambda = \mu$.

1.4 Extensión de medidas

1.4.1 Medidas exteriores

A menudo nos encontraremos ante la situación de tener definida una medida μ sobre una clase reducida de conjuntos y quererla extender a una clase más amplia. Tomemos por ejemplo las medidas de la forma

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a),$$

sobre la clase \mathcal{C} de los semiintervalos de \mathbb{R} cerrados a la derecha. Donde F es una función real, monótona creciente y continua a la derecha. En particular para $F(x) = x$ tendríamos $\mu(a, b] = b - a$, la longitud del intervalo. La cuestión es: ¿Podremos extender μ al álgebra $\alpha(\mathcal{C})$, de manera que sea una medida?. No es difícil ver que sí, lo veremos en (1.2) de la página 33. Lo que no es tan fácil de ver es que también puede extenderse de un único modo a la σ -álgebra $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. El objetivo de esta lección consiste en demostrar que dada una medida

$$\mu_0 : \mathcal{A}_0 \longrightarrow [0, \infty]$$

definida en un álgebra \mathcal{A}_0 de Ω , existe una σ -álgebra \mathcal{A} que contiene a \mathcal{A}_0 y una medida μ sobre \mathcal{A} , que coincide con μ_0 sobre \mathcal{A}_0 y que además es única si μ_0 es σ -finita. El procedimiento que seguiremos se basa en la noción de medida exterior.

Definición. Una *medida exterior* en Ω es una función de conjunto

$$\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$$

verificando las siguientes condiciones:

- a) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- b) Si $A \subset B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
- c) Si B_n es una sucesión de subconjuntos de Ω , entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n).$$

Ejemplo 1.4.1 Consideremos un conjunto Ω . La función $\mu^*(\emptyset) = 0$ y $\mu^*(A) = 1$ en cualquier otro caso, define una medida exterior en $\mathcal{P}(\Omega)$.

Ejemplo 1.4.2 Consideremos un conjunto infinito Ω . La función $\mu^*(A) = 0$ si A es numerable y $\mu^*(A) = 1$ en cualquier otro caso, define una medida exterior en $\mathcal{P}(\Omega)$.

A continuación construimos una gran cantidad de medidas exteriores.

Proposición 1.4.3 Sea \mathcal{C} una colección de subconjuntos de Ω y $\rho: \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ una función cualquiera, tales que $\emptyset \in \mathcal{C}$ y $\rho(\emptyset) = 0$. Para cada $B \subset \Omega$,

$$\mu^*(B) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : A_n \in \mathcal{C}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\},$$

define⁸ una medida exterior (que llamaremos la medida exterior generada por ρ), para la que $\mu^*(A) \leq \rho(A)$, para $A \in \mathcal{C}$. Además si $\mathcal{C} = \mathcal{A}_0$ es un álgebra y ρ una medida, μ^* coincide con ρ sobre \mathcal{A}_0 .

Demostración. Las dos primeras propiedades son inmediatas. Veamos la tercera, para ello sea B_n una sucesión de subconjuntos de Ω . Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) = \infty$, la desigualdad es obvia, en caso contrario $\mu^*(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) < \infty$, para todo n . Tomemos ahora un $\epsilon > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ elijamos una sucesión $A_{nm} \in \mathcal{C}$ tal que

$$B_n \subset \bigcup_m A_{nm}, \quad \text{y} \quad \sum_m \rho(A_{nm}) \leq \mu^*(B_n) + \frac{\epsilon}{2^n},$$

⁸Con el convenio $\inf \emptyset = \infty$, con el que se verifica que si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, entonces $\inf B \leq \inf A$, —incluido $A = \emptyset$ —.

entonces los A_{nm} son una colección numerable de conjuntos de \mathcal{C} , cuya unión contiene la $\cup B_n$, por tanto

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_m \rho(A_{nm}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \epsilon,$$

y el resultado se sigue. Ahora que $\mu^*(B) \leq \rho(B)$, para $B \in \mathcal{C}$ se sigue de la definición.

Por último supongamos que $\mathcal{C} = \mathcal{A}_0$ es álgebra y veamos que $\mu^*(B) = \rho(B)$, para cada $B \in \mathcal{A}_0$. Para ver la desigualdad que nos falta consideremos una sucesión $A_n \in \mathcal{A}_0$ tales que $B \subset \cup A_n$, entonces $B = \cup (B \cap A_n)$ y como ρ es una medida en \mathcal{A}_0 tendremos

$$\rho(B) \leq \sum_n \rho(B \cap A_n) \leq \sum_n \rho(A_n),$$

y por tanto $\rho(B) \leq \mu^*(B)$. ■

Ejemplo 1.4.4 Medida exterior de Lebesgue. En \mathbb{R} , sea $\mathcal{C} = \{(a, b] : a \leq b \in \mathbb{R}\}$ y $\rho(a, b] = b - a$, entonces para $A \subset \mathbb{R}$

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : a_n \leq b_n \in \mathbb{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \right\},$$

es una medida exterior (en el ejercicio (1.4.1) se dan otras clases con las que también se genera m^*).

Ejemplo 1.4.5 Medida exterior de Hausdorff. Sea (Ω, d) un espacio métrico, llamamos *diámetro* de un $B \subset \Omega$ al valor⁹

$$d(B) = \sup \{d(x, y) : x, y \in B\}.$$

Ahora para cada $p > 0$ y $\delta > 0$ definimos la función de conjunto que para cada $A \subset \Omega$ vale,

$$H_{p,\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} d(B_n)^p : A \subset \cup B_n, d(B_n) \leq \delta \right\},$$

(con el convenio $\inf \emptyset = \infty$), las cuales son medidas exteriores por (1.4.3), que verifican

$$\delta \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad H_{p,\delta}(A) \geq H_{p,\epsilon}(A),$$

⁹Con el convenio $\sup \emptyset = 0$, por tanto $d(\emptyset) = 0$.

y por tanto existe el límite, que también es medida exterior

$$H_p(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{p,\delta}(A),$$

y que llamamos *la medida exterior p -dimensional de Hausdorff*¹⁰. Volveremos a las medidas de Hausdorff en las páginas 50 y 175.

1.4.2 Teoremas de extensión de medidas

Aunque una medida exterior μ^* tiene la ventaja de estar definida en todo $\mathcal{P}(\Omega)$, tiene el defecto de no ser numerablemente aditiva, ni siquiera aditiva. Por ello trataremos de encontrar una σ -álgebra, sobre la que sí sea numerablemente aditiva. Veremos que tal σ -álgebra existe y que su construcción se basa en una simple aunque notable condición debida a CARATHEODORY, (aunque el germen de la definición se encuentra en PEANO, ver la introducción).

Definición. Sea μ^* una medida exterior en Ω . Diremos que $E \subset \Omega$ es μ^* -medible si para todo $A \subset \Omega$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Denotaremos con \mathcal{A}_* la familia de los conjuntos μ^* -medibles. Se tiene el siguiente resultado básico.

Lema 1.4.6 *Sea μ^* una medida exterior en Ω , entonces:*

- (a) Si $E \in \mathcal{A}_*$ entonces $E^c \in \mathcal{A}_*$.
- (b) Si $\mu^*(E) = 0$, entonces $E \in \mathcal{A}_*$.
- (c) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}_*$.
- (d) $E \in \mathcal{A}_*$ si y sólo si para cada $A \subset \Omega$, con $\mu^*(A) < \infty$

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Demostración. (a) Obvio. (b) También es obvio pues

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A).$$

(c) Se sigue de (b) y (a).

(d) Como toda medida exterior verifica $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$, basta demostrar la desigualdad contraria (que es automática si $\mu^*(A) = \infty$). ■

¹⁰Para $p = 0$ también vale la definición pero hay que precisarla. Entendemos que $d(\emptyset)^p = 0$, para todo $p \geq 0$ y $d(A)^0 = 1$, para todo $A \neq \emptyset$, en particular debemos entender que $d(\{x\})^0 = 1$. Con estos convenios se tiene que para $p = 0$, H_p es la medida de contar.

Teorema de extensión de Caratheodory 1.4.7 *Sea μ^* una medida exterior en Ω , entonces \mathcal{A}_* es una σ -álgebra, la restricción a ella de μ^* es una medida y $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ es completo. Si además μ^* es la medida exterior generada por una medida ρ de un álgebra \mathcal{A}_0 de Ω , entonces es*

$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_* \quad \text{y} \quad \rho = \mu^* \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_0.$$

Demostración. Veamos en primer lugar que \mathcal{A}_* es un álgebra. Por el Lema anterior $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}_*$ y si $E \in \mathcal{A}_*$ entonces $E^c \in \mathcal{A}_*$. Consideremos $B_1, B_2 \in \mathcal{A}_*$ y demostremos que $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{A}_*$, para ello sea $A \subset \Omega$, entonces usando la medibilidad de los B_i

$$\begin{aligned} \mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2)] + \mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2)^c] &= \\ &= \mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1] + \mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c] + \\ &\quad + \mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2)^c] \\ &= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*[A \cap B_2 \cap B_1^c] + \mu^*[A \cap B_1^c \cap B_2^c] \\ &= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c) \\ &= \mu^*(A). \end{aligned}$$

Ahora bien toda unión numerable de conjuntos E_n del álgebra \mathcal{A}_* se puede poner como unión numerable disjunta de los conjuntos

$$B_1 = E_1, \dots, B_n = E_n \cap E_{n-1}^c \cap \dots \cap E_1^c, \dots$$

del álgebra y para cada $A \subset \Omega$

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2^c) \\ &= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_2) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2^c) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*[A \cap (\bigcap_{i=1}^n B_i^c)] \quad (\text{por ind. en } n) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*[A \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c)], \end{aligned}$$

y tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*[A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)^c] \\ &\geq \mu^*[A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)] + \mu^*[A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)^c] \geq \mu^*(A), \end{aligned}$$

por lo tanto $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}_*$ y \mathcal{A}_* es σ -álgebra. Pero además

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*[A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)^c],$$

y tomando $A = \bigcup B_n$ se sigue la numerable aditividad de μ^* en \mathcal{A}_* , y por tanto es una medida. Que es completo se sigue del Lema.

Supongamos ahora que μ^* es la medida exterior generada por una medida ρ de un álgebra \mathcal{A}_0 de Ω . En (1.4.3) vimos que $\rho = \mu^*$ en \mathcal{A}_0 , falta pues ver que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_*$, para ello sea $E \in \mathcal{A}_0$ y $A \subset \Omega$, por el Lema anterior basta demostrar que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

para ello tomemos $B_n \in \mathcal{A}_0$, un recubrimiento numerable de $A \subset \bigcup B_n$, ahora como $A \cap E \subset \bigcup (B_n \cap E)$ y $A \cap E^c \subset \bigcup (B_n \cap E^c)$, tendremos que

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) &\leq \sum_n \rho(B_n \cap E) + \sum_n \rho(B_n \cap E^c) \\ &= \sum_n \rho(B_n), \end{aligned}$$

y el resultado se sigue. ■

En el caso particular de que ρ sea σ -finita, es decir que exista una sucesión $A_n \in \mathcal{A}_0$, tal que $\Omega = \bigcup A_n$ y $\rho(A_n) < \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la extensión de ρ a la σ -álgebra \mathcal{A}_* es única.

Teorema de extensión de Hahn 1.4.8 *Toda medida σ -finita en un álgebra \mathcal{A}_0 se extiende de modo único a cada σ -álgebra \mathcal{A} entre \mathcal{A}_0 y \mathcal{A}_* .*

Demostración. Sea μ^* la medida exterior generada por ρ y supongamos que λ es una medida en \mathcal{A} que coincide con ρ en \mathcal{A}_0 . Sea $E \in \mathcal{A}$ y $B_n \in \mathcal{A}_0$ tales que $E \subset \bigcup B_n$, entonces como $\bigcup B_n \in \mathcal{A}$

$$\lambda(E) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(B_n),$$

tendremos que $\lambda(E) \leq \mu^*(E)$. Ahora sean $A_n \in \mathcal{A}_0$, tales que $A_n \uparrow \Omega$ y $\lambda(A_n) = \mu^*(A_n) = \rho(A_n) < \infty$, por tanto como

$$\lambda(E \cap A_n) + \lambda(E^c \cap A_n) = \lambda(A_n) = \mu^*(A_n) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E^c \cap A_n),$$

tendremos que $\lambda(E \cap A_n) = \mu^*(E \cap A_n)$, pero entonces

$$\mu^*(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(E \cap A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E \cap A_n) = \lambda(E). \quad \blacksquare$$

Por último observemos que la idea intuitiva de construir $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ tomando complementarios y uniones e intersecciones numerables, en todas las formas posibles, con elementos de \mathcal{C} , sugiere que si \mathcal{C} es un álgebra \mathcal{A}_0 , entonces los conjuntos de \mathcal{A} debieran aproximarse bien por conjuntos de \mathcal{A}_0 . Esto realmente es así como a continuación formalizamos.

Definición. Llamaremos *diferencia simétrica* de dos conjuntos $A, B \subset \Omega$ al conjunto

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

Teorema de aproximación 1.4.9 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea \mathcal{A}_0 un álgebra de conjuntos de Ω tal que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$. Si μ es σ -finita en \mathcal{A}_0 y $\epsilon > 0$, entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$, existe $B \in \mathcal{A}_0$ tal que $\mu(A \triangle B) < \epsilon$.

Demostración. Aplicando los teoremas de extensión de Caratheodory y de Hahn, tendremos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_*$ y $\mu = \mu^*$ en \mathcal{A} , por tanto

$$\mu(A) = \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) : B_n \in \mathcal{A}_0, A \subset \cup B_n \right\},$$

y existe una sucesión $B_n \in \mathcal{A}_0$, tal que $A \subset \cup B_n = B \in \mathcal{A}$ y

$$\mu(A) \leq \mu(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \mu(A) + \frac{\epsilon}{2} < \infty,$$

ahora eligiendo $E_n = \cup_{i=1}^n B_i \in \mathcal{A}_0$ tendremos que $E_n \uparrow B$ y que $\mu(E_n) \rightarrow \mu(B)$. Ahora basta observar que

$$\begin{aligned} \mu(A \triangle E_n) &= \mu(A \cap E_n^c) + \mu(A^c \cap E_n) \\ &\leq \mu(B \cap E_n^c) + \mu(A^c \cap B) \\ &\leq \mu(B) - \mu(E_n) + \mu(B) - \mu(A), \end{aligned}$$

y tomando $\mu(B) - \mu(E_n) \leq \epsilon/2$ se sigue el resultado. \blacksquare

Remitimos al lector a la pág. 21 del ASH donde se da un ejemplo en el que la medida no es σ -finita en el álgebra y los teoremas de Caratheodory y de aproximación no se satisfacen.

Ejercicios

Ejercicio 1.4.1 Demostrar que la medida exterior de Lebesgue en \mathbb{R} , se puede definir en vez de con la clase $\mathcal{C} = \{(a, b]\}$, como vimos en el ejemplo (1.4.4), de la página 22, con cualquiera de las clases $\mathcal{C}_1 = \{(a, b)\}$, $\mathcal{C}_2 = \{[a, b]\}$, $\mathcal{C}_3 = \{[a, b)\}$ y con ρ de cualquier intervalo también la diferencia de extremos.

Ejercicio 1.4.2 Sea μ^* una medida exterior en Ω y λ la medida restricción de μ^* a la σ -álgebra \mathcal{A}_* . Demostrar que:

- (a) $\mu^* \leq \lambda^*$.
- (b) Si μ^* es la medida exterior generada por una medida μ en un álgebra \mathcal{A} , entonces $\mu^* = \lambda^*$.
- (c) Encontrar una medida exterior μ^* en $\Omega = \{0, 1\}$, para la que $\mu^* \neq \lambda^*$.

Ejercicio 1.4.3 Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Demostrar:

- (a) Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $\mu(A \triangle B) = 0$ entonces $\mu(A) = \mu(B)$.
- (b) La relación entre conjuntos medibles $A \simeq B$ si y sólo si $\mu(A \triangle B) = 0$, es de equivalencia.
- (c) En el espacio cociente $\mathcal{X} = \mathcal{A}/\simeq$ la aplicación

$$\rho(A, B) = \mu(A \triangle B),$$

satisface $\rho(A, A^c) = \mu(\Omega)$, por tanto en general $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ toma el valor ∞ , sin embargo define una métrica en el sentido¹¹ de que verifica las tres propiedades habituales. Demostrar que para la topología natural —en la que las bolas abiertas de radio finito son base—, para cada $A \in \mathcal{X}$, los B que están a distancia finita de A es un abierto y que estos abiertos o coinciden o son disjuntos y descomponen \mathcal{X} en componentes abiertas que sí son espacios métricos y son tales que la aplicación $A \in \mathcal{X} \rightarrow A^c \in \mathcal{X}$ es una isometría que lleva una componente en otra (si $\mu(\Omega) = \infty$) y las aplicaciones de $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$

$$(A, B) \rightarrow A \cup B, \quad (A, B) \rightarrow A \cap B, \quad (A, B) \rightarrow A \triangle B,$$

son continuas.

¹¹Observemos que el concepto habitual de métrica exige que $d(x, y) < \infty$, aunque no es esencial.

1.5 Compleción

Definición. Diremos que un medible B de un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es *nulo* si $\mu(B) = 0$ y diremos que el espacio es *completo* si son medibles los subconjuntos de los conjuntos medibles nulos.

Ejemplo 1.5.1 Dada una medida exterior μ^* en Ω , vimos en el Teorema de Carathedory (1.4.7) de la página 24, que $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ era completo.

Definición. Diremos que una propiedad *se verifica casi seguro respecto de μ* (c.s. (\mathcal{A}, μ) ó c.s. si no hay confusión), si el conjunto C de puntos donde no se verifica la propiedad está en un medible, $C \subset B \in \mathcal{A}$ con $\mu(B) = 0$.

Nota 1.5.2 Observemos que C no es necesariamente medible, pero sí lo es si el espacio es completo. En cualquier caso, si C es medible, $\mu(C) = 0$.

Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, podemos completarlo siguiendo la siguiente construcción. Consideramos

$$\mathcal{A}_\mu = \{E \subset \Omega : \exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset E \subset A \cup B \text{ y } \mu(B) = 0\},$$

y extendemos μ a \mathcal{A}_μ de la forma

$$\mu(E) = \mu(A),$$

para cada $A \in \mathcal{A}$ como en la definición (demuestre el lector que está bien definida, es decir que si $A \subset E \subset A \cup B$ y $C \subset E \subset C \cup D$, con $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ y $\mu(B) = \mu(D) = 0$, entonces $\mu(A) = \mu(C)$). Se tiene entonces el siguiente resultado.

Teorema 1.5.3 $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \mu)$ es un espacio de medida completo al que llamaremos *compleción* de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Demostración. En primer lugar se tiene que $\Omega \in \mathcal{A}_\mu$. Veamos que es cerrado por paso al complementario, si $E \in \mathcal{A}_\mu$, con $A \subset E \subset A \cup B$, $A, B \in \mathcal{A}$ y $\mu(B) = 0$ entonces $\mu(A^c \cap B) = 0$ y

$$(A \cup B)^c \subset E^c \subset A^c = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B)^c \cup (A^c \cap B),$$

por tanto $E^c \in \mathcal{A}_\mu$. Veamos ahora que es cerrado para uniones numerables; consideremos una sucesión $E_n \in \mathcal{A}_\mu$, con $A_n \subset E_n \subset A_n \cup B_n$, $A_n, B_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(B_n) = 0$ entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right),$$

y $\cup E_n \in \mathcal{A}_\mu$. Veamos ahora que μ es una medida en \mathcal{A}_μ . Obviamente es no negativa y $\mu(\emptyset) = 0$, falta ver la numerable aditividad. Consideremos una sucesión $E_n \in \mathcal{A}_\mu$, de conjuntos disjuntos entonces en los términos anteriores los A_n también son disjuntos y

$$\mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right] = \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Por último veamos que es completo. Sea $E \in \mathcal{A}_\mu$ tal que $\mu(E) = 0$ y $C \subset E$. Ahora como existen $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset E \subset A \cup B$, $\mu(B) = 0$ y $\mu(E) = \mu(A) = 0$, tendremos que $\emptyset \subset C \subset A \cup B$ y $\mu(A \cup B) = 0$, por tanto $C \in \mathcal{A}_\mu$. ■

La extensión $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$, de $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu)$ en el teorema (1.4.7) es completa por el Lema (1.4.6). A continuación veremos de quien es completación $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$.

Teorema 1.5.4 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu)$ un espacio de medida con \mathcal{A}_0 álgebra y μ σ -finita. Entonces el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ es la completación de $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}_0), \mu^*)$.*

Demostración. Denotemos la completación de $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}_0), \mu^*)$ con $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \mu^*)$ y veamos en primer lugar que $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_*$:

Sea $A \subset E \subset A \cup B$, con $A, B \in \sigma(\mathcal{A}_0)$, y $\mu^*(B) = 0$, entonces $E = A \cup (E \cap B)$ y por completitud (Lema (1.4.6)) $(E \cap B) \in \mathcal{A}_*$, ahora como $\sigma(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{A}_*$ tendremos que $E \in \mathcal{A}_*$.

Veamos ahora la inclusión contraria, en primer lugar observemos que para cada $A \subset \Omega$

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, B_n \in \mathcal{A}_0\right\} \\ &= \inf\{\mu^*(B) : A \subset B \in \sigma(\mathcal{A}_0)\}, \\ &= \min\{\mu^*(B) : A \subset B \in \sigma(\mathcal{A}_0)\}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se tiene porque dados $A \subset \cup B_n$, $B_n \in \mathcal{A}_0$, tendremos que $B = \cup B_n \in \sigma(\mathcal{A}_0)$ y

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n),$$

y la tercera igualdad porque el ínfimo se alcanza ya que podemos considerar para cada n un $B_n \in \sigma(\mathcal{A}_0)$, con $A \subset B_n$ tal que $\mu^*(B_n) \leq \mu^*(A) + 1/n$ y ahora $A \subset \cap B_n = B \in \sigma(\mathcal{A}_0)$, por tanto $\mu^*(A) = \mu^*(B)$. En definitiva tenemos que dado cualquier $A \subset \Omega$, existe un $B \in \sigma(\mathcal{A}_0)$, tal que $A \subset B$ y $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.

Como consecuencia tenemos que si $E \in \mathcal{A}_*$, entonces existe un $B \in \sigma(\mathcal{A}_0)$, tal que $E \subset B$ y $\mu^*(B \setminus E) = 0$. Esto es obvio si $\mu^*(E) < \infty$, pues $\mu^*(B) = \mu^*(E) + \mu^*(B \setminus E)$. En general consideremos una sucesión $A_n \in \mathcal{A}_0$, tal que $\mu(A_n) < \infty$ y la $\cup A_n = \Omega$, entonces por el caso finito como $E_n = E \cap A_n \in \mathcal{A}_*$ y $\mu^*(E_n) < \infty$, existen $B_n \in \sigma(\mathcal{A}_0)$ tales que

$$E_n \subset B_n, \quad \mu^*(B_n \setminus E_n) = 0,$$

por tanto $E = \cup E_n \subset B = \cup B_n \in \sigma(\mathcal{A}_0)$ y $\mu^*(B \setminus E) = 0$, pues

$$B \cap E^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap E^c) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap E_n^c),$$

ahora el mismo argumento aplicado a A^c prueba que existe $A^c \in \sigma(\mathcal{A}_0)$ tal que $E^c \subset A^c$, es decir $A \subset E$ y $\mu^*(E \setminus A) = \mu^*(A^c \setminus E^c) = 0$. Se sigue que $A \subset E \subset B$ y $\mu^*(B \setminus A) = 0$, por tanto $E \in \mathcal{A}_\mu$. ■

Nota 1.5.5 Debe observarse que aunque reemplazar un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ por su compleción $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \mu)$, nos quita ciertos problemas, lo cierto es que introduce otros. Por ejemplo que la σ -álgebra \mathcal{A}_μ es a menudo más complicada que la original, o que al estar la σ -álgebra \mathcal{A}_μ determinada por la medida μ , si en nuestro espacio tenemos dos medidas distintas, en general obtendremos dos σ -álgebras compleción distintas, por lo que las medidas extendidas no tendrían en principio el mismo dominio. Esta es una razón que justifica que en los hechos básicos de la teoría de la medida, suelen evitarse argumentos que dependan de la compleción.

Ejercicios

Ejercicio 1.5.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea \mathcal{A}_μ su compleción y μ^* la medida exterior generada por μ . Demostrar que para cada $A \subset \Omega$:

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, A \subset B\},$$

y que si definimos la “medida interior”

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\},$$

entonces si $A \in \mathcal{A}_\mu$ se tiene que $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$ y recíprocamente si $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$ entonces $A \in \mathcal{A}_\mu$.

1.6 Medidas de Lebesgue–Stieltjes

1.6.1 Medidas de Lebesgue–Stieltjes en \mathbb{R} .

El teorema de extensión de Caratheodory–Hahn, nos da la posibilidad de construir una amplia clase de medidas en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definición. Llamaremos *función de distribución* a toda función

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

monótona creciente y continua a la derecha. Llamaremos *medida de Lebesgue–Stieltjes* en \mathbb{R} , a toda medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finita en cada compacto (equivalentemente finita en cada intervalo acotado).

A continuación veremos que existe una biyección entre ambos conceptos, siempre que identifiquemos cada dos funciones de distribución que difieran en una constante.

Teorema 1.6.1 Sea μ una medida de Lebesgue–Stieltjes en \mathbb{R} . Entonces cada función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que para todo $a < b \in \mathbb{R}$ verifique

$$F(b) - F(a) = \mu(a, b],$$

es una función de distribución. Existen infinitas y cada dos difieren en una constante.

Demostración. Es monótona pues si $a < b$, $F(b) - F(a) = \mu(a, b] \geq 0$ y continua a la derecha pues para $x < x_n$ y $x_n \rightarrow x^+$ tenemos $(x, x_n] \downarrow \emptyset$ y como $\mu(x, x_1] < \infty$

$$F(x_n) = F(x) + \mu(x, x_n] \rightarrow F(x).$$

Es obvio que si F y G satisfacen el resultado difieren en una constante, pues para $x < y$,

$$F(y) - F(x) = \mu(x, y] = G(y) - G(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) - G(x) = F(y) - G(y),$$

y que todas son traslaciones $F_0 + c$ de una de ellas, por ejemplo de

$$F_0(x) = \begin{cases} \mu(0, x], & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -\mu(x, 0], & \text{si } x < 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Veamos ahora el recíproco, que dada una función de distribución $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, existe una única medida $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ que para $a < b \in \mathbb{R}$, verifica

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a).$$

Tal medida la conocemos sobre los acotados de la clase elemental

$$\mathcal{C} = \{(a, b], (a, \infty), (-\infty, b] : a \leq b \in \mathbb{R}\}.$$

Demostraremos en una serie de pasos, primero que μ se extiende de un modo único al álgebra $\mathcal{A}_0 = \alpha(\mathcal{C})$ formada por las uniones finitas disjuntas de elementos de la clase elemental \mathcal{C} y después a los borelianos, sabiendo que $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definimos $\mu(\emptyset) = 0$ (observemos que si $b_n \rightarrow a^+$, entonces $(a, b_n] \downarrow \emptyset$ y $\mu(a, b_n] = F(b_n) - F(a) \rightarrow 0$).

Ahora si un semiintervalo acotado $(a, b]$ es unión finita disjunta de semiintervalos $(a_i, b_i]$, ordenándolos se tiene necesariamente que

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \cdots < b_{n-1} = a_n < b_n = b,$$

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(b_i) - F(a_i)] = \sum_{i=1}^n \mu(a_i, b_i],$$

esto nos permite definir μ de modo único en los acotados $A \in \mathcal{A}_0$, como $\mu[A] = \sum_{i=1}^n \mu(I_i)$, para $A = \bigcup_{i=1}^n I_i$, pues si $\bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{j=1}^m J_j$ se tiene por lo anterior que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu(I_i) &= \sum_{i=1}^n \mu(\bigcup_{j=1}^m (I_i \cap J_j)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(I_i \cap J_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^m \mu(J_j), \end{aligned}$$

de esto se sigue que μ es aditiva en los acotados de \mathcal{A}_0 , pues si $A, B \in \mathcal{A}_0$ son disjuntos y acotados $A = \bigcup_{i=1}^n I_i$, $B = \bigcup_{j=1}^m J_j$ y

$$\mu(A \cup B) = \sum_{i=1}^n \mu(I_i) + \sum_{j=1}^m \mu(J_j) = \mu(A) + \mu(B),$$

de donde a su vez se sigue que para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\mu_m: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, \infty], \quad \mu_m(A) = \mu(A \cap (-m, m]),$$

es una medida aditiva y finita, para las que $\mu_m \leq \mu_{m+1}$.

Ahora observemos que si existe la medida que buscamos, debe satisfacer $\mu(A_m) \rightarrow \mu(A)$ si $A_m \uparrow A$, por tanto sólo hay una forma de extenderla al álgebra y es definiéndola por ejemplo

$$(1.2) \quad \mu: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, \infty], \quad \mu(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A \cap (-m, m]) = \lim \mu_m(A),$$

pues $A \cap (-m, m] = A_m \uparrow A$. Ahora, por el ejercicio (1.3.9), para demostrar que μ es medida basta demostrar que cada μ_m es numerablemente aditiva, para ello necesitamos un par de resultados previos.

Lema 1.6.2 *Para cada $A \in \mathcal{A}_0$ acotado y todo $\epsilon > 0$, existe un $B \in \mathcal{A}_0$, con $\overline{B} \subset A$ tal que $\mu(A \setminus B) < \epsilon$.*

Demostración. Como A es unión finita disjunta de semiintervalos acotados, basta demostrarlo para un semiintervalo acotado $(a, b]$ con $-\infty < a < b < \infty$. Como F es continua a la derecha, podemos tomar $a_n \rightarrow a^+$, tal que $[a_n, b] \subset (a, b]$ y

$$\mu((a, b] \setminus (a_n, b]) = \mu(a, a_n] = F(a_n) - F(a) \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Lema 1.6.3 *Dada una colección de compactos K_i en un espacio topológico Hausdorff, tales que $\cap K_i = \emptyset$, entonces existe una colección finita de ellos K_{i_1}, \dots, K_{i_n} , tales que $\cap_{j=1}^n K_{i_j} = \emptyset$.*

Demostración. En un Hausdorff todo compacto es cerrado, pues si $x \notin K$ podemos tomar para cada $y \in K$ sendos entornos disjuntos V_x^y y V_y de x y y respectivamente. Ahora K podemos recubrirlo con un número finito de los V_y , que corresponden a un número finito de V_x^y cuya intersección es un entorno de x que no corta a ningún V_y y por tanto a K .

Consideremos ahora K_{i_0} , uno cualquiera de los compactos, entonces

$$\begin{aligned} \bigcap_j K_j = \emptyset &\Rightarrow K_{i_0} \subset \left(\bigcap_{j \neq i_0} K_j \right)^c = \bigcup_{j \neq i_0} K_j^c \\ &\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n : K_{i_0} \subset \bigcup_{j=1}^n K_{i_j}^c \Rightarrow \bigcap_{j=0}^n K_{i_j} = \emptyset. \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 1.6.4 *La función de conjunto $\mu: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, \infty]$ es la única medida que satisface $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$, además es una medida σ -finita, que diremos generada por F .*

Demostración. Basta demostrar según dijimos, que las medidas aditivas finitas μ_m son medidas. Ahora por (1.3.15) basta demostrar que si $A_n \in \mathcal{A}_0$ y $A_n \downarrow \emptyset$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m(A_n) = 0$.

Sea $\epsilon > 0$, por el primer Lema para cada $C_n = A_n \cap (-m, m]$ existe un $B_n \in \mathcal{A}_0$, $\overline{B_n} \subset C_n$ y $\mu_m(C_n \setminus B_n) = \mu(C_n \setminus B_n) < \epsilon 2^{-n}$. Ahora como $\cap \overline{B_n} \subset \cap A_n = \emptyset$ y los $\overline{B_n}$ son compactos tendremos por el Lema (1.6.3) que existe un N tal que

$$\bigcap_{n=1}^N B_n \subset \bigcap_{n=1}^N \overline{B_n} = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{n=1}^N B_n^c = \mathbb{R},$$

y como A_n es decreciente, también C_n y para todo $n \geq N$

$$\begin{aligned} \mu_m(A_n) &= \mu_m(C_n) = \mu_m \left(C_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^N B_i^c \right) \right) = \mu_m \left(\bigcup_{i=1}^N (C_n \cap B_i^c) \right) \\ &\leq \mu_m \left(\bigcup_{i=1}^N (C_i \cap B_i^c) \right) \leq \sum_{i=1}^N \mu_m(C_i \setminus B_i) \leq \epsilon, \end{aligned}$$

por tanto $\mu_m(A_n) \rightarrow 0$. Por último μ es σ -finita pues $\mu(-m, m] = F(m) - F(-m) < \infty$. ■

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.6.5 *Dada una función de distribución F en \mathbb{R} , existe una única medida μ en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$, para cada $a < b$ de \mathbb{R} y es una medida de Lebesgue–Stieltjes.*

Demostración. Por el resultado anterior existe una única medida, definida en el álgebra \mathcal{A}_0 , que satisface la propiedad. Además es σ -finita, por tanto se sigue de los Teoremas de Caratheodory y Hahn que tiene una única extensión a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y es de Lebesgue–Stieltjes. ■

Nota 1.6.6 Observemos que para cada punto $x \in \mathbb{R}$

$$\mu\{x\} = \lim \mu(x - 1/n, x] = F(x) - F(x^-),$$

y por tanto, como F es continua a la derecha, es decir $F(x) = F(x^+)$, se tiene que

$$F \text{ es continua en } x \iff \mu\{x\} = 0.$$

Podemos expresar la medida de cualquier intervalo en términos de la función de distribución, por ejemplo

$$\begin{aligned} \mu(a, b) &= \lim \mu(a, b - 1/n] = F(b^-) - F(a), \\ \mu[a, b) &= \mu(\{a\}) + \mu(a, b) = F(b^-) - F(a^-), \\ \mu[a, \infty) &= F(\infty) - F(a^-), \quad \mu(-\infty, \infty) = F(\infty) - F(-\infty). \end{aligned}$$

Nota 1.6.7 Ahora podemos generar ya un buen número de medidas en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por ejemplo si

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

es no negativa e integrable (Riemann por ahora), sobre cada intervalo finito (eso significa que la integral en ese intervalo es finita), podemos definir la función de distribución (continua)

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)dt, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -\int_x^0 f(t)dt, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

y se puede construir la medida μ de Lebesgue–Stieltjes asociada, que satisface

$$\mu(a, b] = \int_a^b f(t) dt.$$

Ejemplo 1.6.8 La medida de Lebesgue unidimensional. Tomando en particular la función de distribución

$$F(x) = x, \quad \mu(a, b] = b - a,$$

la correspondiente medida σ -finita $\mu: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, \infty]$ define la *medida exterior de Lebesgue* que para $A \subset \mathbb{R}$ vale

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \inf \left\{ \sum \mu(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_0, A \subset \cup A_i \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum \mu(I_i) : I_i \in \mathcal{C}, A \subset \cup I_i \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum (b_i - a_i) : a_i \leq b_i, A \subset \cup (a_i, b_i] \right\}, \end{aligned}$$

la cual define una σ -álgebra \mathcal{A}_* .

Definición. Llamamos *Lebesgue medibles* a los conjuntos de esta σ -álgebra \mathcal{A}_* , que denotaremos $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ y *medida de Lebesgue* a la restricción $m = \mu|_{\mathcal{A}_*}$.

Tenemos las inclusiones $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y surgen dos preguntas de forma natural:

1) ¿Es $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R})$?. Contestaremos negativamente a esta cuestión en (2.2.9), pág.70. No obstante como μ es σ -finita sabemos por (1.5.4), pág.29, que $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ es la σ -álgebra compleción de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, con la medida de Lebesgue, así que un conjunto Lebesgue medible es la unión de un Borel con un subconjunto de un Borel de medida de Lebesgue nula.

2) ¿Es $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$?. Esta cuestión que nos lleva a la base de la teoría de conjuntos, será analizada más adelante en (1.6.25), pág.49 y comentada en el apéndice final del tema.

1.6.2 Medidas de Lebesgue–Stieltjes en \mathbb{R}^n .

Vamos a considerar ahora las medidas de *Lebesgue–Stieltjes* y las funciones de distribución en \mathbb{R}^n .

Definición. Llamaremos *rectángulo (acotado)* en \mathbb{R}^n al producto de n intervalos (acotados) de \mathbb{R} . Llamaremos *semi-rectángulo cerrado* a la

derecha (a menudo lo llamaremos simplemente *semi-rectángulo*), de \mathbb{R}^n al producto $\prod I_i$, de n semiintervalos $I_i \in \mathcal{C}$ de \mathbb{R} , es decir del tipo considerado en el caso unidimensional

$$(-\infty, b_i], \quad (a_i, b_i], \quad (a_i, \infty),$$

y denotaremos con \mathcal{C}^n el conjunto de estos semi-rectángulos. Por ejemplo en \mathbb{R}^2 son los conjuntos de uno de los nueve tipos

$(-\infty, b_1] \times (a_2, \infty)$	$(a_1, b_1] \times (a_2, \infty)$	$(a_1, \infty) \times (a_2, \infty)$
$(-\infty, b_1] \times (a_2, b_2]$	$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$	$(a_1, \infty) \times (a_2, b_2]$
$(-\infty, b_1] \times (-\infty, b_2]$	$(a_1, b_1] \times (-\infty, b_2]$	$(a_1, \infty) \times (-\infty, b_2]$

Nota 1.6.9 Para cada $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ denotaremos

$$(-\infty, x] = \prod_{i=1}^n (-\infty, x_i].$$

Dados $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n$, diremos que $a < b$ ($a \leq b$) si $a_i < b_i$ ($a_i \leq b_i$) para $i = 1, \dots, n$. Si para algún i , $a_i = b_i$, tendremos que $(a, b] = \prod (a_i, b_i] = \emptyset$ y podemos entender el conjunto vacío como un semi-rectángulo.

Nota 1.6.10 Recordemos que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la σ -álgebra generada por los abiertos de \mathbb{R}^n y por (1.2.24) también es la generada por los semi-rectángulos de \mathbb{R}^n , $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n)$. Además los semi-rectángulos tienen la propiedad de formar una clase elemental, por tanto sus uniones finitas disjuntas forman un álgebra que denotaremos con \mathcal{A}_0 .

Definición. Diremos que una medida $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, es de *Lebesgue–Stieltjes* si es finita en los compactos (equivalentemente en los acotados) de \mathbb{R}^n .

La noción de función de distribución en \mathbb{R}^n es más complicada que en \mathbb{R} .

Definición. Para cada $a = (a_i) \leq b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ definimos $S_{ab} = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i = a_i \text{ ó } x_i = b_i\}$ el conjunto de *esquinas del rectángulo definido por a y b* y la aplicación

$$\sigma: S_{ab} \longrightarrow \{-1, 1\},$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i = a_i \text{ para un n}^\circ \text{ par de } i, \\ -1, & \text{si } x_i = a_i \text{ para un n}^\circ \text{ impar de } i, \end{cases}$$

Definición. Diremos que $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función de distribución* si:

- a) Es *continua a la derecha*, es decir si $x \leq \dots \leq x_{n+1} \leq x_n$ y $x_n \rightarrow x$, entonces $F(x_n) \rightarrow F(x)$.
- b) Es *monótona creciente* en el siguiente sentido, para $a \leq b \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F(x) \geq 0.$$

Por ejemplo para $n = 3$, que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F(x) &= F(b_1, b_2, b_3) - F(a_1, b_2, b_3) - F(b_1, a_2, b_3) + \\ &\quad + F(a_1, a_2, b_3) - F(b_1, b_2, a_3) + F(a_1, b_2, a_3) + \\ &\quad + F(b_1, a_2, a_3) - F(a_1, a_2, a_3) \geq 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.11 Dadas n funciones de distribución en \mathbb{R} , F_1, \dots, F_n ,

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n),$$

es una función de distribución en \mathbb{R}^n , pues es continua a la derecha y es monótona, pues por inducción en n se demuestra la última igualdad en

$$\sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F(x) = \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F_1(x_1) \cdots F_n(x_n) = \prod_{i=1}^n [F_i(b_i) - F_i(a_i)].$$

Ejemplo 1.6.12 Para el caso particular $F_i(x) = x$, para $i = 1, \dots, n$, tenemos la función de distribución $F(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$.

Como para el caso unidimensional tenemos una biyección entre medidas de *Lebesgue-Stieltjes* y *funciones de distribución*, si identificamos funciones de distribución que dan el mismo valor a $\sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F(x)$, para todo semirectángulo $(a, b]$ —observemos que si F es función de

distribución también lo es $F + c$, para cada $c \in \mathbb{R}$, pues se tiene que $\sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) = 0$, además por esta misma razón F y $F + c$ están identificadas pues ambas funciones dan el mismo valor a la expresión—. Sin embargo encontrar una función de distribución de la clase de equivalencia a partir de la medida no es inmediato en general, por ello optaremos por dar los siguientes resultados que serán útiles en Teoría de Probabilidades.

Teorema 1.6.13 *Sea μ una medida finita en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $F(x) = \mu(-\infty, x]$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ es una función de distribución que verifica $\sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x)F(x) = \mu(a, b]$, para cada $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $a < b$.*

Demostración. La continuidad a la derecha se sigue por ser μ una medida finita, pues si $x_n \downarrow x$, con $x_{n+1} \leq x_n$, entonces $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$ y $F(x_n) \rightarrow F(x)$. Que es monótona creciente se sigue de

$$\begin{aligned}
 \mu(a, b] &= \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]) \\
 &= \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (-\infty, b_n]) - \\
 &\quad - \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]) \\
 &= \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (-\infty, b_{n-1}] \times (-\infty, b_n]) - \\
 &\quad - \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (-\infty, a_{n-1}] \times (-\infty, b_n]) - \\
 &\quad - \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (-\infty, b_{n-1}] \times (-\infty, a_n]) + \\
 &\quad + \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (-\infty, a_{n-1}] \times (-\infty, a_n]) = \\
 &= \cdots = \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) \mu((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]) \\
 &= \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F(x). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

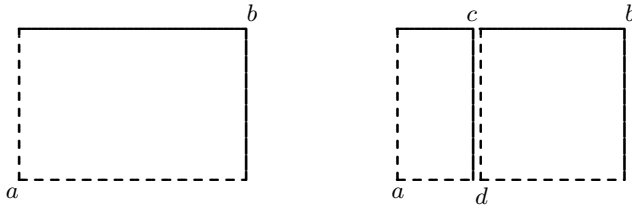
Teorema 1.6.14 *Dada F función de distribución en \mathbb{R}^n , hay una única medida μ en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\mu(a, b] = \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x)F(x)$, para cada semi-rectángulo acotado $(a, b]$. Además μ es de Lebesgue–Stieltjes.*

Demostración. Como en el caso unidimensional construiremos en una serie de pasos la medida. En primer lugar la hipótesis nos la da en los semi-rectángulos acotados

$$\mu(a, b] = \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x)F(x),$$

con $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}^n$; y definimos $\mu(\emptyset) = 0$. Ahora observamos que es aditiva en el siguiente sentido. Dados $a = (a_i) < b = (b_i)$ y $a_j < e_j < b_j$

para un j , se tiene



$$\begin{aligned}(a, b] &= (a_1, b_1] \times \cdots \times ((a_j, e_j] \cup (e_j, b_j]) \times \cdots \times (a_n, b_n] \\ &= (a, c] \cup (d, b],\end{aligned}$$

para $c = (c_i)$ y $d = (d_i)$ con

$$c_i = \begin{cases} b_i & \text{si } i \neq j \\ e_j & \text{si } i = j, \end{cases} \quad d_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \neq j \\ e_j & \text{si } i = j, \end{cases}$$

por tanto

$$\begin{aligned}S_{ac} &= \{x : x_i = a_i \text{ ó } b_i \ (i \neq j) \text{ y } x_j = a_j \text{ ó } e_j\}, \\ S_{db} &= \{x : x_i = a_i \text{ ó } b_i \ (i \neq j) \text{ y } x_j = e_j \text{ ó } b_j\},\end{aligned}$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}S_{ac} \cap S_{db} &= \{x : x_i = a_i \text{ ó } b_i \ (i \neq j) \text{ y } x_j = e_j\} \\ S_{ac} \cup S_{db} &= S_{ab} \cup (S_{ac} \cap S_{db})\end{aligned}$$

siendo la unión de la derecha disjunta, y se demuestra fácilmente que

$$\mu(a, b] = \mu(a, c] + \mu(d, b],$$

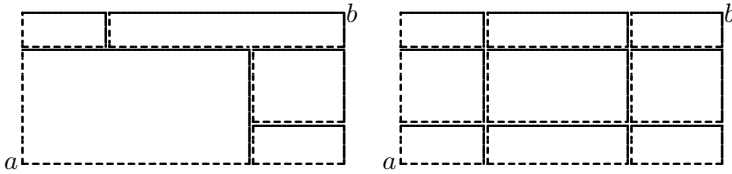
pues si $x \in S_{ac} \cap S_{db}$, los signos $\sigma_{ac}(x)$ y $\sigma_{db}(x)$, correspondientes a $F(x)$ en $\mu(a, c]$ y en $\mu(d, b]$ se cancelan. Ahora aplicando sucesivamente este argumento se tiene que dada una partición entera del semi-rectángulo acotado $(a, b]$, es decir del tipo

$$\begin{aligned}(a, b] &= \prod_{i=1}^n (a_i, b_i] = \prod_{i=1}^n \left((a_i, a'_i] \cup (a'_i, a_i^{(2)}] \cup \cdots \cup (a_i^{(k_i-1)}, b_i] \right) \\ &= \bigcup_{j_1=1}^{k_1} \cdots \bigcup_{j_n=1}^{k_n} \prod_{i=1}^n (a_i^{(j_i-1)}, a_i^{(j_i)}], \quad \text{para } a_i = a_i^{(0)} \text{ y } b_i = a_i^{(k_i)}\end{aligned}$$

como unión disjunta de $k_1 \cdots k_n$ semi-rectángulos acotados, tendremos que

$$\mu(a, b] = \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} \mu\left(\prod_{i=1}^n \left(a_i^{(j_i-1)}, a_i^{(j_i)}\right]\right),$$

es decir es aditiva. Esto implica que si un semi-rectángulo acotado $R = (a, b]$ es unión finita disjunta de semi-rectángulos acotados R_i , entonces $\mu(R) = \sum \mu(R_i)$, lo cual se demuestra considerando una partición entera de $(a, b]$, de la que se pueden seleccionar particiones enteras de cada R_i



esto nos permite extender μ a las uniones finitas disjuntas de semirrectángulos acotados $\mu(\cup_{i=1}^k R_i) = \sum \mu(R_i)$, de este modo μ es aditiva en los acotados de \mathcal{A}_0 y cada $\mu_m(A) = \mu(A \cap (-m, m]^n)$ es aditiva y finita en \mathcal{A}_0 . Ahora si demostramos que son medidas también lo será la única forma de extender μ a \mathcal{A}_0

$$\mu(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m(A).$$

Esto se hace como en el caso unidimensional demostrando primero que para cada $A \in \mathcal{A}_0$ acotado y cada $\epsilon > 0$ existe un $B \in \mathcal{A}_0$, con $\bar{B} \subset A$ y $\mu(A \setminus B) < \epsilon$, y como A es unión finita disjunta de semi-rectángulos acotados, bastará demostrarlo para $A = (a, b]$ un semi-rectángulo acotado, en cuyo caso se tiene que si $a < a^{(k+1)} \leq a^{(k)}$ y $a^{(k)} \rightarrow a$, entonces para $B_k = (a^{(k)}, b]$, $\bar{B}_k = [a^{(k)}, b] \subset (a, b]$ y

$$\mu(B_k) = \sum_{x \in S_{a^{(k)}b}} \sigma_{a^{(k)}b}(x) F(x) \rightarrow \sum_{x \in S_{ab}} \sigma_{ab}(x) F(x) = \mu(A),$$

pues F es continua a la derecha y cada esquina de $B_k = (a^{(k)}, b]$, (por ejemplo la sucesión de esquinas $x^{(k)} = (a_1^{(k)}, b_2, \dots, b_n)$) converge a la esquina $(x = (a_1, b_2, \dots, b_n))$ de $(a, b]$ y $x \leq x^{(k)}$, por tanto $F(x^{(k)}) \rightarrow F(x)$ y el signo de $x^{(k)}$ coincide con el de x . Por tanto como μ es aditiva y $\mu(A) < \infty$, $\mu(A \setminus B_k) = \mu(A) - \mu(B_k) \rightarrow 0$. Ahora que las μ_m son medidas se demuestra como en el caso unidimensional. Por tanto

$\mu: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, \infty]$ es una medida σ -finita y se extiende de un único modo a una medida en los borelianos, y es de Lebesgue–Stieltjes ya que

$$\mu((-m, m]^n) < \infty. \quad \blacksquare$$

Nota 1.6.15 Observemos que el teorema de Caratheodory construye la medida exterior $\mu^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, asociada a μ , de la forma

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_0, A \subset \bigcup A_i \right\} \\ (1.3) \quad &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) : R_i \in \mathcal{C}^n, A \subset \bigcup R_i \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) : R_i \in \mathcal{C}^n, \text{ acotados}, A \subset \bigcup R_i \right\} \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de que todo $R \in \mathcal{C}^n$ no acotado puede ponerse como unión numerable disjunta de semi-rectángulos acotados.

Ejemplo 1.6.16 La medida de Lebesgue n -dimensional. Consideremos la función de distribución $F(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$, entonces su medida asociada en los semi-rectángulos vale

$$\mu(a, b] = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n),$$

y el teorema de Caratheodory–Hahn construye el espacio de medida completo correspondiente

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_*, \mu^*) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m).$$

Definición. A m la llamamos la *medida de Lebesgue n -dimensional* y los conjuntos de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ los llamamos *Lebesgue medibles de \mathbb{R}^n* . Además ese espacio es la completación de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m)$, pues μ es σ -finita.

1.6.3 Propiedades de la medida de Lebesgue.

Veamos algunas propiedades básicas de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

Teorema 1.6.17 *Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $B + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(B) = m(B + x)$. Además si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $B + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. En primer lugar $\mu(a, b] = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ es invariante por traslaciones en los semi-rectángulos acotados, y se sigue de (1.3) que también lo es la medida exterior que genera $\mu^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$. Por tanto para cualquier $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu^*(A) = \mu^*(A + x)$, ahora si $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, tendremos que para cualquier $E = A + x \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \\ &= \mu^*((A \cap B) + x) + \mu^*((A \cap B^c) + x) \\ &= \mu^*(E \cap (B + x)) + \mu^*(E \cap (B^c + x)) \\ &= \mu^*(E \cap (B + x)) + \mu^*(E \cap (B + x)^c), \end{aligned}$$

y por tanto $B + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(B) = \mu^*(B) = \mu^*(B + x) = m(B + x)$.

Que la traslación $B + x$ de un boreliano B es un boreliano, es consecuencia de que $y \in \mathbb{R}^n \rightarrow y + x \in \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. ■

Además la medida de Lebesgue en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la única medida de Lebesgue–Stieltjes (salvo un factor de proporcionalidad), no nula e invariante por traslaciones.

Teorema 1.6.18 *Sea μ una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, invariante por traslaciones y tal que $\mu((0, 1]^n) < \infty$. Entonces existe $c \geq 0$, tal que $\mu(A) = cm(A)$, para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Consideremos $B = (0, 1]^n$, el semi-rectángulo unidad, y sea $c = \mu(B)$. Si $c = 0$, poniendo \mathbb{R}^n como unión numerable de cubos $B + z$, con $z \in \mathbb{Z}^n$, tendríamos $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\mu = 0$. Si $c > 0$, veamos que $\lambda = (1/c)\mu$ es la medida de Lebesgue; observemos que $\lambda(B) = m(B)$ y que ambas son invariantes por traslaciones, por lo que si para cada $k \in \mathbb{N}$, dividimos cada $(0, 1]$ en k intervalos disjuntos

$$\left(0, \frac{1}{k}\right], \left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right], \dots, \left(\frac{k-1}{k}, 1\right],$$

B se descompone en unión disjunta de k^n subcubos B_i , que son traslaciones de $(0, 1/k]^n$, por lo que λ y m coinciden en cada B_i , pues

$$k^n \lambda(B_i) = \sum_{i=1}^{k^n} \lambda(B_i) = \lambda(B) = m(B) = k^n m(B_i),$$

de donde se sigue que ambas coinciden en los semi-rectángulos cúbicos de lado $1/k$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y por aditividad en cada semi-rectángulo

$(a, b]$ con $b - a \in \mathbb{Q}^n$, pues si $a = 0$ y $b = (m_i/k_i) \in \mathbb{Q}^n$, podemos expresar $(0, b] = \prod (0, \frac{m_i}{k_i}]$ como unión finita disjunta de semi-rectángulos cúbicos de lado $1/k$, con $k = k_1 \cdots k_n$, por tanto λ y m coinciden sobre ellos y por traslación sobre todos los semi-rectángulos $(a, b]$ con $b - a \in \mathbb{Q}^n$. Por tanto coinciden sobre todos los semi-rectángulos $(a, b]$, pues podemos tomar una sucesión $(a_m, b] \uparrow (a, b]$, con $b - a_m \in \mathbb{Q}^n$. Como consecuencia se tiene que coinciden en el álgebra \mathcal{A}_0 , en el que son σ -finitas y por el Teorema de Hahn en todos los borelianos. ■

1.6.4 Regularidad.

Veamos algunas propiedades de aproximación de la medida de Lebesgue, de las medidas de *Lebesgue-Stieltjes* y de las σ -finitas.

Definición. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff. Diremos que una medida μ en los borelianos $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ es *regular interior* en $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ si

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\},$$

diremos que es *regular exterior* en E si

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A) : A \text{ abierto y } E \subset A\}.$$

Diremos que μ es *regular* si es finita en los compactos y es regular exterior y regular interior en todo boreliano.

Se tienen las siguientes propiedades de una medida de Borel μ en un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$:

Proposición 1.6.19 (a) μ es regular interior en todo σ -compacto.

(b) Sea $A_n \uparrow A$. Si μ es regular interior en A_n , entonces es regular interior en A . Si μ es regular exterior en A_n , entonces es regular exterior en A .

Demostración. (a) Todo σ -compacto E es unión expansiva de compactos $K_n \uparrow E$ —pues la unión finita de compactos es compacto—, y $\mu(K_n) \uparrow \mu(E)$.

(b) Es regular interior pues $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$ y

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &= \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto y } K \subset A_n\} \\ &\leq \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto y } K \subset A\} \leq \mu(A) \end{aligned}$$

Si $\mu(A) = \infty$ es regular exterior obviamente. Si $\mu(A) < \infty$, para todo $\epsilon > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$ existe un abierto $V_n \supset A_n$, tal que $\mu(V_n) - \mu(A_n) \leq \epsilon 2^{-n}$ y para el abierto $V = \bigcup V_n \supset \bigcup A_n = A$,

$$\mu(V) - \mu(A) = \mu(V \setminus A) \leq \sum \mu(V_n \cap A^c) \leq \sum \mu(V_n \cap A_n^c) \leq \epsilon. \quad \blacksquare$$

Lema 1.6.20 *Todo abierto de \mathbb{R}^m es σ -compacto.*

Demostración. Cada abierto V es unión numerable de los compactos

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq n \text{ y } d(x, V^c) \geq 1/n\}. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.6.21 *Toda medida finita en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ es regular.*

Demostración. Por el Teorema de la clase monótona (1.2.13), pág.7 basta demostrar que

$$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : \mu \text{ es regular en } E\},$$

es álgebra, clase monótona y contiene a los abiertos.

$\emptyset, \mathbb{R}^m \in \mathcal{C}$ (obsérvese que la regularidad interior en \mathbb{R}^m , que es σ -compacto, se tiene aplicando (1.6.19a)).

$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$: Consideremos una sucesión expansiva de compactos $C_n \uparrow \mathbb{R}^m$, por tanto $C_n^c \downarrow \emptyset$, de donde $\mu(C_n^c) \rightarrow 0$ (pues μ es finita). Ahora para todo $\epsilon > 0$, existe un n tal que $\mu(C_n^c) \leq \epsilon/2$ y existen un compacto K y un abierto V , tales que

$$\begin{cases} K \subset A \subset V \\ \mu(V \setminus K) < \epsilon/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n \cap V^c \subset A^c \subset K^c \\ \mu(K^c \setminus (C_n \cap V^c)) \leq \mu(C_n^c) + \mu(V \setminus K) \leq \epsilon, \end{cases}$$

siendo $C_n \cap V^c$ compacto y K^c abierto.

$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$: Para todo $\epsilon > 0$ existen compactos K_A, K_B y abiertos V_A, V_B tales que

$$K_A \subset A \subset V_A \quad \text{y} \quad K_B \subset B \subset V_B,$$

y $\mu(V_A \setminus K_A) \leq \epsilon$, $\mu(V_B \setminus K_B) \leq \epsilon$ y basta considerar el compacto $K = K_A \cup K_B$ y el abierto $V = V_A \cup V_B$, para los que

$$K \subset A \cup B \subset V, \quad \mu(V \setminus K) \leq 2\epsilon.$$

Veamos que es clase monótona.

$A_n \in \mathcal{C}, A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}$: Se sigue de (1.6.19b).

$A_n \in \mathcal{C}, A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}$: Se sigue de que $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$ y lo anterior.

Por último, \mathcal{C} contiene a los abiertos: La regularidad exterior es obvia y la interior se sigue de (1.6.19a) y de que todo abierto es σ -compacto (1.6.20). ■

Corolario 1.6.22 *Si μ es σ -finita en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, es regular interior.*

Demostración. Por el resultado anterior toda medida es regular interior en todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ con $\mu(B) < \infty$, pues la medida $\lambda(A) = \mu(A \cap B)$ es finita y por tanto regular interior, de donde

$$\mu(B) = \lambda(B) = \sup\{\lambda(K) = \mu(K) : K \text{ compacto y } K \subset B\}.$$

Ahora si μ es σ -finita, entonces todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ es unión expansiva de borelianos B_n de medida finita, por tanto en los que μ es regular interior. El resultado se sigue de (1.6.19b). ■

Teorema 1.6.23 *Si μ es de Lebesgue–Stieltjes en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, entonces es regular.*

Demostración. Toda medida de Lebesgue–Stieltjes es σ -finita y por el corolario anterior es regular interior.

Veamos que es regular exterior: Sea V un abierto con $\mu(V) < \infty$ y $B \subset V$ un boreliano. Si consideramos la medida finita —y por (1.6.21) regular exterior— $\lambda(A) = \mu(A \cap V)$, tendremos

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \lambda(B) = \inf\{\lambda(A) : A \text{ abierto y } B \subset A\} \\ &= \inf\{\mu(A \cap V) : A \text{ abierto y } B \subset A\} \\ &= \inf\{\mu(A) : A \text{ abierto y } B \subset A\}. \end{aligned}$$

por tanto μ es regular exterior en B .

En \mathbb{R}^m existen abiertos V_n , con adherencia compacta (por tanto con $\mu(V_n) < \infty$) y tales que $V_n \uparrow \mathbb{R}^m$ —por ejemplo las bolas centradas en 0 de radio n —, y para un boreliano cualquiera B , tendremos que $B_n = B \cap V_n \uparrow B$ y por lo anterior μ es regular exterior en B_n , por tanto se sigue de (1.6.19), que μ es regular exterior en B . ■

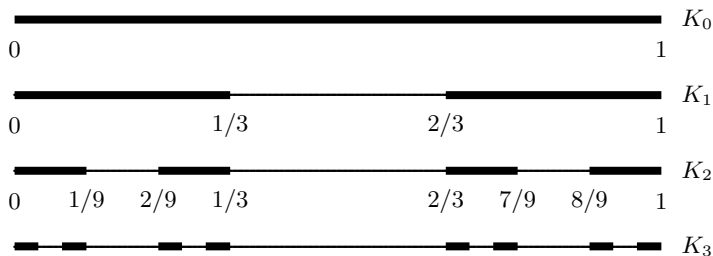
Volveremos sobre la noción de regularidad en la página 242, del Tema de Medida y topología.

1.6.5 El conjunto de Cantor.

Hay un subconjunto de \mathbb{R} , llamado *conjunto de Cantor*, que por sus peculiares propiedades resulta muy útil a la hora de construir ejemplos o contraejemplos en la teoría de la medida. Consideremos la sucesión de compactos de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}
 K_n &\subset K_{n-1} \subset \cdots \subset K_3 \subset \\
 &\subset K_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1] = \\
 &\quad = K_1 \cap (1/9, 2/9)^c \cap (7/9, 8/9)^c \subset \\
 &\subset K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] = K_0 \cap (1/3, 2/3)^c \subset \\
 &\subset K_0 = [0, 1],
 \end{aligned}$$

observemos que cada K_n es unión de 2^n intervalos disjuntos de longitud $(1/3^n)$.



Definición. Llamaremos *conjunto de Cantor* a $K = \cap K_n$.

Teorema 1.6.24 *El conjunto de Cantor es compacto, perfecto (cada $x \in K$ es límite de puntos $x_n \in K - \{x\}$), es denso en ningún lado ($\text{Int}(\overline{K}) = \emptyset$), su complementario en $[0, 1]$ es denso en $[0, 1]$, tiene la cardinalidad del continuo y tiene medida de Lebesgue nula.*

Demostración. Es compacto por ser cerrado de $[0, 1]$ que es compacto. Cada K_n es unión de 2^n intervalos disjuntos de longitud $(1/3^n)$, cuyos extremos están en K , pues cada extremo de un intervalo de K_n es extremo de un intervalo de K_{n+1} . Ahora dado $x \in K$ y $n \in \mathbb{N}$, como $x \in K_n$, uno de sus 2^n intervalos de longitud $(1/3^n)$ lo contiene y podemos elegir x_n como uno de los extremos de dicho intervalo (que sea distinto de x), como $|x - x_n| \leq 3^{-n}$ se sigue que K es perfecto.

Que $m(K) = 0$ se sigue de que

$$0 \leq m(K) \leq m(K_n) = \frac{2^n}{3^n} \rightarrow 0,$$

lo cual a su vez implica que $\text{Int}(K) = \emptyset$, pues si existe un intervalo abierto $(a, b) \subset K$, tendríamos que $m(a, b) = b - a \leq m(K) = 0$, lo cual es absurdo, por tanto $\text{Int}(K) = \emptyset$ y esto equivale a que $\overline{K^c} = \mathbb{R}$ y como $K^c = ([0, 1] - K) \cup [0, 1]^c$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \overline{K^c} = \overline{([0, 1] - K) \cup [0, 1]^c} \\ &= \overline{([0, 1] - K)} \cup \overline{[0, 1]^c}, \end{aligned}$$

por tanto $(0, 1) \subset \overline{[0, 1] - K} \subset [0, 1]$ y $\overline{[0, 1] - K} = [0, 1]$.

Por último que tiene la cardinalidad del continuo se ve considerando la biyección entre el conjunto de sucesiones de ceros y unos $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$, del que quitamos las sucesiones que a partir de un término son 1 y el conjunto $[0, 1]$ (que tiene la cardinalidad del continuo), mediante la aplicación

$$(x_i) \longrightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i},$$

por lo que $0, x_1x_2x_3 \dots$ es la expresión binaria de x . Ahora consideramos la biyección que a cada tal sucesión le hace corresponder el punto de $K - \{1\}$

$$(x_i) \longrightarrow y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{3^i},$$

y el resultado se sigue, pues observemos que $0, y_1y_2y_3 \dots$ es la expresión ternaria de y , la cual corresponde a un punto de K si y sólo si los $y_i = 0$ ó $y_i = 2$. ■

1.6.6 Sobre los conjuntos Lebesgue medibles.

Volvamos ahora a la pregunta que nos hacíamos hace un momento: ¿Es $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$? es decir ¿es Lebesgue medible todo subconjunto de \mathbb{R} ? Debemos observar que la demostración habitual de este resultado, como se puede ver en las dos referencias que damos en el siguiente teorema, depende de la validez del axioma de elección. Aunque al final de este tema trataremos esta cuestión de forma más extensa, digamos ahora

que en 1970 SOLOVAY demostró que si admitimos ciertas hipótesis de consistencia, entonces la existencia de un subconjunto de \mathbb{R} , no Lebesgue medible, no puede probarse con los axiomas de la teoría de conjuntos de ZERMELO–FRENKEL, sin hacer uso del axioma de elección.

Teorema 1.6.25 (Ver Ash, p.33,145; Cohn, p.32) $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ es distinto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Pero se tiene aun mas, también consecuencia del Axioma de elección, de lo que el resultado anterior es una simple consecuencia.

Teorema 1.6.26 (Ver Cohn, p.33) Existe un $A \subset \mathbb{R}$ tal que para todo Lebesgue medible B , con $B \subset A$ ó $B \subset A^c$ es $m(B) = 0$.

Ejercicios

Ejercicio 1.6.1 Sean $\mu_i: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$, para $i = 1, \dots, n$ medidas de Lebesgue–Stieltjes. Demostrar que existe una única medida $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, tal que para cada semi–rectángulo acotado $(a, b]$,

$$\mu(a, b] = \mu_1(a_1, b_1] \cdots \mu_n(a_n, b_n].$$

Ejercicio 1.6.2 Demostrar que toda medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ de Lebesgue–Stieltjes es σ –finita. Encontrar una que sea σ –finita pero no de Lebesgue–Stieltjes. Encontrar una que sea σ –finita pero no regular.

Ejercicio 1.6.3 Demostrar que toda medida semifinita $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ es regular interior.

Ejercicio 1.6.4 Demostrar que si $t \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(tB) = |t|^n m(B)$. Además si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 1.6.5 ¿Se puede poner un cuadrado del plano como unión numerable de segmentos?

1.7 Medidas de Hausdorff

Definición. Sea (Ω, d) un espacio métrico, diremos que una medida exterior μ^* es *métrica* si dados $A, B \subset \Omega$, tales que $d(A, B) > 0$,

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Proposición 1.7.1 Si μ^* es una medida exterior métrica en un espacio métrico (Ω, d) , entonces $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}_*$.

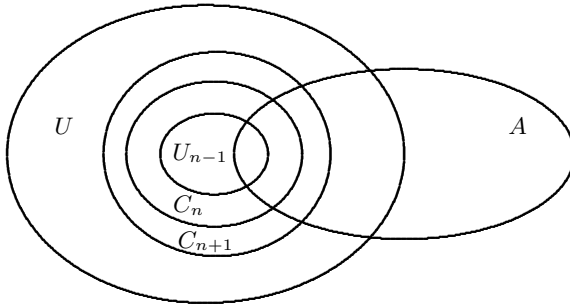
Demostración. Basta demostrar que si $U \subset \Omega$ es abierto, $U \in \mathcal{A}_*$. Para lo cual basta demostrar que si $A \subset \Omega$ tiene $\mu^*(A) < \infty$, entonces $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c)$.

Como U es abierto, $U_n \uparrow U$ para $U_n = \{x : d(x, U^c) \geq n^{-1}\}$, por tanto $A \cap U_n \uparrow A \cap U$ y por otra parte

$$d(A \cap U_n, A \cap U^c) \geq d(U_n, U^c) \geq \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow$$

$$\mu^*(A \cap U^c) + \mu^*(A \cap U_n) = \mu^*[(A \cap U^c) \cup (A \cap U_n)] \leq \mu^*(A),$$

por tanto basta demostrar que $\lim \mu^*(A \cap U_n) = \mu^*(A \cap U)$ y si consideramos los conjuntos disjuntos $C_1 = U_1$, $C_{n+1} = U_{n+1} \setminus U_n$,



$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap U_n) &\leq \mu^*(A \cap U) = \mu^*[A \cap (U_n \cup (\cup_{j=n+1}^{\infty} C_j))] \leq \\ &\leq \mu^*(A \cap U_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu^*(A \cap C_j), \end{aligned}$$

y basta demostrar que la serie $\sum \mu^*(A \cap C_j)$ converge, para ello observemos que $(A \cap U_{n-1}) \cup (A \cap C_{n+1}) \subset A \cap U_{n+1}$ y como

$$d(A \cap U_{n-1}, A \cap C_{n+1}) \geq d(U_{n-1}, C_{n+1}) \geq \frac{1}{n(n-1)} > 0,$$

pues si $x \in U_{n-1}$ e $y \in C_{n+1}$, $y \notin U_n$ y por tanto $d(y, U^c) < n^{-1}$, de donde

$$\frac{1}{n-1} \leq d(x, U^c) \leq d(x, y) + d(y, U^c) < d(x, y) + \frac{1}{n},$$

tendremos que $\mu^*(A \cap U_{n-1}) + \mu^*(A \cap C_{n+1}) \leq \mu^*(A \cap U_{n+1})$ y separando los términos pares e impares tendremos que para

$$\begin{aligned} x_k &= \mu^*(A \cap U_{2k-1}), & y_k &= \mu^*(A \cap U_{2k}), \\ r_k &= \mu^*(A \cap C_{2k-1}), & s_k &= \mu^*(A \cap C_{2k}), \\ x_k + r_{k+1} &\leq x_{k+1}, & y_k + s_{k+1} &\leq y_{k+1}, \end{aligned}$$

y como $r_1 \leq x_1$ y $s_1 \leq y_1$, se tiene por inducción $\sum_{i=1}^k r_i \leq x_k \leq \mu^*(A) < \infty$ y $\sum_{i=1}^k s_i \leq y_k \leq \mu^*(A) < \infty$ por tanto la serie $\sum \mu^*(A \cap C_j)$ converge. ■

Ahora consideremos en el espacio métrico (Ω, d) , la medida exterior de Hausdorff p -dimensional, para cada $p \geq 0$, $H_p: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$. Veremos a continuación que aunque en general las $H_{p,\delta}$ no son medidas exteriores métricas, su límite H_p sí lo es.

Teorema 1.7.2 $H_p: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ es una medida exterior métrica.

Demostración. Sean $A, B \subset \Omega$ con $d(A, B) > 0$ y consideremos un $0 < \delta < d(A, B)$, entonces para cada sucesión $C_n \subset \Omega$, con $d(C_n) < \delta$ y $A \cup B \subset \cup C_n$, consideramos los conjuntos disjuntos

$$I = \{n \in \mathbb{N} : C_n \cap A \neq \emptyset\}, \quad J = \{n \in \mathbb{N} : C_n \cap B \neq \emptyset\},$$

para los que $A \subset \cup_{n \in I} C_n$ y $B \subset \cup_{n \in J} C_n$, por lo que

$$\begin{aligned} H_{p,\delta}(A \cup B) &\leq H_{p,\delta}(A) + H_{p,\delta}(B) \\ &\leq \sum_{n \in I} d(C_n)^p + \sum_{n \in J} d(C_n)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} d(C_n)^p \\ \Rightarrow H_{p,\delta}(A \cup B) &= H_{p,\delta}(A) + H_{p,\delta}(B) \end{aligned}$$

y tomando límites ($\delta \rightarrow 0$), $H_p(A \cup B) = H_p(A) + H_p(B)$. ■

Definición. Llamamos *medida de Hausdorff p -dimensional*, a la restricción de H_p a los borelianos $\mathcal{B}(\Omega)$, de nuestro espacio métrico.

Proposición 1.7.3 Sea $A \subset \Omega$, si $p \geq 0$ y $H_p(A) < \infty$, entonces $H_q(A) = 0$, para todo $q > p$. Si $H_p(A) > 0$, entonces $H_q(A) = \infty$, para todo $0 \leq q < p$.

Demostración. Basta demostrar la primera, pues la segunda es su contrarrecíproca. Sea $\delta > 0$ y B_n un recubrimiento de A , con $d(B_n) < \delta$, entonces para $q > p$,

$$H_{q,\delta}(A) \leq \sum d(B_n)^q < \delta^{q-p} \sum d(B_n)^p,$$

y tomando ínfimo, $H_{q,\delta}(A) \leq \delta^{q-p} H_{p,\delta}(A)$, y haciendo $\delta \rightarrow 0$ se sigue el resultado pues $H_p(A) < \infty$. ■

De esto se sigue que si los conjuntos $\{p > 0 : H_p(A) = \infty\}$ y $\{p > 0 : H_p(A) = 0\}$, son no vacíos, los dos son intervalos disjuntos con un extremo común. Como consecuencia podemos dar la siguiente definición.

Definición. Llamaremos *dimensión de Hausdorff* de $A \subset \Omega$ al valor

$$\dim_H(A) = \sup\{p \geq 0 : H_p(A) = \infty\} = \inf\{p > 0 : H_p(A) = 0\}.$$

Nota 1.7.4 Pero como alguno de los conjuntos anteriores puede ser vacío, consideramos el convenio de $\inf \emptyset = \infty$ y $\sup \emptyset = 0$.

Ejemplo 1.7.5 Por ejemplo la dimensión del conjunto de Cantor es $p = \log_3 2$ (remitimos al lector interesado en la demostración a la p. 329 del FOLLAND).

Por último veamos que las medidas de Hausdorff tienen una propiedad similar a la de Lebesgue, en el sentido de que son invariantes por transformaciones que conservan la distancia.

Proposición 1.7.6 Sea $T: \Omega \rightarrow \Omega$ una aplicación biyectiva isométrica, es decir tal que $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$, entonces para todo $B \subset \Omega$ y todo $p \geq 0$, $H_p[T(B)] = H_p(B)$.

Demostración. Basta ver el resultado para las $H_{p,\delta}$ y para ellas es cierto pues $d[T(B)] = d(B)$, para cada $B \subset \Omega$ y dado A_i existe un B_i , tal que $T(B_i) = A_i$, por tanto

$$\begin{aligned} H_{p,\delta}[T(B)] &= \inf \left\{ \sum d(A_i)^p : T(B) \subset \cup A_i, d(A_i) < \delta \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum d[T(B_i)]^p : T(B) \subset \cup T(B_i), d[T(B_i)] < \delta \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum d(B_i)^p : B \subset \cup B_i, d(B_i) < \delta \right\} \\ &= H_{p,\delta}(B). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.7.1 Medidas de Hausdorff en \mathbb{R}^n .

Un caso especialmente importante lo tenemos para el espacio métrico \mathbb{R}^n , con la métrica euclídea $d(x, y) = \sqrt{\sum (y_i - x_i)^2}$.

Lema 1.7.7 Sea $B = B[0, 1]$ la bola unidad de \mathbb{R}^n , m la medida de Lebesgue y $Q = (0, 1]^n$ el semi-rectángulo unidad, entonces

$$\frac{1}{m[B]} \leq H_n(Q) \leq (\sqrt{n})^n.$$

Demostración. Veamos primero que $1/m[B] \leq H_{n,\delta}(Q)$, para ello sea $\delta > 0$ y consideremos un recubrimiento A_i de Q , con $d(A_i) < \delta$. Ahora para cada i elegimos un $x_i \in A_i$ y la bola $B_i = B[x_i, r_i]$, con $r_i = d(A_i)$, por tanto $A_i \subset B_i$ y $Q \subset \cup A_i \subset \cup B_i$, por lo que

$$1 = m[Q] \leq m[\cup B_i] \leq \sum m[B_i] \leq m(B) \sum r_i^n = m(B) \sum d(A_i)^n,$$

y tomando el ínfimo se tiene el resultado.

Ahora para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos dividir cada lado $(0, 1]$ en m intervalos disjuntos

$$\left(0, \frac{1}{m}\right], \left(\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right], \dots, \left(\frac{m-1}{m}, 1\right],$$

de tal forma que Q se descompone en unión disjunta de m^n cubos Q_i , que son traslaciones de $Q_1 = (0, 1/m]^n$. Como además dados $x, y \in (0, r]^n$ y $b \in \mathbb{R}^n$, con $b_i = r$,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{nr^2} = r\sqrt{n} = d(0, b),$$

tendremos que $d(Q_i) = \sqrt{n}/m$ y para cada δ y m tales que $\sqrt{n}/m < \delta$

$$H_{n,\delta}(Q) \leq \sum_{i=1}^{m^n} d(Q_i)^n = (\sqrt{n})^n,$$

por tanto $H_n(Q) \leq (\sqrt{n})^n$. ■

Teorema 1.7.8 *Existe una constante $\gamma_n > 0$, tal que $\gamma_n H_n$ es la medida de Lebesgue de \mathbb{R}^n .*

Demostración. H_n es invariante por simetrías, en particular por traslaciones. Ahora por (1.6.18) basta demostrar que para el semirrectángulo unidad $Q = (0, 1]^n$, $0 < H_n(Q) < \infty$, lo cual es consecuencia del lema anterior. ■

Nota 1.7.9 Veremos en la página 187 que las constantes del resultado anterior son

$$\gamma_n = m(B) = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(1 + (n/2))},$$

para $B = B_2[0, 1/2]$ la bola cuadrática de \mathbb{R}^n de diámetro 1 (radio $1/2$).

El resultado anterior nos induce a definir las medidas de \mathbb{R}^n :

$\gamma_1 H_1 = H_1$, que nos da la longitud de curvas de \mathbb{R}^n ; $\gamma_2 H_2$, que nos da el área de superficies de \mathbb{R}^n , etc.

Veremos en la página 182 un método práctico para el cálculo de estas medidas mediante la integral de Lebesgue.

Ejercicios

Ejercicio 1.7.1 Demostrar que para $p = 0$, H_p es la medida de contar.

Ejercicio 1.7.2 Sea $\Omega' \subset \Omega$ y consideremos el espacio métrico (Ω', d) , con la métrica inducida. Demostrar que la medida exterior de Hausdorff en Ω' , $H'_p = H_{p|\mathcal{P}(\Omega')}$.

Ejercicio 1.7.3 Demostrar que si $A \subset \Omega$ y $0 < H_p(A) < \infty$, $\dim_H(A) = p$.

Ejercicio 1.7.4 Demostrar que $\dim_H(\{x\}) = 0$, para cada $x \in \Omega$.

Ejercicio 1.7.5 Demostrar que $\dim_H(\cup A_n) = \sup \dim_H(A_n)$.

Ejercicio 1.7.6 En los subespacios de \mathbb{R}^n con la métrica euclídea, demostrar que la dimensión vectorial y la de Hausdorff coinciden.

1.8 Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.

BARTLE, R.G.: “*The elements of integration*”. John Wiley, 1966.

COHN, D.L.: “*Measure theory*”. Birkhauser (Boston), 1980.

FOLLAND, G.B.: “*Real Analysis. Modern Techniques and their applications*”, John Wiley, 1984.

LANG, S.: “*Real Analysis*”. Addison-Wesley, 1969.

TJUR, T.: “*Probability based on Radon Measures*”. J.Wiley, 1980.

Aunque nosotros hemos tratado y trataremos fundamentalmente las medidas numerablemente aditivas, no son las únicas de interés. Por ejemplo DUBINS y SAVAGE en un libro de 1965 titulado “*How to gamble if you must*”, consideran ciertos problemas en procesos estocásticos (ver comentarios del tema V–Parte V), usando sólo funciones de conjunto finitamente aditivas. Y aseguran que para sus propósitos la finita aditividad evita algunas de las complicaciones de la numerable aditividad, sin sacrificar por ello potencia o generalidad.

Remitimos al lector interesado en resultados propios de medidas finitamente aditivas (tomando incluso valores en un espacio de Banach), a los libros

BHASKARA RAO, K.P.S. AND BHASKARA RAO, M.: “*Theory of charges*”. Ac. Press, 1983.

DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “*Linear operators, Vol.I*”. John Wiley Interscience Pub., 1958.

Para una visión clásica de la teoría de la medida, pero considerando en vez de álgebras o σ -álgebras, anillos ó σ -anillos, es decir quitando la propiedad de que el espacio total sea medible, nos remitimos al

HALMOS, P.R.: “*Measure Theory*”. Springer-Verlag, 1974.

En cuanto a los textos clásicos los más importantes son en primer lugar la Tesis de HENRI LEBESGUE (1875–1941)

LEBESGUE, H.: “*Integrale, longueur, aire*”. Ann. di Math., serie III, t.VII, 231-359. Tesis, 1902.

en la que introduce el nuevo concepto de integral y desarrolla una teoría de la medida más general que la de EMILE BOREL (1871–1956) quien introdujo el concepto de medida de Borel en \mathbb{R} basándose en la propiedad de que todo abierto puede ponerse como unión numerable de intervalos abiertos disjuntos. Otra obra fundamental es

LEBESGUE, H.: “*Leçons sur l'integration*” (1a.edición 1903, 2a.edición 1928). Reimp. de 2a. ed. por Chelsea Pub. Comp., 1973.

CONSTANTIN CARATHEODORY (1873–1950), dió en 1914 un método general de construcción de medidas exteriores en un espacio métrico. En su libro

CARATHEODORY, C.: “*Vorlesungen uber reelle Funktionen*”. Leipzig–Berlin, 1918. Reimpreso por Chelsea en 1948

aparece por primera vez la medida como el concepto que ocupa el lugar de importancia frente al de integral. En él demuestra parte del teorema fundamental de extensión que lleva su nombre y aporta numerosas observaciones originales a la teoría de integración que habían iniciado LEBESGUE, RIESZ y RADÓN fundamentalmente. Otro volumen clásico de este autor, publicado a título póstumo, es

CARATHEODORY, C.: “*Measure and integration*”, 1956. Reed. de Chelsea Pub. Co., 1986.

El primero en demostrar el Teorema de unicidad de extensión de una medida, que hemos llamado **Teorema de extensión de Hahn**, fue

FRECHET, M.: “*Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits*”, Fund. Math. 5, 1924, 206–251.

aunque nosotros no hemos seguido su demostración, sino la que dieron de forma independiente HAHN y KOLMOGOROV —ambas basadas en los resultados de CARATHEODORY—, respectivamente en

- HAHN, H.: “*Über die Multiplication total-additiver Mengenfunktionen*”, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, 2, 1933, 429–452.
- KOLMOGOROV, A.N.: “*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*”, Editorial. Springer-Verlag, Berlin, 1933; Traducido como “*Foundations of the Theory of Probability*”, por Chelsea, New York, 1950.

Las medidas y la dimensión de HAUSDORFF fueron introducidas por FÉLIX HAUSDORFF (1868–1942) en

HAUSDORFF, F.: “*Dimension und äusseres Mass*”. *Math. Ann.* **79** (1919), 157–179.

El concepto de *dimensión* ha sido objeto de muchas definiciones. En topología hay al menos cinco, de las cuales dos son clásicas: la **inductiva**, sugerida en 1912 por HENRI POINCARÉ (1854–1913) y precisada por BROWER en 1913, URYSOHN en 1922 y Menger en 1923 (ver la p.4 del HUREWICZ) y la de **recubrimientos** sugerida por *Lebesgue* en 1911 y formulada por CECH en 1932 (ver la p.263 del libro de Janusz Cziz). Más actuales son: la de **retículos**, la **graduada** y la **aritmética** que estudian respectivamente

VINOKUROV, V.G.: “*Lattice method of defining dimension*”. *Soviet Math. Dokl.* **7** (1966), 663–667.

ISELL, J.: “*Graduation and dimension in locales*”. *London Math. Soc. Lecture Notes Ser.*, N93. Cambridge Univ. Press, (1985), 195–210.

GALIAN, R.: “*Teoría de la dimensión*”. *Serie Univ. Fund.* Juan March, **107**, Madrid (1979), 663–667.

siendo esta última introducida por JUAN SANCHO GUIMERÁ, que a su vez se basa en la definición de dimensión de un anillo (*dimensión de Krull*). Estas tres últimas coinciden en cualquier espacio topológico, mientras que las dos primeras no. Todas son buenas según el ámbito de propiedades que se estudien, son invariantes topológicos, toman valores $\{-1, 0, 1, \dots, \infty\}$ y las cinco coinciden en espacios métricos separables (i.e. con un subconjunto denso y numerable). Sin embargo la dimensión de Hausdorff —que está definida en un espacio métrico— no es un invariante topológico, aunque sí lo es el ínfimo de las dimensiones para las métricas que definan el mismo espacio topológico (metrizable y separable) y coincide con las cinco anteriores. (Ver HUREWICZ, p.102 y la *Encyclopaedia of Mathematics*, Reidel, Kluwer Acad. Pub. Tomo 3, p.195 y Tomo 4, p.392). Remitimos al lector interesado en las medidas de Hausdorff y al concepto de dimensión a los libros

CZIZ, JANUSZ.: “*Paradoxes of measures and dimensions originating in Felix Hausdorff's ideas*”. World Scientific Pub. 1994.

HUREWICZ, W. AND WALLMANN, H.: “*Dimension Theory*”. Princeton Univ. Press, 1941.

ROGERS, C.A.: “*Hausdorff Measures*”. Cambridge Univ. Press, 1970.

En 1918, los franceses GASTON JULIA y PIERRE FATOU estudiaron figuras obtenidas del siguiente modo: Para cada $c \in \mathbb{C}$ la función $f_c: z \in \mathbb{C} \rightarrow z^2 + c \in \mathbb{C}$ define, para cada z_0 inicial, una sucesión por la fórmula de recurrencia $z_n = f_c(z_{n-1})$ y observamos que para $c = 0$ el plano se divide en tres regiones: $R_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, tal que los z_0 que parten de ella definen una sucesión $z_n \rightarrow 0$, otra $R_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, tal que los z_0 que parten de ella definen una sucesión z_n que tiende a infinito y otra $R_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, tal que los z_0 que parten de ella definen una sucesión z_n que permanece en ella; de estas tres regiones hay una, la circunferencia, que es borde de las otras dos. Para otros valores de c como por ejemplo $c = -0.12375 + 0.56508i$ observamos (ver fig.3, pág.10 del libro de PEITGEN AND RICHTER) que el plano también se divide en tres regiones similares y de nuevo una es curva borde de las otras dos, pero esta no es una curva diferenciable, es muy irregular, parece el contorno de una isla, aunque sigue siendo conexa. Por último hay valores c para los que la “curva borde” no es conexa. Sus trabajos sobre estas curvas, que ahora se conocen como *curvas de Julia*, se mantuvieron en el olvido hasta que en 1975 BENOIT MANDELBROT las recuperó llamándolas *fractales* (por ser curvas “fracturadas” en el sentido de quebradas, rotas) y con ayuda de un ordenador se le ocurrió representar los c para los que la curva de Julia correspondiente era conexa y se encontró con un conjunto realmente impresionante y bello (conocido como *conjunto de Mandelbrot*). La importancia para nosotros de este conjunto (de su frontera realmente), así como de alguna de las curvas de Julia, es que son curvas con dimensión de Hausdorff no entera. Remitimos al lector interesado en estos temas al artículo y los libros

BLANCHARD, P.: “*Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere*”. Bull Amer Math Soc, 1984, **11**, 85–141.

MANDELBROT, BENIOT: “*The Fractal Geometry of Nature*”. Freeman and Company, 1983.

PEITGEN, HEINZ-OTTO AND RICHTER, PETER H: “*The Beauty Of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems*”. Springer-Verlag, 1986.

PENROSE, R.: “*La nueva mente del emperador*”, Mondadori, 1991.

en este último la definición que da del conjunto de Mandelbrot, no es la que hemos dado (que es la del autor), sino que es la siguiente en los términos anteriores: Un punto c está en el conjunto de Mandelbrot si

partiendo de $z_0 = 0$, la sucesión z_n está acotada. En el artículo de BLANCHARD se demuestra la equivalencia de las dos definiciones.

Para los lectores interesados en la parte de la historia de las matemáticas que tratan los comienzos de la medida y la integración, recomendamos los siguientes libros, en el primero de los cuales están los trabajos *Sobre la esfera y el cilindro* y *Medida del círculo*:

ARQUIMEDES, APOLONIO, ETC.: “*Científicos griegos II*”. Ed. Aguilar, 1970.

BOYER, CARL B.: “*Historia de la matemática*”. Alianza Univ. textos, N94, 1986.

VAN DALEN, D. AND MONNA, A.F.: “*Sets and integration*”. Wollers-Noordhoff, 1972.

EUCLIDES: “*Los Elementos*”. Biblioteca Clásica Gredos, 1991.

HAWKINS, T.: “*Lebesgue’s Theory of integration*”. Chelsea Pub.Co., 1975.

PESIN, I.V.: “*Classical and modern integration theories*”. Acad. Press, 1970.

En cuanto al contenido del capítulo, vamos a hacer algunos comentarios. En 1902 LEBESGUE plantea en su libro “*Leçons sur l’intégration*” la siguiente cuestión: ¿Existe alguna medida μ en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante por traslaciones, verificando

$$\mu(a, b] = b - a, \quad \text{para } a < b \in \mathbb{R}?$$

En 1905 GUISEPPE VITALI (1875–1932) demuestra que no en

VITALI, G.: “*Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*”. Bologne, 1905.

basándose para ello en el axioma de elección (ver FOLLAND, p.19).

En cuanto a la existencia de una medida μ finitamente aditiva en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$, no nula, finita en los acotados y que tome el mismo valor en conjuntos congruentes, la respuesta es que no, como se prueba utilizando el axioma de elección en la forma de la **Paradoja de Hausdorff**, esto es:

“*Hay un subconjunto numerable D de la esfera unidad S_2 de \mathbb{R}^3 , y subconjuntos disjuntos $A, B, C \subset S - D$, tales que $A \cup B \cup C = S - D$ y A, B, C y $B \cup C$ son congruentes*”.

Remitimos al lector interesado a la p.51 del

BENEDETTO, J.J.: “*Real variable and integration*”, B.G.Teubner Stuttgart, 1976.

En 1924 STEFAN BANACH (1892–1945) y ALFRED TARSKI (1901–1983) probaron otra asombrosa paradoja, consecuencia de la de Hausdorff, que dice:

“ Sean B y C dos bolas cerradas del mismo radio de \mathbb{R}^3 . Entonces existen sendas particiones (disjuntas) B_i y D_i , para $i = 1, \dots, 41$, de B y $B \cup C$ respectivamente, tales que cada B_i es congruente con D_i .”

De ellos es también la siguiente (ver FOLLAND, p.19):

“Sean A y B dos abiertos acotados de \mathbb{R}^n , con $n \geq 3$. Entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y $2m$ conjuntos $A_i, B_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$, tales que los A_i son disjuntos, los B_i también, $A = \cup A_i$, $B = \cup B_i$, y para cada i A_i es congruente con B_i .”

Uno estaría tentado a decir que esto implica que podemos coger en el espacio una bola abierta del tamaño de una canica, partirla convenientemente en un número finito de trozos y volverlos a unir en otro orden obteniendo una nueva bola abierta del tamaño de la tierra. Pero realmente el resultado sólo asegura que existen los trozos, no que puedan construirse. Y nuestra noción de lo existente a veces descansa en *axiomas* como el *de la elección*, del que hablaremos al final de estos comentarios.

Por otra parte los casos unidimensional y bidimensional se comportan de una manera esencialmente distinta al tridimensional, es decir que para $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ sí existen medidas finitamente aditivas no nulas, finitas en los acotados, invariantes por traslaciones y que coinciden con la medida de Lebesgue en los Lebesgue medibles, para $n > 2$ el resultado no es cierto. Este resultado, que veremos en (??) de la página ??, es de 1932 y se debe a

BANACH, S.: “*Theorie des operations lineaires*”. Reimp. con correcciones de la 1a. ed. de 1932 por Chelsea Pub.Co., 1978.

En 1950 KAKUTANI y OXTOBY obtuvieron en

KAKUTANI, S. AND OXTOBY, J.C.: “*Construction of a nonseparable invariant extension of the Lebesgue measure space*”. Ann. of Math., 52, 580-590, 1950.

una extensión de la medida de Lebesgue —numerablemente aditiva e invariante por traslaciones—, definida sobre una σ -álgebra que contenía propiamente a $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Ver a este respecto las pp.113 y 137 respectivamente de los libros

MUHKERJEA, A. AND POTHOVEN, K.: “*Real and functional Analysis*”. Plenum Press, 1978.

HEWITT, E. AND STROMBERG, K.: “*Real and abstract analysis*”. Springer- Verlag, 1965.

Hemos dicho anteriormente que VITALI, partiendo de los axiomas de ZERMELO–FRENKEL y del *axioma de elección*, había probado en 1905 que

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

esto nos induce a hacer unos breves comentarios sobre el uso del *axioma de elección* tanto en la teoría de la medida como en el resto de las matemáticas.

No cabe duda de que la naturaleza del *axioma de elección* difiere bastante de la del resto de la axiomática de ZERMELO–FRENKEL. No obstante, su uso —siempre acompañado de reticencia y crítica— se mantiene porque hay “*importantes teoremas*” que no se saben demostrar sin él ó incluso son equivalentes a él. Por ejemplo el **Teorema de Hahn–Banach** que es básico en Análisis Funcional pues su invalidez haría que desapareciesen la mitad de los espacios que aparecen en esa disciplina (los espacios duales). El **Teorema de Tychonov** en Topología —sobre la compacidad del producto de compactos—, fue durante mucho tiempo uno de los argumentos mas importantes a favor del *axioma de elección*, pues son equivalentes (ver el VANDALEN–MONNA, p. 32, para una lista de resultados equivalentes).

No sabemos si se conoce algún tipo de alternativa para el **Teorema de Hahn–Banach** sin hacer uso del *axioma de elección*, pero respecto al **Teorema de Tychonov** se ha demostrado recientemente que puede ser válido sin necesidad del *axioma de elección*, si se entiende por topología un concepto no supeditado a un “conjunto de puntos”, sino que se parte de un retículo de abiertos como noción primitiva —como por otra parte ya hacía Hausdorff— y no de la de punto como es habitual. Remitimos al lector interesado al artículo de

JOHNSTONE, P.T.: “*Tychonoff’s Theorems without the axiom of choice*”. Fund. Math., 113, 21–35, 1981.

Volviendo al resultado de VITALI, este ha sido complementado con la demostración de que si la axiomática de ZERMELO–FRENKEL es consistente, es decir no tiene contradicción, entonces también es consistente

$$\boxed{\text{Zermelo–Frenkel}} + \boxed{\text{no axioma elección}} + \boxed{\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})},$$

lo cual significa que el *axioma de elección* no es equivalente a $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Otro resultado en esta línea de 1965, aunque no publicado hasta 1970 es

SOLOVAY, R.M.: “A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable”. Ann. of Math., 92, 1-56, 1970. (MR42,1,64).

en el que se demuestra que si

$$\boxed{\text{Zermelo–Frenkel}} + \boxed{\text{hay un cardinal inaccesible}},$$

es consistente, entonces también lo es

$$\boxed{\text{Zermelo–Frenkel}} + \boxed{\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})}$$

por lo que no hay, en principio, una razón para creer en la existencia de conjuntos no Lebesgue medibles, cosa que por otra parte facilitaría enormemente el uso de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Debemos decir no obstante que en ese mismo trabajo, SOLOVAY también demuestra que si

$$\boxed{\text{Zermelo–Frenkel}} + \boxed{\text{hay un cardinal inaccesible}},$$

es consistente, entonces también lo es

$$\boxed{\text{Zermelo–Frenkel}} + \boxed{\text{Todo } A \subset \mathbb{R}, \text{ tiene la propiedad de Baire}}$$

en cuyo caso el **Teorema de Hahn-Banach** es falso. Lo cual debiera hacernos pensar —entre otras cosas— si este Teorema no estará al mismo nivel de entendimiento que lo estaba el **Teorema de Tychonov** antes de 1981.

Remitimos al lector interesado en la relación existente entre la teoría de la medida y la teoría de conjuntos a

TALL, F.D.: “*Applying set theory to measure theory*”. Lect. Notes in Math., Springer–Verlag, N.1033, 295-302, 1983.

Capítulo 2

Integración

2.1 Introducción histórica

En 1881 V. VOLTERRA, estudiante de U. DINI en Pisa, publicó un ejemplo de una función $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, derivable en todo punto, con derivada f' acotada pero no *Riemann integrable*. Es decir, encontró una función derivable para la que el *Teorema fundamental del cálculo* no era válido. La clave de tal función —que puede encontrarse en el propio trabajo de VOLTERRA, cuya referencia damos al final del tema, ó en la p.20 del BENEDETTO—, reside en que su derivada es discontinua en un conjunto de puntos de medida de Lebesgue positiva (ver el Teorema de caracterización (2.5.3), pág.95).

En su Tesis de 1902 LEBESGUE observa que por esta razón, diferenciación e integración no podían considerarse operaciones inversas en el contexto, relativamente amplio, de las funciones Riemann integrables. Este fue el motivo fundamental que le llevó a tratar de encontrar una noción de integración nueva, bajo la que derivación e integración sí fuesen operaciones inversas para una clase de funciones más amplia que las Riemann integrables.

Hay otras razones para querer extender la integración Riemann. Podemos juntarlas todas y decir simplemente que era necesaria una teoría que incluyese muchos resultados naturales para muchas funciones, como por ejemplo la integración término a término en una serie de funciones.

La idea principal de la integral de Lebesgue consiste en que, a diferencia de lo que ocurre en la integral de Riemann, los puntos se agrupan de acuerdo a la proximidad de los valores de la función a integrar y no de acuerdo a su proximidad en el conjunto de definición de la función, como hacía Riemann. Esto permite la posibilidad de extender, de forma inmediata, el concepto de integral a una clase muy amplia de funciones.

2.2 Funciones medibles

Definición. Diremos que una aplicación entre espacios medibles

$$F: (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2),$$

es *medible* si para cada $B \in \mathcal{A}_2$, $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$.

Si $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ —ó $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ —, diremos que F es una *función medible* —algunos autores la llaman *función Borel medible*—. Si además $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$, diremos que F es *Lebesgue medible*.

En el contexto de la Teoría de probabilidades las funciones medibles se llaman *variables aleatorias*.

2.2.1 Propiedades básicas de las funciones medibles.

Veamos primero algunas propiedades de las aplicaciones medibles.

Proposición 2.2.1 (a) *La composición de aplicaciones medibles es medible.*

(b) *Si $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ son espacios medibles y $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_2$ es tal que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_2$, entonces $F: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es medible si y sólo si para cada $B \in \mathcal{C}$, $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$.*

(c) *Las aplicaciones continuas entre espacios topológicos son medibles para las σ -álgebras de Borel.*

Demostración. (b) Es consecuencia de que

$$\sigma(F^{-1}[\mathcal{C}]) = F^{-1}[\sigma(\mathcal{C})],$$

lo cual se demuestra fácilmente usando el principio de los buenos conjuntos.

(c) Es consecuencia de (b). ■

Veamos ahora algunas propiedades de las funciones medibles.

Proposición 2.2.2 (d) *Una función $f: (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, es medible si y sólo si para cada $c \in \mathbb{R}$,*

$$\{x \in \Omega : f(x) > c\} \in \mathcal{A}.$$

(e) *Una función $f: (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, es medible si y sólo si para cada $c \in \mathbb{R}$,*

$$\{x \in \Omega : f(x) > c\} \in \mathcal{A}.$$

(f) *Si f es una función medible, $-f$ es medible.*

(g) *Si f, g son funciones medibles $\max(f, g)$ es una función medible.*

(h) *Si f es medible, la parte positiva $f^+ = \max(f, 0)$ y negativa $f^- = \max(-f, 0)$, respectivamente de f son medibles, $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$ también es medible.*

Demostración. (d) y (e) son consecuencia de (b), pues la clase de los intervalos (c, ∞) generan $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y la de $(c, \infty]$ generan $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ y en (d) $\{f > c\} = f^{-1}(c, \infty)$ y en (e) $\{f > c\} = f^{-1}(c, \infty]$.

(f) Es consecuencia de (d) ó (e), pues para cada $c \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in \Omega : c < -f(x)\} = \{x : -c > f(x)\} \in \mathcal{A}.$$

(g) Se sigue de (d) ó (e) pues

$$\{\max(f, g) > c\} = \{f > c\} \cup \{g > c\}.$$

(h) Que f^\pm son medibles se sigue de (g) y (f). Además $\{|f| > c\} = \Omega$, para $c < 0$ y $\{f > c\} \cup \{f < -c\}$, para $c \geq 0$. ■

Nota 2.2.3 Observemos que en los apartados (d) y (e) anteriores podemos cambiar la desigualdad $>$ en $\{f > c\}$ por cualquier otro tipo de desigualdad: $<$, \leq ó \geq ; pues cualquiera de los conjuntos correspondientes de intervalos generan los borelianos.

Veamos ahora algunas propiedades de las sucesiones de funciones medibles, en particular que el límite puntual de funciones medibles si existe es medible.

Teorema 2.2.4 Sean $f_n: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, para $n \in \mathbb{N}$ funciones medibles, entonces:

- (i) El $\sup f_n$ y el $\inf f_n$ son medibles.
- (j) El $\limsup f_n$ y el $\liminf f_n$ son medibles.
- (k) Si existe en todo $x \in \Omega$ el límite $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, entonces f es medible.

Demostración. (i) Es consecuencia de (2.2.2), pues para cada $c \in \mathbb{R}$

$$\{x \in \Omega : c < \sup f_n(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : c < f_n(x)\} \in \mathcal{A}.$$

Que el $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ es medible se sigue de (f) y lo anterior.

(j) Se sigue de (i) y de que $\limsup f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{i \geq n} f_i$.

(k) Se sigue de (j), pues $\lim f_n = \limsup f_n (= \liminf f_n)$. ■

Definición. Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) y un $A \in \mathcal{A}$ denotaremos con

$$\mathcal{F}(A) = \{f: A \rightarrow \mathbb{R}, \text{ funciones medibles reales}\}.$$

Observemos que les pedimos que tomen valores en \mathbb{R} , no en $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición. Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible y $A \in \mathcal{A}$, llamaremos *indicador de A* a la función medible

$$I_A: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in A^c. \end{cases}$$

Obviamente la estructura medible de Ω , es decir la σ -álgebra \mathcal{A} , podemos reconstruirla si conocemos sus funciones medibles reales $\mathcal{F}(\Omega)$, pues \mathcal{A} es el conjunto de todos los $f^{-1}(\{1\})$, con $f \in \mathcal{F}(\Omega)$, ya que para todo $A \in \mathcal{A}$, $I_A \in \mathcal{F}(\Omega)$.

2.2.2 Funciones simples

Hemos hablado en el Tema anterior de la suma en $\overline{\mathbb{R}}$, ahora completamos estas operaciones aritméticas considerando

$$\begin{aligned} x/\infty &= x/-\infty = 0, & \text{para } x \in \mathbb{R}, \\ x \cdot \infty &= \infty \cdot x = \infty, & \text{para } x \in (0, \infty], \\ x \cdot \infty &= \infty \cdot x = -\infty, & \text{para } x \in [-\infty, 0), \\ 0 \cdot \infty &= \infty \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = -\infty \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

con estas definiciones se demuestra fácilmente que son válidas las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

Definición. Diremos que una función $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es *simple* si es medible y toma un número finito de valores. Denotaremos con \mathcal{S} el conjunto de las funciones simples finitas, es decir de las funciones simples $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposición 2.2.5 $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es simple si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$ disjuntos y $a_i \in \overline{\mathbb{R}}$, para $i = 1, \dots, n$, tales que

$$f = \sum a_i I_{A_i}, \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

Demostración. Si es simple $\text{Im } f = \{a_1, \dots, a_n\}$, como es medible $f^{-1}\{a_i\} = A_i$ son medibles y $f = \sum a_i I_{A_i}$. Recíprocamente si f es de esa forma toma un número finito de valores y es medible pues para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{i: a_i \in B} A_i \in \mathcal{A}. \quad \blacksquare$$

Proposición 2.2.6 Si f y g son simples, fg también lo es. Además también lo son $f+g$ y f/g siempre que las operaciones estén bien definidas, es decir que no se sume ∞ y $-\infty$, que no se divida por 0 ó que no se divida $\pm\infty$ por $\pm\infty$.

Demostración. Por el resultado anterior $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$ y $g = \sum_{j=1}^m b_j I_{B_j}$, con los A_i disjuntos y los B_j disjuntos y tales que $\bigcup A_i = \bigcup B_j = \Omega$. Por tanto $A_i \cap B_j \in \mathcal{A}$ son disjuntos y es una partición de Ω y si denotamos con D los índices (i, j) tales que $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, tendremos que para ellos $a_i + b_j$ y a_i/b_j están bien definidos —lo cual no es cierto

en general si $A_i \cap B_j = \emptyset$ — y se tiene

$$f + g = \sum_{(i,j) \in D} (a_i + b_j) I_{A_i \cap B_j}, \quad \frac{f}{g} = \sum_{(i,j) \in D} (a_i/b_j) I_{A_i \cap B_j}$$

$$fg = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i b_j) I_{A_i \cap B_j}.$$

Teorema 2.2.7 *Sea $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Entonces:*

(a) *Si $f \geq 0$, existe una sucesión creciente $f_n \in \mathcal{S}$ de funciones simples, con $0 \leq f_n \leq n$, tales que $f_n \uparrow f$. Además la convergencia es uniforme en cada conjunto en el que f sea acotada.*

(b) *En general existe una sucesión $f_n \in \mathcal{S}$ de funciones simples, con $|f_n| \leq n$, tales que $f_n \rightarrow f$, $|f_n| \leq |f|$. Además la convergencia es uniforme en cada conjunto en el que f sea acotada.*

Demostración. (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos las funciones simples

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n}, & \text{si } f(x) \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) \quad (i = 1, \dots, n2^n) \\ n, & \text{si } n \leq f(x), \end{cases}$$

las cuales satisfacen el enunciado, pues $f_n \leq f$; $0 \leq f_n \leq n$; $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ya que si $f(x) = \infty$, $f_n(x) = n \rightarrow \infty$ y si $f(x) < \infty$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < N$ y para $n \geq N$, como $f(x) < n$, $f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$, pues ambos están en el mismo intervalo de longitud 2^{-n} , se sigue además que la convergencia es uniforme en cualquier conjunto en el que f sea acotada. Por último veamos que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

Si $f(x) < n$ existe un $i = 1, \dots, n2^n$, tal que

$$f(x) \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) = \left[\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}\right),$$

en cuyo caso $f_{n+1}(x)$ vale $(2i-2)/2^{n+1} = f_n(x)$ ó $(2i-1)/2^{n+1} \geq f_n(x)$.

Si $n \leq f(x) < n+1$, entonces $f_n(x) = n$ y existe un j entre $n2^{n+1}$ y $(n+1)2^{n+1} - 1$, tal que

$$f(x) \in \left[\frac{j}{2^{n+1}}, \frac{j+1}{2^{n+1}}\right) \Rightarrow f_{n+1}(x) = \frac{j}{2^{n+1}} \geq n = f_n(x).$$

Y si $n+1 \leq f(x)$, entonces $f_n(x) = n \leq n+1 = f_{n+1}(x) \leq f(x)$.

(b) Por (a) existen sendas sucesiones $g_n \uparrow f^+$ y $h_n \uparrow f^-$ de funciones simples, no negativas y finitas y basta considerar $f_n = g_n - h_n$. ■

2.2.3 Operaciones básicas de las funciones medibles.

A continuación demostramos que la suma, el producto y el cociente de funciones medibles, si están bien definidos son medibles.

Proposición 2.2.8 *Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible y $A \in \mathcal{A}$, entonces:*

(a) *Si $f, g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ son funciones medibles, también lo son, para $c \in \mathbb{R}$ $cf, f + g, fg, f/g$, si están bien definidas (es decir si en ningún punto $f + g$ es del tipo $\infty - \infty$, ni $f/g \infty/\infty$ ó $a/0$).*

(b) *$\mathcal{F}(A)$ tiene estructura de \mathbb{R} -álgebra, es decir contiene a las constantes y es cerrada para la suma y el producto.*

Demostración. Basta demostrar (a). Que cf es medible es obvio. Por (2.2.7) existen funciones simples y acotadas $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$, por tanto $f_n + g_n$ son simples (observemos que la suma está bien definida por ser finitas f_n y g_n) y convergen a $f + g$, por tanto se sigue de (2.2.4) que $f + g$ es medible. Del mismo modo lo es fg , pues $f_n g_n \rightarrow fg$ (observemos que si $f(x) = 0$, todas las $f_n(x) = 0$, idem para g); y f/g pues

$$f_n(g_n + \frac{1}{n}I_{\{g_n=0\}})^{-1} \rightarrow f/g. \quad \blacksquare$$

2.2.4 Existencia de Lebesgue medibles no de Borel.

Como consecuencia de que la composición de funciones medibles es medible también tenemos que si f es Lebesgue medible y g es Borel medible, por ejemplo continua, entonces $g \circ f$ es Lebesgue medible. Sin embargo si f y g son Lebesgue medibles, entonces $g \circ f$ no es necesariamente Lebesgue medible. Veámoslo al mismo tiempo que contestamos a la pregunta del tema anterior acerca de la existencia de conjuntos Lebesgue medibles no Borel medibles.

En (1.6.5), pág.47, definimos el conjunto de Cantor $K = \cap K_n$, donde cada K_n es la unión de 2^n intervalos iguales y disjuntos de $[0, 1]$ y $K_n \subset K_{n-1}$. Consideremos $K^c = \cup K_n^c = \cup (K_{n-1} \cap K_n^c)$ donde cada $K_{n-1} \cap K_n^c = B_n$ es unión de $m = 2^{n-1}$ intervalos abiertos disjuntos que ordenamos en forma creciente I_{n1}, \dots, I_{nm} . Por tanto como los B_n son disjuntos tendremos que

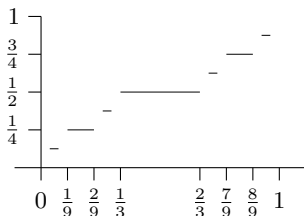
$$\{I_{nk} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, 2^{n-1}\},$$

es una partición por abiertos disjuntos de K^c .

Definición. Llamamos *función de Cantor* a la función continua $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que sobre cada I_{nk} vale

$$h(x) = (2k - 1)/2^n,$$

que está bien definida por ser creciente y K^c denso en $[0, 1]$.



— Figura 1. Algunos peldaños de la función de Cantor —

Consideremos ahora la función $g: [0, 1] \rightarrow [0, 2]$,

$$g(x) = h(x) + x,$$

que es continua y estrictamente creciente. Por tanto tiene inversa g^{-1} que es continua por tanto Borel medible y Lebesgue medible. Por otra parte $m[g(K)] = 1$, pues

$$\begin{aligned} m[g(I_{nk})] &= m[I_{nk}], \quad m[0, 1] = 1, \quad m[0, 2] = 2, \\ m[g(K^c)] &= m[\cup g(I_{nk})] = m[K^c] = 1. \end{aligned}$$

Ahora bien en (1.6.26), pág.49, vimos la existencia de un $A \subset \mathbb{R}$ tal que si $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ y $B \subset A$ ó $B \subset A^c$, entonces $m(B) = 0$. Se sigue de esto que existe $C \subset g[K]$ no Lebesgue medible, por ejemplo $A \cap g[K]$ ó $A^c \cap g[K]$. Si ahora consideramos la función

$$f = I_C \circ g,$$

tendremos que $f = I_D$, para $D = \{x : f(x) = 1\}$, que es Lebesgue medible y $m[D] = 0$, pues $D \subset K$ y $m[K] = 0$, por tanto f es Lebesgue medible y hemos demostrado lo siguiente, aunque usando el Axioma de elección.

Teorema 2.2.9 *La función $I_C = I_D \circ g^{-1}$ no es Lebesgue medible aunque es composición de Lebesgue medibles. Además $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ y $D \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Nota 2.2.10 Se puede dar una demostración alternativa de que hay Lebesgue medibles no Borelianos, en términos de cardinales y sin usar el Axioma de elección (ver el FOLLAND, pág.38). Observemos también que mientras los borelianos se conservan por homeomorfismos, los Lebesgue medibles no, pues $g(D) = C$.

Ejercicios

Ejercicio 2.2.1 Sea $f: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ acotada. Demostrar que existe una sucesión de funciones simples s_n tales que $s_n \rightarrow f$ uniformemente.

Ejercicio 2.2.2 Sean f y g funciones medibles y A un conjunto medible. Demostrar que es medible la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ g(x) & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

Ejercicio 2.2.3 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Probar que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es medible si para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}$, $\{x: mf(x) < n\}$ es medible.

Ejercicio 2.2.4 Sean h y g funciones medibles. Demostrar que los conjuntos

$$\{x \in \Omega: h(x) < g(x)\}, \quad \{x \in \Omega: h(x) \leq g(x)\}, \quad \{x \in \Omega: h(x) = g(x)\},$$

son medibles.

Ejercicio 2.2.5 a) Sea f medible y $f = g$ c.s. ¿es necesariamente g medible?, ¿y si el espacio es completo?.

b) Sean $f \leq g \leq h$, con f y h medibles tales que $f = h$ c.s. ¿es necesariamente g medible?, ¿y si el espacio es completo?.

Ejercicio 2.2.6 Sea f_n una sucesión de funciones medibles, demostrar que es medible el conjunto $\{x: \text{existe y es finito el } \lim f_n(x)\}$.

Ejercicio 2.2.7 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente, ¿es f borel medible?

Ejercicio 2.2.8 ¿Es cierto que f es medible si y sólo si $|f|$ es medible? En caso contrario dar un contraejemplo.

Ejercicio 2.2.9 Sea A_n una sucesión de subconjuntos de Ω . Demostrar que

$$\begin{aligned} \inf I_{A_n} &= I_{\cap A_n}, & \sup I_{A_n} &= I_{\cup A_n}, \\ \liminf I_{A_n} &= I_{\liminf A_n}, & \limsup I_{A_n} &= I_{\limsup A_n}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2.10 Sean $A, B \subset \Omega$. Demostrar que $\{x \in \Omega : I_A \neq I_B\} = A \Delta B$.

Ejercicio 2.2.11 Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada en todo punto, demostrar que f' es Borel medible.

Ejercicio 2.2.12 Demostrar que $f = (f_1, \dots, f_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es medible si y sólo si cada f_i lo es.

2.3 Integración

Recordemos que \mathcal{S} es el conjunto de las funciones simples finitas.

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $h \in \mathcal{S}$ no negativa, es decir

$$h = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i} : \Omega \longrightarrow [0, \infty),$$

con los $0 \leq a_i < \infty$ y los $A_i \in \mathcal{A}$ disjuntos y $\cup A_i = \Omega$. Definimos la *integral de h respecto de μ* como el valor de $[0, \infty]$

$$\int_{\Omega} h \, d\mu = \sum a_i \mu(A_i).$$

Nota 2.3.1 Recordemos que convenimos en definir $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$. Hay que demostrar que la definición está bien dada, es decir que si existen dos representaciones

$$h = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i} = \sum_{j=1}^m b_j I_{B_j},$$

de una función simple $h \in \mathcal{S}$ no negativa, en las condiciones dichas, ambas llevan al mismo valor de la integral de h , lo cual se sigue de que $a_i = b_j$ si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Si no hay confusión con el dominio Ω de nuestras funciones, escribiremos $\int f d\mu$ en lugar de $\int_{\Omega} f d\mu$. A continuación vemos que sobre las funciones simples finitas y no negativas la integral es lineal y monótona, esto nos permitirá extender la noción de integración a funciones medibles no negativas.

Proposición 2.3.2 Sean $f, g \in \mathcal{S}$ no negativas y $c \in [0, \infty)$, entonces:

- (a) $\int cf d\mu = c \int f d\mu$.
- (b) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
- (c) $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Demostración. (a) Es obvio.

(b) Si $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$ y $g = \sum_{j=1}^m b_j I_{B_j}$, con los A_i disjuntos y los B_j disjuntos y tales que $\cup A_i = \cup B_j = \Omega$, tendremos que $f + g = \sum_{i,j} (a_i + b_j) I_{A_i \cap B_j}$ y

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &= \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i,j} a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j) = \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

(c) Sean $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$ y $g = \sum_{j=1}^m b_j I_{B_j}$, entonces $0 \leq a_i, b_j$ y si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ tendremos que $0 \leq a_i \leq b_j$, por tanto

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{i,j} a_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &\leq \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora extendemos el concepto de integral.

Definición. Si $h \geq 0$ es medible definimos la *integral* de h respecto de μ en Ω , de la forma

$$\int_{\Omega} h d\mu = \sup \left\{ \int_{\Omega} s d\mu : s \in \mathcal{S}, 0 \leq s \leq h \right\}.$$

Para $h: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible, descomponemos $h = h^+ - h^-$ y si uno de los términos, $\int_{\Omega} h^+ d\mu$ ó $\int_{\Omega} h^- d\mu$ son finitos, definimos su integral respecto de μ como la diferencia

$$\int_{\Omega} h d\mu = \int_{\Omega} h^+ d\mu - \int_{\Omega} h^- d\mu,$$

en caso contrario diremos que la integral de h no existe. Diremos que h es *integrable* si ambos términos, son finitos.

Definición. Para $h = h_1 + ih_2: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible (entendiendo que en \mathbb{C} consideramos la σ -álgebra de Borel) —lo cual equivale a que h_1 y h_2 sean medibles—, diremos que es *integrable* si lo son su parte real h_1 y su parte imaginaria h_2 , en cuyo caso definimos

$$\int h d\mu = \int h_1 d\mu + i \int h_2 d\mu.$$

Definición. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , denotaremos con $\mathcal{L}_1[\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K}]$ ó $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathbb{K})$ ó simplemente con \mathcal{L}_1 si no hay confusión, el espacio de las funciones integrables

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}.$$

Nota 2.3.3 Por varias razones no consideramos en el caso real de \mathcal{L}_1 , funciones que tomen valores $\pm\infty$. En primer lugar porque toda función integrable es finita c.s. como veremos en (2.4.7)(a), pág.82; en segundo lugar porque para la integración son indistinguibles dos funciones que son iguales c.s. (ver (2.4.10)(b), pág.83); y por último porque las funciones integrables finitas forman un espacio vectorial.

Nota 2.3.4 Como para las funciones simples sobrentenderemos el espacio Ω si no hay confusión y escribiremos $\int f d\mu$ en vez de $\int_{\Omega} f d\mu$.

Por otro lado si $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible y $B \in \mathcal{A}$, la restricción de h a (B, \mathcal{A}_B, μ) también es medible y si en este espacio existe su integral la denotaremos con $\int_B h d\mu$. Para $B = \emptyset$ es necesario

matizar y volver a la definición pues nos encontramos que en el caso $h \geq 0$

$$\int_{\emptyset} h d\mu = \sup\left\{\int_{\emptyset} s d\mu : s \in \mathcal{S}, 0 \leq s \leq h|_{\emptyset}\right\}.$$

y el conjunto de la derecha es vacío. Convenimos en definir de nuevo su supremo como $\sup \emptyset = 0$, lo cual recordemos que es compatible con que si $A \subset B \subset [0, \infty]$, entonces $\sup A \leq \sup B$. Ahora definimos para h medible arbitraria $\int_{\emptyset} h d\mu = \int_{\emptyset} h^+ - \int_{\emptyset} h^- = 0$.

2.3.1 Propiedades básicas de la integral.

Veamos en primer lugar algunas propiedades de linealidad y orden de la integral.

Proposición 2.3.5 Sean $f, g: (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles, entonces:

- (a) Si existe la integral de f y $c \in \mathbb{R}$, entonces existe la integral de cf y $\int cf d\mu = c \int f d\mu$.
 (b) Si $f \leq g$ y existen sus integrales, entonces

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

- (c) Si $f \leq g$, existe la $\int f d\mu$ y $-\infty < \int f d\mu$, entonces existe la $\int g d\mu$ y si existe la $\int g d\mu$ y $\int g d\mu < \infty$, entonces existe la $\int f d\mu$ y en ambos casos

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

- (d) Si existe la integral de f , entonces $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.

Demostración. (a) Si f es simple y $0 \leq f$, es obvio. Supongamos que $0 < c$ y que $0 \leq f$, entonces por linealidad en las simples no negativas

$$\begin{aligned} c \int f d\mu &= c \cdot \sup\left\{\int s d\mu : s \in \mathcal{S}, 0 \leq s \leq f\right\} \\ &= \sup\left\{\int cs d\mu : cs \in \mathcal{S}, 0 \leq cs \leq cf\right\} = \int cf d\mu. \end{aligned}$$

Si $0 < c$ y $f = f^+ - f^-$ tiene integral, entonces como $cf^+ = (cf)^+$ y $cf^- = (cf)^-$, tendremos por el caso anterior

$$c \int f d\mu = \int (cf)^+ d\mu - \int (cf)^- d\mu = \int cf d\mu,$$

y si $c < 0$ como $-c > 0$, tendremos $-c \int f d\mu = \int -cf d\mu$ y basta demostrar que $\int -f = -\int f$, lo cual es obvio pues $f^- = (-f)^+$ y $f^+ = (-f)^-$, por tanto

$$-\int f d\mu = \int f^- d\mu - \int f^+ d\mu = \int -f d\mu.$$

(b) Si $0 \leq f \leq g$, $s \in \mathcal{S}$ y $0 \leq s \leq f$, entonces $0 \leq s \leq g$, por tanto $\int f d\mu \leq \int g d\mu$. En general como $f^+ \leq g^+$ y $g^- \leq f^-$ tendremos por el caso anterior $\int f^+ d\mu \leq \int g^+ d\mu$ y $\int g^- d\mu \leq \int f^- d\mu$ y por 1.1 de la página 16 se tiene que

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \leq \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int g d\mu.$$

(c) Como $f^+ \leq g^+$ y $g^- \leq f^-$ tendremos por (b) que $\int f^+ d\mu \leq \int g^+ d\mu$ y $\int g^- d\mu \leq \int f^- d\mu$ y si $-\infty < \int f d\mu$, entonces

$$\int g^- d\mu \leq \int f^- d\mu < \infty,$$

y por tanto g tiene integral y se tiene el resultado. El otro caso es similar.

(d) Como $-|f| \leq f \leq |f|$, tendremos por (a) y (b) que

$$-\int |f| d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu. \quad \blacksquare$$

Veamos ahora propiedades de la restricción de la integral a un conjunto medible.

Proposición 2.3.6 (e) Si $f \geq 0$ es medible y $B \in \mathcal{A}$, entonces

$$\int_B f d\mu = \int I_B f d\mu.$$

(f) Si existe la integral de f , entonces existe la integral de f en cada $B \in \mathcal{A}$ y $\int_B f d\mu = \int I_B f d\mu$ y si f es integrable en Ω , también lo es en cada B .

Demostración. (e) Para $B = \emptyset$ ambos valores son 0 (ver nota 2.3.4). Por definición se tiene para $\mathcal{S}(B)$ las funciones simples y finitas

definidas en B

$$\begin{aligned}\int_B f d\mu &= \sup\left\{\int_B s d\mu : s \in \mathcal{S}(B), 0 \leq s \leq f|_B\right\} \\ &= \sup\left\{\int s d\mu : s \in \mathcal{S}, 0 \leq s \leq I_B f\right\} = \int I_B f d\mu,\end{aligned}$$

pues los dos conjuntos de la derecha coinciden (obsérvese que si $s \in \mathcal{S}$, con $0 \leq s \leq I_B f$, entonces $s = I_B s$).

(f) Se sigue de (b) de (e) y de que $(fI_B)^+ = f^+ I_B \leq f^+$ y $(fI_B)^- = f^- I_B \leq f^-$. ■

2.4 Teoremas básicos de integración

En esta lección consideraremos un espacio de medida fijo $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y veremos que toda función medible no negativa es la “densidad” de una medida, demostraremos que la integral es un “operador lineal”, así como los teoremas fundamentales de intercambio de límite e integral.

Teorema 2.4.1 *Sea h una función medible con integral, entonces*

$$\lambda: \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \lambda(A) = \int_A h d\mu,$$

es una medida si $h \geq 0$ y en general una carga.

Demostración. Si $h = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$ es simple no negativa, entonces por 2.3.6

$$\lambda(B) = \int_B h d\mu = \int I_B h d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(B \cap A_i),$$

y como μ es medida también lo es λ .

Si h es medible y no negativa, $B_n \in \mathcal{A}$ son disjuntos, $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $s \in \mathcal{S}$, con $0 \leq s \leq hI_B$, entonces por lo anterior

$$\int s d\mu = \int_B s d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} s d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} h d\mu,$$

y tomando el supremo, $\lambda(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n)$. Ahora $\lambda(B_n) \leq \lambda(B)$, pues $hI_{B_n} \leq hI_B$ y si algún $\lambda(B_n) = \infty$, $\lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n)$. Si por el contrario todo $\lambda(B_n) < \infty$, sea $\epsilon > 0$, entonces para cada i existe una función simple finita $s_i \in \mathcal{S}$ tal que $0 \leq s_i \leq h$ y

$$\int_{B_i} h d\mu \leq \int_{B_i} s_i d\mu + \frac{\epsilon}{2^i},$$

y para cada n se tiene que $s = \sum_{i=1}^n I_{B_i} s_i \in \mathcal{S}$ es una función simple tal que $0 \leq s \leq hI_B$, por tanto se sigue de (2.3.2) que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{B_i} h d\mu &\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} s_i d\mu + \epsilon = \int \sum_{i=1}^n I_{B_i} s_i d\mu + \epsilon \\ &\leq \int I_B h d\mu + \epsilon = \lambda(B) + \epsilon, \end{aligned}$$

y como el ϵ es arbitrario tenemos haciendo $n \rightarrow \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) \leq \lambda(B)$.

Por último sea $h = h^+ - h^-$, entonces como una de las dos integrales $\int_{\Omega} h^+ d\mu$, ó $\int_{\Omega} h^- d\mu$ es finita, tendremos que una de las dos medidas $\lambda^+(B) = \int_B h^+ d\mu$, ó $\lambda^-(B) = \int_B h^- d\mu$ es finita, en cualquier caso $\lambda(B) = \lambda^+(B) - \lambda^-(B)$ y basta demostrar que la diferencia de dos medidas, si una es finita, es numerablemente aditiva. ■

En la demostración de este resultado hemos visto cómo λ puede ponerse como diferencia de dos medidas

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-, \quad \lambda^+(A) = \int_A h^+ d\mu, \quad \lambda^-(A) = \int_A h^- d\mu,$$

y al menos una de ellas es finita. Volveremos sobre este resultado en el **Teorema de descomposición de Jordan** (4.2.7).

Nota 2.4.2 Denotaremos la carga λ del resultado anterior con $\lambda = h\mu$ y llamaremos a μ la *medida base* de λ . La caracterización de las cargas con base μ nos la dará el **Teorema de Radon–Nikodym** que veremos en (4.4.3) de la página 143.

Tomar límites bajo el signo integral es uno de los procesos fundamentales en Análisis. Y uno de los hechos mas notables de esta teoría es la facilidad con la que esto puede hacerse.

Teorema de la convergencia monótona 2.4.3 *Sea h_n una sucesión creciente de funciones medibles no negativas, entonces existe $h(x) = \lim h_n(x)$, es medible, tiene integral y*

$$\int h_n d\mu \uparrow \int h d\mu.$$

Demostración. Por ser h_n creciente existe el límite h , es medible pues es límite de medibles y es no negativa por tanto tiene integral y como $h_n \leq h_{n+1} \leq h$, $\int h_n d\mu \leq \int h_{n+1} d\mu \leq \int h d\mu$, por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mu \leq \int h d\mu,$$

para ver la otra desigualdad sea $s \in \mathcal{S}$ una función simple finita, tal que $0 \leq s \leq h$ y $0 < r < 1$, entonces como $h_n \uparrow h$, tendremos que

$$B_n = \{x \in \Omega : rs(x) \leq h_n(x)\} \Rightarrow B_n \uparrow \Omega,$$

pues $rs < h$ (ya que $rs < s$) y $h_n \rightarrow h$; por lo tanto $\int_{B_n} s d\mu \rightarrow \int_{\Omega} s d\mu$ y como

$$r \int_{B_n} s d\mu \leq \int_{B_n} h_n d\mu \leq \int h_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mu,$$

tendremos, haciendo $n \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow 1$, que

$$\int s d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mu,$$

y tomando supremos tenemos la otra desigualdad. ■

Hemos visto que las constantes salen fuera de la integral, con el siguiente resultado completamos la linealidad de la integral.

Teorema de aditividad 2.4.4 *Sean f y g funciones medibles con integral tales que tanto $f+g$ como $\int f d\mu + \int g d\mu$, están bien definidas, entonces $f+g$ tiene integral y*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

En particular si $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son integrables, $f+g$ es integrable y se tiene la igualdad.

Demostración. (a) En (2.3.2) lo hemos visto para f y g funciones simples no negativas. (b) Si $0 \leq f, g$, podemos tomar sendas sucesiones de funciones simples f_n y g_n , no negativas, tales que $f_n \uparrow f$ y $g_n \uparrow g$, por tanto $0 \leq s_n = f_n + g_n \rightarrow f + g$ y por (a), como s_n es simple, $\int s_n d\mu = \int f_n d\mu + \int g_n d\mu$ y por el *Teorema de la convergencia monótona*, pág.79,

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

(c) Si $f \geq 0$, $g \leq 0$ y $h = f + g \geq 0$ (por tanto g es finita), tendremos que $f = h + (-g)$ y por (b) $\int f d\mu = \int h d\mu - \int g d\mu$, y se concluye pues $\int g d\mu$ es finita, ya que si fuese $\int g d\mu = -\infty$, como $h \geq 0$

$$\int f d\mu = \int h d\mu - \int g d\mu \geq - \int g d\mu = \infty,$$

pero entonces $\int f d\mu = \infty$ y la suma de las integrales de f y g no estaría bien definida.

(d) Si $f \geq 0$, $g \leq 0$ y $h = f + g \leq 0$, se tiene también el resultado por (c) tomando $f' = -g$, $g' = -f$ y $h' = f' + g' = -h$.

(e) Por último consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \Omega : f(x) \geq 0, g(x) \geq 0\}, \\ E_2 &= \{x \in \Omega : f(x) \geq 0, g(x) < 0, h(x) \geq 0\}, \\ E_3 &= \{x \in \Omega : f(x) \geq 0, g(x) < 0, h(x) < 0\}, \\ E_4 &= \{x \in \Omega : f(x) < 0, g(x) \geq 0, h(x) \geq 0\}, \\ E_5 &= \{x \in \Omega : f(x) < 0, g(x) \geq 0, h(x) < 0\}, \\ E_6 &= \{x \in \Omega : f(x) < 0, g(x) < 0\}, \end{aligned}$$

por los casos anteriores tenemos $\int_{E_i} (f + g) d\mu = \int_{E_i} f d\mu + \int_{E_i} g d\mu$, y como las integrales de f y g existen tenemos por (2.4.1) que

$$\sum_{i=1}^6 \int_{E_i} f d\mu = \int f d\mu, \quad \sum_{i=1}^6 \int_{E_i} g d\mu = \int g d\mu,$$

y como su suma está bien definida, basta demostrar por (2.4.1) que existe la $\int (f + g) d\mu$, es decir que una de las integrales

$$\int h^+ d\mu = \sum_{i=1}^6 \int_{E_i} h^+ d\mu, \quad \int h^- d\mu = \sum_{i=1}^6 \int_{E_i} h^- d\mu,$$

es finita. En caso contrario existen $1 \leq i, j \leq 6$, tales que

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \int_{E_i} h^+ d\mu = \infty \\ \int_{E_j} h^- d\mu = \infty \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_{E_i} h d\mu = \infty \\ \int_{E_j} h d\mu = -\infty \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_{E_i} f d\mu = \infty \quad \text{ó} \quad \int_{E_i} g d\mu = \infty \\ \int_{E_j} f d\mu = -\infty \quad \text{ó} \quad \int_{E_j} g d\mu = -\infty, \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int f d\mu = \infty \quad \text{ó} \quad \int g d\mu = \infty \\ \int f d\mu = -\infty \quad \text{ó} \quad \int g d\mu = -\infty, \end{array} \right. \end{aligned}$$

lo cual implica que $\int f d\mu + \int g d\mu$ no está bien definida. ■

Corolario 2.4.5 \mathcal{L}_1 es un \mathbb{K} -espacio vectorial y la aplicación

$$\Lambda: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \Lambda(f) = \int f d\mu,$$

es \mathbb{K} -lineal. Además para cada $f \in \mathcal{L}_1$, $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$.

Demostración. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lo hemos visto en (2.3.5)(a), pág.75, y el Teorema de aditividad, pág.79. Ahora para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sea $z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}$ y $f = f_1 + if_2, g = g_1 + ig_2: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medibles e integrables, entonces las f_i, g_i son integrables y se prueba simultáneamente por una parte que también lo son zf y $f + g$, y por otra la linealidad de la integral, pues

$$\begin{aligned} z \int f &= z_1 \int f_1 - z_2 \int f_2 + i(z_1 \int f_2 + z_2 \int f_1) \\ &= \int (z_1 f_1 - z_2 f_2) + i \int (z_1 f_2 + z_2 f_1) \\ &= \int (z_1 f_1 - z_2 f_2 + i(z_1 f_2 + z_2 f_1)) = \int zf, \\ \int (f + g) &= \int (f_1 + g_1) + i \int (f_2 + g_2) = \int f + \int g. \end{aligned}$$

La desigualdad $|\int f| \leq \int |f|$ ya la vimos para el caso real en (2.3.5), pág.75, veámosla ahora para el caso complejo. Sea $\Lambda(f) = r \cdot e^{i\theta} \neq 0$,

entonces para $e^{-i\theta} f = g_1 + ig_2$, con las g_i reales, tendremos $|g_1| \leq |g_1 + ig_2| = |f|$ y

$$|\Lambda(f)| = r = e^{-i\theta} \Lambda(f) = \Lambda(e^{-i\theta} f) = \Lambda(g_1) \leq \Lambda(|g_1|) \leq \Lambda(|f|). \quad \blacksquare$$

Como consecuencia de los teoremas anteriores tenemos una de las propiedades más importantes de la integración, la de poder integrar término a término la integral de una serie de funciones medibles no negativas.

Corolario 2.4.6 *Si h_n son funciones medibles no negativas, entonces*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int h_n d\mu.$$

Demostración. Consideremos $0 \leq \sum_{i=1}^n h_i \uparrow \sum_{i=1}^{\infty} h_i$ y apliquemos el teorema de aditividad y el de la convergencia monótona, pág.79. \blacksquare

Como una simple consecuencia tenemos que si $a_{nm} \geq 0$ para $n, m \in \mathbb{N}$, entonces para $h_n(m) = a_{nm}$ y μ la medida de contar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}.$$

Veamos ahora algunas propiedades de las funciones integrables.

Corolario 2.4.7 (a) $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible es integrable si y sólo si $|f|$ es integrable y en tal caso f es finita c.s.

(b) Si f y g son medibles, $|f| \leq g$ y g es integrable, entonces f es integrable.

(c) $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible es integrable sii $|h|$ es integrable.

Demostración. (a) Como $|f| = f^+ + f^-$, tenemos por el teorema de aditividad que $\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$ y es integrable sii f^+ y f^- tienen integral finita, y esto por definición es que f sea integrable y en tal caso

$$\infty \cdot \mu(\{|f| = \infty\}) = \int_{\{|f|=\infty\}} |f| d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty,$$

por tanto $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$.

(b) Por (2.3.5)(b) $\int |f| \leq \int g \Rightarrow |f|$ es integrable $\Leftrightarrow f$ es integrable.

(c) Es obvio pues $|h_1|, |h_2| \leq |h| \leq |h_1| + |h_2|$. \blacksquare

Nota 2.4.8 Acabamos de demostrar que una función medible h es integrable si y sólo si lo es $|h|$. Esta propiedad es importante y distingue fundamentalmente esta teoría de otras teorías de integración como la de PERRON Y DENJOY. Remitimos al lector a los comentarios del final del Tema.

Ejemplo 2.4.9 Veamos como consecuencia de los resultados anteriores que la función $\sin x/x$ no es Lebesgue integrable en $(0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dm &= \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dm \geq \\ &\geq \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dm = \sum_{n=0}^\infty \frac{2}{(n+1)\pi} = \infty, \end{aligned}$$

sin embargo veremos en el ejemplo (3.4.4) de la página 116 que existe el límite

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dm = \frac{\pi}{2}.$$

A continuación veremos cómo las funciones iguales casi seguro son iguales para la integración y como acabamos de ver que toda función integrable $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, es finita c.s., se justifica por qué en $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathbb{R})$ consideramos sólo funciones $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y no funciones $h: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Proposición 2.4.10 Sean $f, g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles, entonces:

- (a) Si $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$, entonces existen las integrales y son nulas $\int_A f d\mu = \int I_A f d\mu = 0$.
- (b) Si $f = g$ c.s. y existe $\int f d\mu$, entonces también existe $\int g d\mu$ y coinciden.

Demostración. (a) Para $s \geq 0$ en \mathcal{S} , $\int_A s d\mu = 0$, por tanto para $f \geq 0$ medible $\int I_A f = \int_A f = 0$ y para f medible

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- = 0 = \int I_A f,$$

pues $\int (I_A f)^+ = \int I_A f^+ = 0$ y $\int (I_A f)^- = \int I_A f^- = 0$.

(b) El conjunto $A = \{x : f(x) \neq g(x)\}$ es medible, por tanto como $f = g$ c.s., $\mu(A) = 0$, y si existe la $\int f d\mu$, se sigue de (2.4.1) y de (a) que

$$\int f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{A^c} f d\mu = \int I_A g d\mu + \int I_{A^c} g d\mu = \int g d\mu,$$

donde la última igualdad se sigue del *Teorema de aditividad* (pág.79), pues la suma de integrales y de integrandos, $g = I_A g + I_{A^c} g$, están bien definidas. ■

2.4.1 Teorema de la convergencia dominada.

Como consecuencia de los resultados anteriores se tiene que las hipótesis del *Teorema de la convergencia monótona*, pág.79, se pueden debilitar considerablemente.

Teorema de la convergencia monótona extendido 2.4.11 Sean h, f, f_n funciones medibles, tales que existe $\int h d\mu$, entonces:

(a) Si $h \leq f_n$, $f_n \uparrow f$ y $-\infty < \int h d\mu$, entonces

$$\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu.$$

(b) Si $f_n \leq h$, $f_n \downarrow f$ y $\int h d\mu < \infty$, entonces

$$\int f_n d\mu \downarrow \int f d\mu.$$

Demostración. Por (2.3.5) las f_n y f tienen integral. (a) Si la $\int h d\mu = \infty$, entonces

$$\int f_n d\mu = \int f d\mu = \infty.$$

En caso contrario, por la hipótesis, h es integrable y por (2.4.7)(a) h es finita c.s., y para $A = \{|h| < \infty\}$, $\mu(A^c) = 0$ y por (2.4.10) la integral de cualquier función en este conjunto es nula. Ahora si definimos $g_n = f_n I_A - h I_A$ y $g = f I_A - h I_A$, tendremos $g_n \geq 0$ y $g_n \uparrow g$ y por el *Teorema de la convergencia monótona*, pág.79, el de *aditividad* y

(2.4.10),

$$\begin{aligned}\int f_n - \int h &= \int_A f_n - \int_A h = \int I_A f_n - I_A h = \int g_n \rightarrow \int g \\ &= \int I_A f - I_A h = \int f - \int h.\end{aligned}$$

y $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$. (b) Se sigue de (a) cambiando de signo. ■

Lema de Fatou 2.4.12 Sean h, f_n funciones medibles, tales que existe $\int h d\mu$, entonces:

(a) Si $h \leq f_n$ y $-\infty < \int h d\mu$, entonces

$$\liminf \int f_n d\mu \geq \int (\liminf f_n) d\mu.$$

(b) Si $f_n \leq h$ y $\int h d\mu < \infty$, entonces

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int (\limsup f_n) d\mu.$$

Demostración. (a) Sea $g_n = \inf_{k \geq n} f_k \uparrow g = \liminf f_n$, entonces como $h \leq g_n$, por el Teorema de la convergencia monótona extendido $\int g_n d\mu \uparrow \int g d\mu$ y como $g_n \leq f_n$

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \int g d\mu = \lim \int g_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

(b) Se sigue de (a) cambiando de signo. ■

Ahora como consecuencia de este resultado se tiene el mas importante que permite permutar límite e integral.

Teorema de la convergencia dominada 2.4.13 Sean $h, f, f_n: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles tales que $|f_n| \leq h$, h es integrable y $f_n \rightarrow f$, entonces f es integrable y

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

Demostración. Como $|f_n| \rightarrow |f|$, tendremos que $|f| \leq h$ y f es integrable por (2.4.7), pág.82. Ahora como $-h \leq f_n \leq h$ se sigue del

Lema de Fatou que

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu &= \int (\liminf f_n) \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu \\ &\leq \limsup \int f_n \, d\mu \leq \int (\limsup f_n) \, d\mu = \int f \, d\mu. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 2.4.14 El Teorema de la convergencia dominada también es válido en el caso complejo, es decir para $f, f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medibles y se demuestra aplicando el caso real a $|f_n - f|$ que está acotada por la función integrable $2h$ y $|f_n - f| \rightarrow 0$

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0.$$

Por otra parte el Teorema de la convergencia dominada también es válido si las condiciones se tienen casi seguro. \blacksquare

Podemos dar simples ejemplos en los que el resultado no es cierto si h no existe.

Ejemplo 2.4.15 Consideremos la medida de Lebesgue en $(0, 1)$, entonces $f_n = nI_{(0, 1/n)} \rightarrow 0 = f$ y $\int f_n \, d\mu = 1 \not\rightarrow \int f \, d\mu = 0$.

Ejemplo 2.4.16 Consideremos la medida de Lebesgue en \mathbb{R} , entonces $f_n = (1/n)I_{[0, n]} \rightarrow 0 = f$ uniformemente y $\int f_n \, d\mu = 1 \not\rightarrow \int f \, d\mu = 0$.

A continuación damos algunas consecuencias importantes del *Teorema de la convergencia dominada*.

Corolario 2.4.17 Sean h, f, f_n medibles y $p > 0$, tales que $|f_n| \leq h$, h^p integrable y $f_n \rightarrow f$ c.s., entonces $|f|^p$ es integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0.$$

Demostración. Como $|f_n|^p \leq h^p$, tendremos $|f|^p \leq h^p$ y por tanto $|f|^p$ es integrable, por tanto las f_n y la f son finitas c.s. y en esos puntos $|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2h)^p$ siendo la última integrable y el resultado se sigue del *Teorema de la convergencia dominada*. \blacksquare

Teorema 2.4.18 Sean h_n medibles tales que $\sum \int |h_n| d\mu < \infty$, entonces $\sum h_n$ converge c.s. a una función medible finita y

$$\int \sum h_n d\mu = \sum \int h_n d\mu.$$

Demostración. Por (2.4.6), $\int \sum |h_n| d\mu = \sum \int |h_n| d\mu < \infty$ y por (2.4.7), $g = \sum |h_n| < \infty$ c.s. Sea $A = \{g < \infty\}$ entonces las funciones medibles finitas $h'_n = h_n I_A$ definen una serie $f = \sum h'_n$ absolutamente convergente en todo punto y por tanto convergente, es decir las sumas parciales $f_n = \sum_{k=1}^n h'_k$ que son medibles convergen a la función medible f que coincide c.s. con $\sum h_n$. Ahora como $|f_n| \leq g = \sum_{k=1}^{\infty} |h_k|$, siendo g integrable, el resultado se sigue del *Teorema de la convergencia dominada* y de que funciones iguales c.s. tienen igual integral. ■

2.4.2 Dependencia de un parámetro.

Frecuentemente necesitamos considerar integrales en las que el integrando depende de un parámetro real. Veamos en este contexto una aplicación del *Teorema de la convergencia dominada*, pág.85. En lo que resta de lección consideraremos una función

$$f: I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

con I un intervalo finito o no de \mathbb{R} , tal que para cada $t \in I$ es medible la función

$$f_t: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_t(x) = f(t, x).$$

Lema 2.4.19 Sea $G: I \rightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in \bar{I}$ y $A \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} G(t) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall t_n \rightarrow t_0, \quad G(t_n) \rightarrow A.$$

Corolario 2.4.20 Sea g integrable en Ω tal que para todo $t \in I$, $|f(t, x)| \leq g(x)$, entonces:

(a) Si para un $t_0 \in \bar{I}$ y todo $x \in \Omega$, existe el $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x)$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int f(t, x) d\mu = \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x) d\mu.$$

(b) Si para cada $x \in \Omega$ la función $t \in I \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}$ es continua, entonces la función $F(t) = \int f(t, x) d\mu$ es continua en I .

Demostración. (a) Sea $g(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x)$ y consideremos una sucesión $t_n \rightarrow t_0$. Definamos $g_n(x) = f(t_n, x)$, las cuales son medibles y como $g_n \rightarrow g$, g es medible. Ahora el resultado se sigue aplicando el *Teorema de la convergencia dominada*, pág.85 y el Lema anterior.

(b) Es consecuencia de (a). ■

Corolario 2.4.21 *Sea I abierto y supongamos que para un $s \in I$ la función $f_s(x) = f(s, x)$ es integrable, existe $\partial f / \partial t$ y existe una función medible e integrable g en Ω , tal que para todo $(t, x) \in I \times \Omega$, $|\partial f(t, x) / \partial t| \leq g(x)$, entonces $F(t) = \int f(t, x) d\mu$ es diferenciable en I y*

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \int f(t, x) d\mu = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu.$$

Demostración. Veamos primero que $\partial f / \partial t(t, \cdot)$ es medible, para cada $t \in I$, para ello sea $t_n \rightarrow t$, con $t_n \neq t$, entonces como

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \lim_{t_n \rightarrow t} \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t},$$

se sigue que es medible. Ahora por el *Teorema del valor medio* existe t_s entre t y s tal que

$$\begin{aligned} f(t, x) - f(s, x) &= (t - s) \frac{\partial f}{\partial t}(t_s, x) \Rightarrow \\ |f_t(x)| &\leq |f_s(x)| + |t - s|g(x), \end{aligned}$$

por tanto cada f_t es integrable y podemos aplicar el *Teorema de aditividad* (2.4.4), página 79, para poner

$$\frac{F(t + \epsilon) - F(t)}{\epsilon} = \int \frac{f(t + \epsilon, x) - f(t, x)}{\epsilon} d\mu,$$

ahora como el integrando está acotado en módulo por g y tiene límite el resultado se sigue del corolario anterior. ■

2.4.3 Otras propiedades.

El siguiente es uno de los resultados mas simples y útiles en la Teoría de Probabilidades.

Desigualdad de Tchebycheff 2.4.22 Si $f \geq 0$ es medible y $0 < p, \epsilon < \infty$, entonces

$$\mu\{f \geq \epsilon\} \leq \epsilon^{-p} \int f^p d\mu.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \int f^p d\mu &= \int_{\{f \geq \epsilon\}} f^p d\mu + \int_{\{f < \epsilon\}} f^p d\mu \\ &\geq \int_{\{f \geq \epsilon\}} f^p d\mu \geq \epsilon^p \mu\{f \geq \epsilon\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 2.4.23 Si f medible es p -integrable (i.e. $\int |f|^p d\mu < \infty$), para un $p \in (0, \infty)$, entonces $\{f \neq 0\}$ es σ -finito.

Demostración. Por la desigualdad de Tchebycheff para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\mu\{|f| \geq 1/n\} \leq n^p \int |f|^p d\mu < \infty,$$

y $\{f \neq 0\}$ es la unión de estos conjuntos. \blacksquare

Corolario 2.4.24 Si $f \geq 0$ c.s. es medible y $\int f d\mu = 0$, entonces $f = 0$ c.s.

Demostración. $\mu\{f < 0\} = 0$ y $\mu\{f > 0\} = 0$, pues $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq 1/n\}$, siendo $\mu\{f \geq 1/n\} = 0$ pues por la desigualdad de Tchebycheff

$$\mu\{f \geq 1/n\} \leq n \int f d\mu = 0. \quad \blacksquare$$

Corolario 2.4.25 Si g es medible y para todo $A \in \mathcal{A}$ es $\int_A g d\mu = 0$, entonces $g = 0$ c.s.

Demostración. Para los medibles $A = \{g > 0\}$ y $B = \{g < 0\}$ se tiene por (2.4.24)

$$\begin{aligned} \int g^+ d\mu &= \int_A g d\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad g^+ = 0 \quad \text{c.s.}, \\ \int g^- d\mu &= \int_B g d\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad g^- = 0 \quad \text{c.s.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Veamos ahora un recíproco de (2.3.5)(b).

Proposición 2.4.26 Sean g y h funciones medibles con integral, entonces en cualquiera de los dos casos:

- (a) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio σ -finito,
- (b) El espacio es arbitrario pero g y h son integrables,

se verifica que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \int_A g \, d\mu \leq \int_A h \, d\mu \quad \Rightarrow \quad g \leq h \quad \text{c.s.}$$

Demostración. Veamos que tiene medida nula el medible

$$\{x : h(x) < g(x)\} = \cup_{r_1 < r_2 \in \mathbb{Q}} [\{h < r_1\} \cap \{r_2 < g\}],$$

para ello basta ver que para cada medible $A = \{h < r_1\} \cap \{r_2 < g\}$ de esa unión numerable, $\mu(A) = 0$.

Observemos que para $r_1 < r_2$ y cada medible $B \subset A$

$$r_2 \mu(B) \leq \int_B g \, d\mu \leq \int_B h \, d\mu \leq r_1 \mu(B),$$

por tanto $\mu(B) = 0$ ó $\mu(B) = \infty$.

(a) Si el espacio es σ finito, A es unión numerable de medibles B con $\mu(B) < \infty$, lo cual implica $\mu(B) = 0$ y $\mu(A) = 0$.

(b) Veamos que si $\mu(A) = \infty$ una de las funciones no es integrable. Si $r_2 \leq 0$, entonces $r_1 < 0$ y por tanto $\int_A h \, d\mu \leq r_1 \cdot \infty = -\infty$, lo cual implica que h no es integrable y si $r_2 > 0$, $\infty = r_2 \cdot \infty \leq \int_A g$, y g no es integrable. ■

Ejercicios

Ejercicio 2.4.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_{A_n}$, con $a_n \in (0, \infty)$ y $A_n \in \mathcal{A}$, calcular $\int f \, d\mu$.

Ejercicio 2.4.2 Sea $f \geq 0$ integrable. Demostrar que $\forall \epsilon > 0$ existe un medible A , con $\mu(A) < \infty$ tal que $\int f < \int_A f + \epsilon$.

Ejercicio 2.4.3 Sea f integrable y $\epsilon > 0$. Demostrar que existe una función simple s tal que $\int |f - s| < \epsilon$.

Ejercicio 2.4.4 Sean $\mu_1 \leq \mu_2$ medidas. Demostrar que si una función medible compleja f es μ_2 -integrable, entonces es μ_1 -integrable.

Ejercicio 2.4.5 Sean $f_n \geq 0$ medibles tales que $f_n \downarrow f$. Demostrar que si f_1 es integrable, $\int f_n \rightarrow \int f$. ¿Es cierto si f_1 no es integrable?

Ejercicio 2.4.6 Sean $f, f_n \geq 0$ integrables, tales que $f_n \rightarrow f$ c.s. Demostrar que $\int f_n \rightarrow \int f$ sii $\int |f_n - f| \rightarrow 0$.

Ejercicio 2.4.7 Sea $\mu(\Omega) < \infty$ y f_n integrables tales que $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Demostrar que f es integrable y que $\int f_n \rightarrow \int f$.

Ejercicio 2.4.8 Sean f, f_n integrables, tales que $f_n \rightarrow f$ c.s. Demostrar que $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ sii $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$.

Ejercicio 2.4.9 Sea f integrable y g medible acotada, demostrar que fg es integrable.

Ejercicio 2.4.10 Demostrar que μ es σ -finita si y sólo si existe una función medible estrictamente positiva e integrable.

Ejercicio 2.4.11 Sea Ω un espacio topológico, μ una medida en $\mathcal{B}(\Omega)$ tal que $\mu(A) > 0$, para cada abierto A y $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $f = g$ c.s., demostrar que $f = g$.

Ejercicio 2.4.12 Demostrar que si $f \leq g$ c.s., existe la $\int f$ y $-\infty < \int f$, entonces existe la $\int g$ y si existe la $\int g$ y $\int g < \infty$, entonces existe la $\int f$ y en ambos casos $\int f \leq \int g$.

Ejercicio 2.4.13 Demostrar el teorema de la convergencia monótona cuando las condiciones son c.s.

Ejercicio 2.4.14 Calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} dm.$$

Ejercicio 2.4.15 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible y $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dm = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) dm,$$

en el sentido de que si una integral existe también la otra y coinciden.

Ejercicio 2.4.16 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $e^{tx} f(x)$ es integrable para todo $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Demostrar que $F(t) = \int e^{tx} f(x) dm$ es diferenciable y que $F'(t) = \int x e^{tx} f(x) dm$.

Ejercicio 2.4.17 Demostrar que para $t \geq 0$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, la sucesión $(1 + (t/n)^\alpha)^n$ es creciente y para $1 \leq \alpha$, $(1 - (t/n)^\alpha)^n$ también es creciente.

Ejercicio 2.4.18 Demostrar que

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n (1 - (t/n))^n \log t \, dm = \int_1^\infty e^{-t} \log t \, dm. \\ \text{(b)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 - (t/n))^n \log t \, dm = \int_0^1 e^{-t} \log t \, dm. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.19 Sea f no negativa e integrable, con $0 < \int f \, d\mu = c < \infty$ y sea $0 < \alpha < \infty$. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int n \log \left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right] d\mu = \begin{cases} \infty, & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ c, & \text{si } \alpha = 1, \\ 0, & \text{si } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

Ejercicio 2.4.20 Demostrar que si f es μ -integrable, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que

$$\mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |f| \, d\mu < \epsilon.$$

Ejercicio 2.4.21 Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable $F(x) = \int_{-\infty}^x f \, dm$ es uniformemente continua.

2.5 Integrales de Riemann y de Lebesgue

En esta lección veremos que la integral de Lebesgue, que denotaremos con $\int f \, dm$, es una generalización de la de Riemann, que denotaremos

con $\int f dx$, y obtendremos un criterio en términos de la medida de Lebesgue, que nos diga qué funciones son las Riemann integrables.

Recordemos brevemente cómo está definida la integral de Riemann.

Definición. Sean $a < b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada $|f| \leq M$. Por una *partición* de I entenderemos un subconjunto finito

$$P = \{x_0 = a, \dots, x_n = b\} \subset I,$$

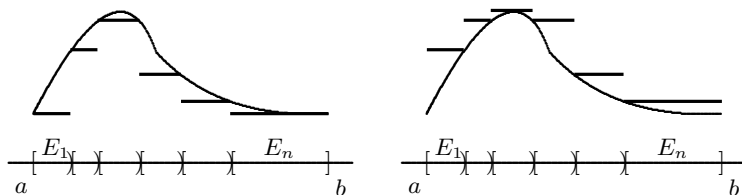
que tomaremos ordenado ($x_i < x_{i+1}$). La partición de I realmente la forman los intervalos disjuntos

$$E_1 = [x_0, x_1), \dots, E_{n-1} = [x_{n-2}, x_{n-1}), E_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Nota 2.5.1 Tomamos el intervalo I cerrado por comodidad, los resultados son igualmente válidos, con pequeñas modificaciones, para cualquier intervalo acotado.

Definición. Para cada partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de I consideremos los intervalos disjuntos correspondientes E_i , los valores $M_i = \sup\{f(x) : x \in E_i\}$, $m_i = \inf\{f(x) : x \in E_i\}$ y las funciones simples y acotadas

$$\beta_P = \sum m_i I_{E_i}, \quad \alpha_P = \sum M_i I_{E_i},$$



— Figura 2. Gráficas de las funciones $\beta_P \leq f \leq \alpha_P$.—

que llamaremos respectivamente *funciones simples inferior y superior* de f relativas a P y a cuyas integrales

$$\int_{[a,b]} \beta_P dm = \sum m_i (x_i - x_{i-1}), \quad \int_{[a,b]} \alpha_P dm = \sum M_i (x_i - x_{i-1}),$$

llamamos *suma inferior y superior* de f respecto de P .

Denotaremos con $|P| = \max\{|x_i - x_{i-1}| : i = 1, \dots, n\}$.

Es fácil demostrar que si P_n es una sucesión de particiones de I tales que para todo n

$$P_n \subset P_{n+1}$$

y α_n, β_n son las funciones simples superior e inferior de f relativas a P_n , tendremos que

$$-M \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq M,$$

y por tanto existen los *límites superior e inferior* respectivamente, relativos a P_n , $\alpha_n \downarrow \alpha$, $\beta_n \uparrow \beta$, son funciones medibles y $\beta \leq f \leq \alpha$. Además como $|\alpha_n| \leq M$ y $|\beta_n| \leq M$, siendo esta función integrable pues I es acotado y $\int M dm = Mm[a, b] = M(b - a) < \infty$, se sigue del *Teorema de la convergencia dominada*, pág.85 que α y β son integrables y

$$\lim \int_{[a, b]} \beta_n dm = \int_{[a, b]} \beta dm \leq \int_{[a, b]} \alpha dm = \lim \int_{[a, b]} \alpha_n dm.$$

Definición. Diremos que f es *Riemann integrable* si existe un $r \in \mathbb{R}$, tal que para toda sucesión P_n de particiones tales que $P_n \subset P_{n+1}$ y $|P_n| \rightarrow 0$ las funciones borel medibles α y β correspondientes verifican

$$\int_{[a, b]} \alpha dm = \int_{[a, b]} \beta dm = r,$$

independientemente de la sucesión P_n tomada, y llamaremos *integral de Riemann* a este valor común r , que denotaremos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} \alpha dm = \int_{[a, b]} \beta dm.$$

Lema 2.5.2 Sea P_n una sucesión de particiones tal que $P_n \subset P_{n+1}$ y sean α y β los límites superior e inferior respectivamente.

- (a) Si $x \notin \cup P_n$ y $\alpha(x) = \beta(x)$, f es continua en x .
- (b) Si f es continua en x y $|P_n| \rightarrow 0$, $\beta(x) = f(x) = \alpha(x)$.

Demostración. (a) Como $\alpha_n(x) \rightarrow \alpha(x) = f(x)$ y $\beta_n(x) \rightarrow \beta(x) = f(x)$, para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que para $n \geq N$, $\alpha_n(x) - \beta_n(x) < \epsilon$. Para este n existen $a_i, a_{i+1} \in P_n$, tales que $x \in (a_i, a_{i+1}) = V$ y V es un abierto, entorno de x , en el que α_n y β_n son constantes y $\beta_n \leq f \leq \alpha_n$, por tanto si $y \in V$, $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

(b) Por ser f continua en x , para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $y \in V = (x - \delta, x + \delta)$, entonces $f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon$. Tomemos n tal que $|P_n| < \delta$ y $a_{i-1}, a_i \in P_n$, tales que $x \in [a_{i-1}, a_i] = E_i$, entonces $E_i \subset V$ y por tanto

$$f(x) - \epsilon \leq \beta_n(x) \leq \beta(x) \leq f(x) \leq \alpha(x) \leq \alpha_n(x) \leq f(x) + \epsilon. \quad \blacksquare$$

Teorema de caracterización 2.5.3 Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es Riemann integrable.

(b) Existe una sucesión de particiones P_n con $P_n \subset P_{n+1}$ cuyas funciones límite superior e inferior satisfacen

$$\int_{[a,b]} \alpha dm = \int_{[a,b]} \beta dm.$$

(c) f es continua c.s. (m).

y si se satisfacen entonces f es Lebesgue medible, integrable y

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f(x) dx.$$

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Es obvio.

(b) \Rightarrow (c) Si existe una sucesión P_n de particiones, con $P_n \subset P_{n+1}$ tal que $\int \alpha dm = \int \beta dm$, entonces como $\beta \leq f \leq \alpha$ se sigue de (2.4.24) que $\beta = \alpha$ salvo en un borel medible B con $m(B) = 0$ y como $m(P) = 0$, para $P = \cup P_n$, por el Lema f es continua c.s. (fuera de $B \cup P$).

(c) \Rightarrow (a) Sea f continua fuera de un $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, con $m(B) = 0$. Sea P_n una sucesión de particiones de I tales que $P_n \subset P_{n+1}$ y $|P_n| \rightarrow 0$, entonces por el Lema si x está fuera de B , tendremos que $\alpha(x) = f(x) = \beta(x)$. Por tanto f coincide con una función medible α c.s., y f es Lebesgue medible y acotada por tanto integrable y como $\alpha = f = \beta$ c.s. tendremos que

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} \alpha dm = \int_{[a,b]} \beta dm,$$

y como las integrales no dependen de P_n tendremos que f es Riemann integrable y que

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Definición. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable en cada intervalo acotado, definimos la *integral impropia* de Riemann como,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

si existe el límite, es decir si existe el $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$ y no depende de las sucesiones $a_n \rightarrow -\infty$ y $b_n \rightarrow \infty$.

Ejercicios

Ejercicio 2.5.1 (a) Demostrar que si f tiene integral impropia de Riemann, entonces es continua c.s. (m), pero no recíprocamente.

(b) Si $f \geq 0$ y es acotada en cada compacto, entonces se tiene la equivalencia.

Ejercicio 2.5.2 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, con integral impropia de Riemann finita, demostrar que f es Lebesgue medible e integrable y las dos integrales coinciden. Dar un contraejemplo si quitamos la no negatividad.

Ejercicio 2.5.3 Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable

$$\int_{(-\infty, \infty)} f \, dm = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} f \, dm.$$

¿Es cierto si existe la integral pero no es finita?

Ejercicio 2.5.4 (a) Demostrar por inducción que $\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dm = n!$.

(b) Demostrar que para $t > 0$, $\int_0^\infty e^{-tx} \, dm = 1/t$ y utilizarlo para demostrar (a) —sabiendo que la integral es finita—, derivando respecto de t .

Ejercicio 2.5.5 Calcular:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) \, dm.$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty n \sin(x/n) [x(1 + x^2)]^{-1} \, dm.$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty n(1 + n^2 x^2)^{-1} \, dm$, en función de a .

Ejercicio 2.5.6 Dadas las funciones

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} \, dt \right)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} \, dt,$$

demostrar que:

- (a) $f(x) + g(x) = \pi/4.$
- (b) $\int_0^\infty e^{-x^2} \, dm = \sqrt{\pi}/2.$

Ejercicio 2.5.7 Demostrar:

- (1) $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dm = 2n! \sqrt{\pi} / 4^n n!$.
- (2) Para $a \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos ax dm = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}$.
- (3) Para $p > 0$, $\int_0^1 x^{p-1} (x-1)^{-1} \log x dm = \sum_{n=0}^{\infty} 1/(p+n)^2$.

Ejercicio 2.5.8 Demostrar que es de clase infinito la función en $(0, \infty)$

$$\Gamma(y) = \int_{(0, \infty)} e^{-x} x^{y-1} dm,$$

y que verifica: $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$ para $y > 0$; que $\Gamma(n+1) = n!$, para $n = 0, 1, 2, \dots$; y que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

2.6 Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.

BARTLE, R.G.: “*The elements of integration*”. John Wiley, 1966.

COHN, D.L.: “*Measure theory*”. Birkhauser (Boston), 1980.

En cuanto a una bibilografía complementaria, recomendamos los siguientes textos

BENEDETTO, J.J.: “*Real variable and integration*”, B.G.Teubner, 1976.

HALMOS, P.R.: “*Measure Theory*”. Springer-Verlag, 1974.

MUNROE, M.E.: “*Measure and integration*”, Addison Wesley, 1971.

RUDIN, W.: “*Real and complex analysis*”, Tata McGraw-Hill, 1974.

Por otra parte el trabajo de VOLTERRA que comentamos al comienzo del tema es

VOLTERRA, V.: “*Sui principii del calcolo integrale*”. G.Battaglini, 19, 333-372, 1881.

Una de las ventajas de la integral introducida por LEBESGUE, es su gran flexibilidad en el sentido siguiente: Hemos visto que una función es Riemann integrable sii es continua en casi todo punto. Sin embargo una función Lebesgue integrable puede ser discontinua en todo punto, incluso —y esta es una diferencia fundamental— no necesita de un contexto

topológico para ser introducida, pues solo precisa de un conjunto, una estructura de σ -álgebra y una medida. De esto es probable que no fuera consciente LEBESGUE ni RADON quien en 1913 da una definición de integral en

RADON, J.: “*Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunctionen*”. S.B. Akad. Wiss. Wien, 122, 1295-1438, 1913.

con los procedimientos de LEBESGUE, pero partiendo de una medida distinta a la de LEBESGUE, sobre los Lebesgue medibles. Sin embargo casi inmediatamente después de la aparición de esta memoria, FRECHET señalaba que casi todos los resultados de la misma podían extenderse al caso en que la medida estuviese definida en una σ -álgebra arbitraria. Y así nació la integración abstracta de Lebesgue. Pero hay en la literatura otros puntos de vista para introducir la integral, entre los que destacan el de DANIELL, del que hablaremos mas adelante y el de BOCHNER en el que se integran funciones que toman valores en un espacio de Banach. Para los interesados en este último nos remitimos a los libros

DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “*Linear operators, Vol. I*”. John Wiley Interscience Pub., 1958.

MIKUSINSKI, J.: “*The Bochner integral*”, Birkhauser, 1978.

del que el primero, a parte del desarrollo de esta integral, tiene en la página 232 numerosos datos históricos de los que han contribuido en el tema. Por su parte el segundo introduce una noción de integración para la que sólo se requieren algunas nociones sobre series absolutamente convergentes y cuya idea básica reside en elegir una vía de aproximación de la integral distinta de las de Riemann y Lebesgue, atendiendo a las “*abscisas*” y “*ordenadas*” a la vez —en forma de rectángulos—, y no a las abscisas sólo, como hacía Riemann ó a las ordenadas sólo, como hacía Lebesgue. De esta forma no sólo recupera la integral de Lebesgue, sino que su definición se extiende automáticamente a la integral de Bochner reemplazando simplemente, los coeficientes reales de las series, por elementos del espacio de Banach correspondiente.

Sabemos que existen funciones $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (ver la página 80 del BENEDETTO), diferenciables en todo punto, pero con $\int |f'|$ no finita. Hay sin embargo teorías generales de integración como las debidas a PERRON Y DENJOY, que tienen la propiedad de que el *Teorema fundamental del cálculo* es válido para las funciones diferenciables. Tales teorías son importantes pero no tanto como la teoría de Lebesgue, y probablemente una de las razones para que esto sea así es que en ellas no se tiene la propiedad de que una función sea integrable si y sólo si lo es su módulo,

propiedad que surge de la propia definición en la de Lebesgue. Remitimos al lector a la p. 79 del BENEDETTO para referencias bibliográficas sobre la cuestión.

Comentemos ahora la historia de los resultados fundamentales de este capítulo. En su Tesis de 1902 LEBESGUE comenta que su teorema de la convergencia dominada, pág.85 es una generalización, con una simplificación en la prueba, de un resultado de W.F.OSGOOD de 1897. Este a su vez era un caso particular, para f continua del siguiente resultado:

Teorema 2.6.1 *Dadas $f, f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrables, tales que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para cada $x \in [a, b]$ y $\sup_n \sup_x |f_n(x)| < \infty$, entonces*

$$\lim \int f_n(x) dx = \int f(x) dx."$$

que aparece inicialmente en 1885, en el trabajo

ARZELÁ, C.: "*Sulla integrazione per serie*". Atti. Ecc. Lincei, Roma 1, 532-537, 1885.

Partiendo de la definición de integral Riemann no es fácil probar (2.6.1), mientras que el teorema de la convergencia dominada, pág.85 que es mucho mas general, es mas sencillo. La razón estriba en que el resultado de ARZELÁ depende de la numerable aditividad de la medida y partiendo de la definición de Riemann probar tal propiedad requiere algún esfuerzo, mientras que en la teoría de Lebesgue esta se tiene esencialmente desde el principio.

En 1906 FATOU prueba el lema que lleva su nombre en

FATOU, P.: "*Series trigonometriques et series de Taylor*", Acta Math. 30, 335-400, 1906.

porque lo necesitaba para probar el siguiente resultado sobre series de Fourier

Teorema 2.6.2 $f(x) = \lim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n t^n e^{inx}$, cuando $t \rightarrow 1^-$, para

$$c_n = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Es curioso observar que FATOU combinando su lema y (2.6.2) prueba la *Igualdad de Parseval* —de la que hablaremos en otro tema—, para funciones periódicas de cuadrado integrable, hecho que LEBESGUE inicialmente había probado sólo para funciones periódicas acotadas c.s.

Fin del Tema II

Capítulo 3

Espacio de medida producto

3.1 Introducción

Nuestro principal objetivo en este tema consiste en construir una σ -álgebra \mathcal{A} y una medida μ en el producto $\Omega = \prod \Omega_i$, de una familia de espacios de medida $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, para $i \in I$, e investigar la relación entre la integración en el espacio producto y la integración en los espacios factores.

El ejemplo mas familiar consiste en considerar el plano \mathbb{R}^2 como el producto de dos rectas \mathbb{R} , donde el cálculo de áreas de figuras planas se obtiene a partir del cálculo de longitudes de segmentos,

$$m_2([a, b] \times [c, d]) = m_1([a, b])m_1([c, d]),$$

de modo que m_2 , la medida de Lebesgue del plano, es en cierto sentido el producto de dos copias de m_1 , la medida de Lebesgue de la recta.

Nuestra intención es desarrollar esta idea en una forma general. Sin embargo estaremos interesados en dos construcciones de naturaleza distinta, de las que la primera responde al marco del comentario anterior

que es de índole geométrica y está basada en la idea de área de un rectángulo. En este caso consideraremos, para $A \in \mathcal{A}_1$ y $B \in \mathcal{A}_2$

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

La segunda construcción es de naturaleza probabilística y está basada en la idea de experimento compuesto: Supongamos un experimento en el que se realizan dos observaciones. La primera x_1 está en Ω_1 y la segunda x_2 en Ω_2 . La probabilidad de que la primera caiga en un conjunto $A \in \mathcal{A}_1$ es $\mu_1(A)$. Además, una vez hecha la observación x_1 , la probabilidad de que la segunda caiga en un conjunto $B \in \mathcal{A}_2$ es $\mu_2(x_1, B)$. Entonces es razonable que la probabilidad de que la observación (x_1, x_2) caiga en $A \times B$ sea

$$\mu(A \times B) = \int_A \mu_2(x, B) d\mu_1.$$

Veámoslo con un ejemplo: Consideremos que extraemos una carta de una baraja española y a continuación una segunda ¿cual es la probabilidad de que la primera sea un as (A) y la segunda sea una espada (B)?. Podemos contestar de la siguiente manera: Sea C el conjunto de cartas, como la primera carta no se devuelve y todas son igualmente probables tendremos en nuestro conjunto de pares de cartas posibles $(C \times C) \setminus \Delta$, con Δ la diagonal, que la probabilidad es: casos favorables (39) partido por casos posibles $(39 \cdot 40)$, es decir $1/40$.

Pero podemos proceder de otro modo: condicionado por la primera extracción, tenemos que si la primera es el as de espadas (cuya probabilidad es $1/40$), la segunda tiene probabilidad $9/39$ de ser espada y si la primera es cualquiera de los otros ases la segunda tiene probabilidad $10/39$, en cuyo caso la integral de la derecha en la ecuación anterior nos da

$$\int_A \mu_2(x, B) d\mu_1 = (1/40)(9/39) + (3/40)(10/39) = 1/40,$$

que es el mismo resultado. Ahora bien es fácil ver (lo demostraremos en general) que hay una única probabilidad μ en el espacio $C \times C$, que satisface la ecuación de arriba, pero ¿cual es esta probabilidad?, el cálculo anterior aplicado a una única carta $c \in C$, da $\mu(\{c\} \times \{c\}) = 0$ y por tanto $\mu(\Delta) = 0$, mientras que a dos cartas distintas $a, b \in C$, $\mu(\{a\} \times \{b\}) = 1/(39 \cdot 40)$, y por tanto es la probabilidad considerada en el primer cálculo, definida en el espacio producto.

3.2 Producto finito de espacios medibles

Definición. Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles. Diremos que una σ -álgebra \mathcal{A} en el producto $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ es la σ -álgebra *producto* si se verifican las condiciones:

- (a) Las proyecciones $\pi_i: \Omega \rightarrow \Omega_i$ son medibles.
- (b) Dado otro espacio medible (Ω', \mathcal{A}') , una aplicación

$$F: \Omega' \longrightarrow \Omega,$$

es medible si y sólo si sus componentes $F_i = \pi_i \circ F$ son medibles.

Veremos que \mathcal{A} existe y es única y la denotaremos $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ y llamaremos *espacio medible producto* a la pareja

$$(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n).$$

Definición. Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles. Llamaremos *producto de medibles* a todo subconjunto

$$A_1 \times \dots \times A_n \subset \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n,$$

con los $A_i \in \mathcal{A}_i$.

Nota 3.2.1 Denotaremos¹ con $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ la clase de los productos de medibles, que es una clase elemental (ver (1.2.15), pág.7), y con \mathcal{A}_0 las uniones finitas disjuntas de estos, que es álgebra (ver (1.2.16)).

Proposición 3.2.2 *La σ -álgebra producto existe y es única y es la generada por los productos de medibles.*

¹Consideraremos la siguiente notación: Dadas las familias de subconjuntos $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{P}(\Omega_i)$, $i = 1, \dots, n$

$$\mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_n = \{B_1 \times \dots \times B_n : B_i \in \mathcal{C}_i\}.$$

Demostración. Denotemos $\mathcal{R} = \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ y veamos que $\sigma(\mathcal{R})$ cumple las dos propiedades:

- (a) Si $A_i \in \mathcal{A}_i$, $\pi_i^{-1}(A_i) = \Omega_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times \Omega_n \in \mathcal{R}$.
 (b) Si F es medible, $F_i = \pi_i \circ F$ son medibles. Recíprocamente si las F_i son medibles y $A_i \in \mathcal{A}_i$, entonces $F_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}'$ y

$$F^{-1}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \cap F_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}' \Rightarrow F \text{ es medible}$$

pues $F^{-1}[\sigma(\mathcal{R})] = \sigma[F^{-1}(\mathcal{R})]$, (ver el ejercicio (1.2.3), pág.12).

Veamos que es única, para ello supongamos que hay dos \mathcal{A} y \mathcal{A}' sobre Ω , basta tomar en (b) la

$$\text{id}: (\Omega, \mathcal{A}') \rightarrow (\Omega, \mathcal{A}) \text{ y la } \text{id}: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{A}'),$$

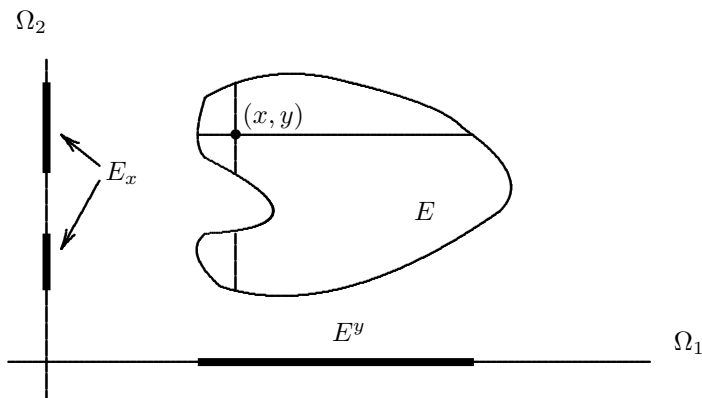
que son medibles y por tanto $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. ■

Definición. Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espacios medibles, $E \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ y sean $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$. Definimos las *secciones de E por x e y* respectivamente como

$$E_x = \{q \in \Omega_2 : (x, q) \in E\}, \quad E^y = \{p \in \Omega_1 : (p, y) \in E\}.$$

Y para $f: \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega'$, definimos las *secciones de f por x e y* como

$$\begin{aligned} f_x: \Omega_2 &\rightarrow \Omega', & f_x(q) &= f(x, q), \\ f^y: \Omega_1 &\rightarrow \Omega', & f^y(p) &= f(p, y). \end{aligned}$$



— Figura 3. Las secciones E_x y E^y de E —

Proposición 3.2.3 Sea $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, $E, E_n \subset \Omega$ y $(x, y) \in \Omega$, entonces

$$[E^c]_x = [E_x]^c, \quad [\cup E_n]_x = \cup [E_n]_x, \quad [\cap E_n]_x = \cap [E_n]_x,$$

(ídem para las secciones por y) y si $E \in \mathcal{A}$ y $f: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ es medible, entonces $E_x \in \mathcal{A}_2$, $E^y \in \mathcal{A}_1$, y f_x, f^y son medibles.

Demostración. Consideremos la clase de conjuntos

$$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{A} : E_x \in \mathcal{A}_2\},$$

la cual contiene a $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, pues para $E = A \times B$,

$$E_x = \{q \in \Omega_2 : (x, q) \in A \times B\} = \begin{cases} B, & \text{si } x \in A, \\ \emptyset, & \text{si } x \in A^c, \end{cases} \in \mathcal{A}_2,$$

y es σ -álgebra, pues dado $E \in \mathcal{C}$, $E^c \in \mathcal{C}$, ya que

$$(E^c)_x = \{q \in \Omega_2 : (x, q) \notin E\} = \{q : q \notin E_x\} = (E_x)^c \in \mathcal{A}_2,$$

y dados $E_n \in \mathcal{C}$, $\cup E_n \in \mathcal{C}$, pues $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)_x = \cup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x \in \mathcal{A}_2$, por tanto $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ y para cada $E \in \mathcal{A}$, $E_x \in \mathcal{A}_2$ y del mismo modo se demuestra que $E^y \in \mathcal{A}_1$.

Si f es medible f_x es medible pues es la composición $f \circ i_x$, para $i_x(q) = (x, q)$ que es medible. ■

Ejercicios

Ejercicio 3.2.1 Sean Ω_1 y Ω_2 espacios topológicos. Demostrar que:

- (a) $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) \subset \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.
- (b) Si sus topologías tienen bases numerables, $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) = \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Ejercicio 3.2.2 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espacios medibles y $f: \Omega_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y $g: \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles, demostrar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ es $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -medible.

Ejercicio 3.2.3 Demostrar que $(\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$.

Ejercicio 3.2.4 Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f_x es Borel medible para cada x y f^y continua para cada y . Demostrar que f es Borel medible.

3.3 Teorema de la medida producto

Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y consideremos para cada producto de medibles $A \times B$

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

entonces se tiene que si $A \times B = \cup A_n \times B_n$, es unión disjunta, finita o numerable, de productos de medibles, entonces $I_{A \times B} = \sum I_{A_n \times B_n}$ y

$$\begin{aligned} \mu(A \times B) &= \mu_1(A)\mu_2(B) = \int \int I_A(x)I_B(y) d\mu_1 d\mu_2 \\ &= \int \int I_{A \times B}(x, y) d\mu_1 d\mu_2 = \sum \int \int I_{A_n \times B_n} d\mu_1 d\mu_2 \\ &= \sum \mu(A_n \times B_n), \end{aligned}$$

lo cual nos permite definir de modo único μ sobre las uniones finitas disjuntas de productos de medibles de forma aditiva y μ es medida en el álgebra \mathcal{A}_0 de las uniones finitas disjuntas de productos de medibles y además es σ -finita pues existen sendas particiones $A_n \in \mathcal{A}_1$ de Ω_1 y $B_n \in \mathcal{A}_2$ de Ω_2 , con $\mu_1(A_n), \mu_2(B_n) < \infty$, por lo que $A_n \times B_m \in \mathcal{A}_0$ es una partición de $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ con

$$\mu(A_n \times B_m) = \mu_1(A_n)\mu_2(B_m) < \infty.$$

y se sigue de los Teoremas de extensión de Caratheodory y Hahn el siguiente resultado.

Teorema clásico de la medida producto 3.3.1

Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita. Existe una única medida μ en \mathcal{A} tal que para cada $A \in \mathcal{A}_1$ y $B \in \mathcal{A}_2$

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

además es σ -finita y es una probabilidad si μ_1 y μ_2 lo son.

Definición. A la medida $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ del teorema anterior la llamaremos la *medida producto* de las dos medidas σ -finitas μ_1 y μ_2 .

Nota 3.3.2 En el caso particular de $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $\mu_1 = \mu_2 = m$, tenemos otra construcción de la medida de Lebesgue bidimensional: Se tiene

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

(ver el ejercicio (3.2.1)) y $m \times m$ es la medida de Lebesgue bidimensional, ya que por el *Teorema de la medida producto* $m \times m$ coincide con la medida de Lebesgue bidimensional sobre los semi-rectángulos y por tanto sobre sus uniones finitas disjuntas, es decir sobre el álgebra que generan. Por lo tanto coinciden en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ por el *Teorema de extensión de Hahn*, pág.25.

3.3.1 Medidas de transición

A continuación extenderemos el Teorema de la medida producto al caso en el que tenemos una medida en uno de los espacios y una familia de medidas en el otro, parametrizada por el primero. Pero además daremos una fórmula para el cálculo explícito de esta medida en cualquier medible, cosa que aun no conocemos en el caso de que la familia se reduzca a una medida; caso en el que sólo demostramos la existencia de la medida.

Definición. Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espacios medibles. Llamaremos *medida de transición* a toda función

$$\Lambda: \Omega_1 \times \mathcal{A}_2 \longrightarrow [0, \infty],$$

verificando:

- (a) Para cada $B \in \mathcal{A}_2$, $\Lambda_B(x) = \Lambda(x, B)$ es medible en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$.
- (b) Para cada $x \in \Omega_1$, $\Lambda_x(B) = \Lambda(x, B)$ es una medida en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

Definición. Diremos que una *medida de transición* Λ es *finita* si para cada $x \in \Omega_1$, Λ_x es finita. Diremos que es σ -finita si lo es cada Λ_x . Diremos que es *uniformemente σ -finita* si para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $0 \leq k_n < \infty$ y $B_n \in \mathcal{A}_2$, tales que $\Omega_2 = \cup B_n$ y $\Lambda_x(B_n) \leq k_n$, para todo $x \in \Omega_1$. Diremos que Λ es una *probabilidad de transición* si cada Λ_x es una probabilidad, es decir

$$\Lambda_x(\Omega_2) = 1.$$

Nota 3.3.3 Estas probabilidades tienen un significado práctico de gran valor y forman el fundamento para el estudio de los *procesos de Markov* (ver PARTHASARATHY, p.166–7).

El siguiente resultado recoge, como casos particulares, los dos procesos de construcción de una medida en el espacio producto descritos al comienzo del tema.

Teorema de la medida producto 3.3.4 *Sea $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida σ -finita, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ un espacio medible y $\Lambda: \Omega_1 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow [0, \infty]$ una medida de transición uniformemente σ -finita. Entonces:*

- (a) *Para cada $E \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, la función $x \rightarrow \Lambda(x, E_x)$ es medible.*
 (b) *Existe una única medida μ en \mathcal{A} , tal que para cada $A \in \mathcal{A}_1$ y $B \in \mathcal{A}_2$*

$$\mu(A \times B) = \int_A \Lambda_B d\mu_1,$$

además μ es σ -finita y para cada $E \in \mathcal{A}$ verifica

$$\mu(E) = \int \Lambda(x, E_x) d\mu_1.$$

(c) *Si μ_1 es una probabilidad y Λ una probabilidad de transición, entonces μ es una probabilidad.*

Demostración. (a) Supongamos en primer lugar que para cada x , las medidas Λ_x son finitas. Consideremos la clase

$$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{A} : \Lambda(x, E_x) \text{ es medible}\},$$

la cual contiene al álgebra \mathcal{A}_0 de las uniones finitas disjuntas de productos de medibles, pues por una parte contiene a cada producto de medibles $E = A \times B$, ya que

$$\Lambda(x, E_x) = \Lambda_B I_A,$$

es medible y dada una unión finita disjunta de productos de medibles $E = \cup_{i=1}^n R_i$

$$\begin{aligned} \Lambda(x, E_x) &= \Lambda(x, [\cup_{i=1}^n R_i]_x) = \Lambda(x, \cup_{i=1}^n [R_i]_x) \\ &= \sum_{i=1}^n \Lambda(x, [R_i]_x), \end{aligned}$$

es medible por ser suma finita de medibles. Pero además \mathcal{C} es clase monótona, pues si $C_n \uparrow C$ y las $C_n \in \mathcal{C}$, entonces $(C_n)_x \uparrow C_x$, por tanto

$$\Lambda(x, (C_n)_x) \uparrow \Lambda(x, C_x),$$

es medible por ser límite de medibles y por tanto $C \in \mathcal{C}$. Lo mismo si $C_n \downarrow C$, teniendo en cuenta que Λ_x es finita, por tanto se sigue del *Teorema de la clase monótona*, pág.7, que $\mathcal{C} = \mathcal{A}$.

Ahora supongamos que Λ es uniformemente σ -finita y sea para cada $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k_n < \infty$ y $B_n \in \mathcal{A}_2$, disjuntos tales que $\Omega_2 = \cup B_n$ y $\Lambda_x(B_n) \leq k_n$, para todo $x \in \Omega_1$. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la medida de transición finita, que para cada $B \in \mathcal{A}_2$

$$\Lambda_n(x, B) = \Lambda(x, B \cap B_n),$$

ahora por lo anterior $\Lambda_n(x, E_x)$ es medible, por tanto también lo es

$$\Lambda(x, E_x) = \sum \Lambda(x, E_x \cap B_n) = \sum \Lambda_n(x, E_x).$$

(b) Como $0 \leq \Lambda(x, E_x)$ es medible, podemos considerar

$$\mu(E) = \int \Lambda(x, E_x) d\mu_1,$$

para cada $E \in \mathcal{A}$, que es una medida, pues $\mu(\emptyset) = 0$ y para $E_n \in \mathcal{A}$ disjuntos

$$\begin{aligned} \mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) &= \int \Lambda(x, (\cup_{n=1}^{\infty} E_n)_x) d\mu_1 \\ &= \int \Lambda(x, \cup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x) d\mu_1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int \Lambda(x, (E_n)_x) d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n), \end{aligned}$$

para la que se tiene

$$\begin{aligned} \mu(A \times B) &= \int \Lambda(x, [A \times B]_x) d\mu_1 \\ &= \int I_A \Lambda(x, B) d\mu_1 = \int_A \Lambda_B d\mu_1, \end{aligned}$$

y es σ -finita en \mathcal{A}_0 ya que μ_1 lo es y por tanto existe una partición $A_n \in \mathcal{A}_1$, de Ω_1 , con $\mu_1(A_n) < \infty$ y $A_n \times B_m \in \mathcal{R} \subset \mathcal{A}_0$ es una partición de Ω para la que

$$\mu(A_n \times B_m) = \int_{A_n} \Lambda(x, B_m) d\mu_1 \leq k_m \mu_1(A_n) < \infty,$$

por tanto es la única que satisface la propiedad, pues si λ es otra medida en el espacio producto, tal que para cada producto de medibles $A \times B$

$$\lambda(A \times B) = \int_A \Lambda(x, B) d\mu_1,$$

entonces μ y λ coinciden en el álgebra \mathcal{A}_0 y por el *Teorema de extensión de Hahn* (pág.25), coinciden en \mathcal{A} , pues μ es σ -finita.

(c) Es obvio. ■

Si los papeles de los espacios están intercambiados y lo que tenemos es una medida μ_2 en Ω_2 y una medida de transición $\Lambda: \Omega_2 \times \mathcal{A}_1 \rightarrow [0, \infty]$ tenemos un resultado análogo del que sólo damos el enunciado.

Teorema de la medida producto 3.3.5 *Sea $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ un espacio de medida σ -finita, $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ un espacio medible y $\Lambda: \Omega_2 \times \mathcal{A}_1 \rightarrow [0, \infty]$ una medida de transición uniformemente σ -finita. Entonces:*

(a) *Para cada $E \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, la función $y \rightarrow \Lambda(y, E^y)$ es medible.*

(b) *Existe una única medida μ en \mathcal{A} , tal que para cada $A \in \mathcal{A}_1$ y $B \in \mathcal{A}_2$*

$$\mu(A \times B) = \int_B \Lambda_A d\mu_2,$$

además μ es σ -finita y para cada $E \in \mathcal{A}$ verifica

$$\mu(E) = \int \Lambda(y, E^y) d\mu_2.$$

(c) *Si μ_2 es una probabilidad y Λ una probabilidad de transición, entonces μ es una probabilidad.*

Teorema clásico de la medida producto 3.3.6

Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y sea $E \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Entonces:

(a) *Las funciones $x \in \Omega_1 \rightarrow \mu_2(E_x)$, $y \in \Omega_2 \rightarrow \mu_1(E^y)$ son medibles.*

(b) *Existe una única medida μ en \mathcal{A} tal que para cada $A \in \mathcal{A}_1$ y $B \in \mathcal{A}_2$*

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

la cual para cada $E \in \mathcal{A}$ viene dada por

$$\mu(E) = \int \mu_2(E_x) d\mu_1 = \int \mu_1(E^y) d\mu_2,$$

además es σ -finita y es una probabilidad si μ_1 y μ_2 lo son.

Demostración. Aplicando (3.3.4) a $\Lambda(x, B) = \mu_2(B)$, tendremos que $\mu_2(E_x)$ es medible y

$$\mu(E) = \int \mu_2(E_x) d\mu_1,$$

es la única medida que satisface

$$\mu(A \times B) = \int_A \mu_2(B) d\mu_1 = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

y aplicando (3.3.5) a $\Lambda(y, A) = \mu_1(A)$ tendremos que $\mu_1(E^y)$ es medible y $\mu(E) = \int \mu_1(E^y) d\mu_2$ es la única medida que satisface

$$\mu(A \times B) = \int_B \mu_1(A) d\mu_2 = \mu_1(A)\mu_2(B). \quad \blacksquare$$

Ejercicios

Ejercicio 3.3.1 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y completos, ¿es necesariamente completo el espacio producto?

Ejercicio 3.3.2 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y $E, F \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, tales que para todo $x \in \Omega_1$ c.s. (μ_1) , $\mu_2(E_x) = \mu_2(F_x)$. Demostrar que $\mu(E) = \mu(F)$.

Ejercicio 3.3.3 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espacios medibles y $\Lambda: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$ una medida de transición. Demostrar que:

(a) Si μ es una medida en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, entonces

$$\lambda(B) = \int \Lambda_B d\mu,$$

es una medida en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

(b) Si $g \geq 0$ es medible en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$,

$$f(x) = \int g d\lambda_x,$$

es medible en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y se tiene que

$$\int f d\mu = \int g d\lambda.$$

Ejercicio 3.3.4 Demostrar que: (a) Si $F: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ es medible y μ es una medida en (Ω, \mathcal{A}) , $\nu = F_*\mu$, para

$$\nu(A) = \mu[F^{-1}(A)],$$

es una medida en (Ω', \mathcal{A}') (llamada medida imagen) y si ν es σ -finita, μ también lo es. ¿Es cierto que si μ lo es, lo es ν ?

(b) Si $F_1: (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega'_1, \mathcal{A}'_1)$ y $F_2: (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \rightarrow (\Omega'_2, \mathcal{A}'_2)$ son medibles entonces también es medible

$$F_1 \otimes F_2: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega'_1 \times \Omega'_2, \quad F_1 \otimes F_2(x, y) = (F_1(x), F_2(y)),$$

y dadas medidas μ_1 en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y μ_2 en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, tales que $\nu_i = F_{i*}\mu_i$ son σ -finitas, se verifica que

$$F_1 \otimes F_2(\mu_1 \times \mu_2) = \nu_1 \times \nu_2.$$

3.4 El teorema de Fubini

La teoría de integración que hemos desarrollado hasta aquí incluye, como caso particular, la integral múltiple en \mathbb{R}^n , la cual no es otra cosa que la integral respecto de la medida de Lebesgue n -dimensional. Sin embargo, para realizar un cálculo explícito, las integrales de este tipo se pueden evaluar calculando integrales unidimensionales, en un proceso iterativo. El teorema general que justifica este útil método de cálculo es el *Teorema de Fubini*, el cual es una consecuencia directa del teorema de la medida producto.

3.4.1 Teorema de Fubini para dos espacios

Teorema de Fubini 3.4.1 Sea $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida σ -finita, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ un espacio medible, $\Lambda: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$ una medida de transición uniformemente σ -finita y sea $f: \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ medible, entonces:

(a) Si $f \geq 0$, existe $G(x) = \int f_x d\Lambda_x$, es medible en Ω_1 y

$$\int f d\mu = \int G d\mu_1 = \int \left[\int f_x d\Lambda_x \right] d\mu_1.$$

(b) Si $\int f d\mu$ existe, entonces existe una función medible G en Ω_1 , tal que $G(x) = \int f_x d\Lambda_x$, c.s. (\mathcal{A}_1, μ_1) (si además f es integrable, G es finita) y se tiene

$$\int f d\mu = \int G d\mu_1 = \int \left[\int f_x d\Lambda_x \right] d\mu_1.$$

(c) Si $\int \int |f(x, y)| d\Lambda_x d\mu_1 < \infty$, entonces f es μ -integrable y como antes $\int f d\mu = \int \int f(x, y) d\Lambda_x d\mu_1$.

Demostración. (a) Para $f = I_E$, $f_x = I_{E_x}$ y por (3.3.4-a), $G(x) = \Lambda(x, E_x)$ es medible y

$$\int f d\mu = \mu(E) = \int \Lambda(x, E_x) d\mu_1 = \int G d\mu_1.$$

Ahora si $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{E_i}$, con los E_i disjuntos y los $a_i \geq 0$, entonces para cada x

$$G(x) = \int f_x d\Lambda_x = \sum_{i=1}^n a_i \Lambda(x, E_{ix}),$$

es medible y

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int \Lambda(x, E_{ix}) d\mu_1 = \int G d\mu_1.$$

Ahora si f es medible y $0 \leq f$, entonces existe una sucesión de funciones simples $f_n \uparrow f$ y para todo x $(f_n)_x \uparrow f_x$. Ahora bien por el caso anterior $G_n(x) = \int (f_n)_x d\Lambda_x$ son medibles y por el *Teorema de la convergencia monótona*, pág.79

$$G(x) = \int f_x d\Lambda_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n)_x d\Lambda_x = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x),$$

por lo que G es medible además $0 \leq G_n \uparrow G$ y aplicando de nuevo el *Teorema de la convergencia monótona*

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int G_n d\mu_1 = \int G d\mu_1. \end{aligned}$$

(b) Por la parte anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\int f^+ d\mu &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_x^+ d\Lambda_x d\mu_1, \\ \int f^- d\mu &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_x^- d\Lambda_x d\mu_1,\end{aligned}$$

y si la $\int f d\mu$ existe, una de las dos integrales (digamos la de f^-) es finita, por tanto la función medible $\int_{\Omega_2} f_x^- d\Lambda_x$ es finita en un conjunto $A \in \mathcal{A}_1$, con $\mu_1(A^c) = 0$, por lo que podemos definir la función medible en A

$$\int_{\Omega_2} f_x d\Lambda_x = \int_{\Omega_2} f_x^+ d\Lambda_x - \int_{\Omega_2} f_x^- d\Lambda_x,$$

y si la $\int f d\mu$ es finita podemos encontrar un conjunto $A \in \mathcal{A}_1$, con $\mu_1(A^c) = 0$, en el cual las dos integrales de la derecha son finitas. En cualquier caso por el *Teorema de aditividad* —(2.4.4), página 79— y definiendo en A^c como queramos la $\int_{\Omega_2} f_x d\Lambda_x$

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \\ &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_x^+ d\Lambda_x d\mu_1 - \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_x^- d\Lambda_x d\mu_1 \\ &= \int_A \int_{\Omega_2} f_x^+ d\Lambda_x d\mu_1 - \int_A \int_{\Omega_2} f_x^- d\Lambda_x d\mu_1 \\ &= \int_A \int_{\Omega_2} f_x d\Lambda_x d\mu_1 \\ &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_x d\Lambda_x d\mu_1.\end{aligned}$$

(c) Por la parte (a) tenemos que

$$\int |f| d\mu = \int \left[\int |f_x| d\Lambda_x \right] d\mu_1 < \infty,$$

por tanto f es integrable y podemos aplicar la parte (b). ■

Como en el teorema de la medida producto tenemos otro teorema de Fubini si se intercambian los dos espacios.

Teorema de Fubini 3.4.2 Sea $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ un espacio de medida σ -finita, $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ un espacio medible, $\Lambda: \Omega_2 \times \mathcal{A}_1 \rightarrow [0, \infty]$ una medida de transición uniformemente σ -finita y sea $f: \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ medible, entonces:

(a) Si $0 \leq f$, entonces para cada $y \in \Omega_2$ existe $H(y) = \int f^y d\Lambda_y$, es medible y

$$\int f d\mu = \int H d\mu_2 = \int \left[\int f^y d\Lambda_y \right] d\mu_2.$$

(b) Si $\int f d\mu$ existe (resp. es finita), entonces existe una función \mathcal{A}_1 -medible (resp. finita) H , tal que $H(y) = \int f^y d\Lambda_y$, c.s. (\mathcal{A}_2, μ_2) y

$$\int f d\mu = \int H d\mu_2 = \int \left[\int f^y d\Lambda_y \right] d\mu_2.$$

(c) Si $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible y $\int \int |f(x, y)| d\Lambda_y d\mu_2 < \infty$, entonces f es μ -integrable y $\int f d\mu = \int \int f(x, y) d\Lambda_y d\mu_2$.

Como un caso particular tenemos la forma clásica del teorema de Fubini.

Teorema de Fubini clásico 3.4.3 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ el espacio producto de los espacios de medida σ -finita $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ y sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medible. Entonces:

(a) Si $0 \leq f$, entonces $\int f_x d\mu_2$ existe y es medible en x , $\int f^y d\mu_1$ existe, es medible en y y

$$\int f d\mu = \int \left[\int f_x d\mu_2 \right] d\mu_1 = \int \left[\int f^y d\mu_1 \right] d\mu_2.$$

(b) Si $\int f d\mu$ existe, entonces existe una función \mathcal{A}_1 -medible G , tal que $G(x) = \int f_x d\mu_2$, c.s. (\mathcal{A}_1, μ_1) y otra función \mathcal{A}_2 -medible H , tal que $H(y) = \int f^y d\mu_1$, c.s. (\mathcal{A}_2, μ_2) (ambas finitas si f es integrable), tales que

$$\int f d\mu = \int \left[\int f_x d\mu_2 \right] d\mu_1 = \int \left[\int f^y d\mu_1 \right] d\mu_2.$$

(c) Si $\int [\int |f^y| d\mu_1] d\mu_2 < \infty$ ó $\int [\int |f_x| d\mu_2] d\mu_1 < \infty$, entonces se tiene

$$\int f d\mu = \int \left[\int f_x d\mu_2 \right] d\mu_1 = \int \left[\int f^y d\mu_1 \right] d\mu_2.$$

Demostración. Las primeras igualdades en (a) y (b) son consecuencia de (3.4.1) y las segundas de (3.4.2). (c) se sigue de los apartados (c) de esos teoremas. ■

Ejemplo 3.4.4 Hemos visto en (2.4.9), página 83, que la función $\sin x/x$ no es Lebesgue integrable en $(0, \infty)$, sin embargo veamos que tiene integral impropia de Riemann y que vale

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

En el ejercicio (2.5.4), página 96 vimos que para $x > 0$

$$\int_0^\infty x e^{-xt} dt = 1,$$

entonces por Fubini

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^a \int_0^\infty e^{-xt} \sin x dt dx = \int_0^\infty \int_0^a e^{-xt} \sin x dx dt,$$

pues $|\sin x| \leq x$, por tanto la integral del medio en módulo está acotada por a . Ahora bien como

$$\begin{aligned} (e^{-xt} \cos x)' &= -t e^{-xt} \cos x - e^{-xt} \sin x \\ (e^{-xt} \sin x)' &= -t e^{-xt} \sin x + e^{-xt} \cos x, \end{aligned}$$

tendremos integrando y despejando

$$\int_0^a e^{-xt} \sin x dx = \frac{1 - e^{-at} \cos a - t e^{-at} \sin a}{t^2 + 1},$$

y el resultado se sigue, pues por el TCD

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{e^{-at} \cos a}{t^2 + 1} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{t e^{-at} \sin a}{t^2 + 1} dt = 0.$$

y como $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$ (ver también (5.5.10), pág.183), se tiene que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_0^a e^{-xt} \sin x dx dt = \int_0^\infty (\arctan t)' dt = \pi/2.$$

Nota 3.4.5 Veamos en un par de ejemplos que las distintas hipótesis en el teorema de Fubini no pueden ser suprimidas.

Ejemplo 3.4.6 Sean $\Omega_1 = \Omega_2 = (0, 1)$, con $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(0, 1)$ y $\mu_1 = \mu_2 = m$, consideremos una sucesión $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \uparrow 1$ y $f_n: (0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ continuas, con soporte en (t_n, t_{n+1}) —es decir tales que $C_n = \text{Adh}\{t : f_n(t) \neq 0\} \subset (t_n, t_{n+1})$ —, y tales que $\int_0^1 f_n(t) dt = 1$ y definamos

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n(x) - f_{n+1}(x)] f_n(y),$$

entonces f es continua pues si tomamos $\delta_0 = d(0, C_0)$ y para $n \geq 1$, $\delta_n = \min\{d(t_n, C_n), d(t_n, C_{n-1})\}$, tendremos que para todo $n \geq 1$ y todo $j \geq 0$, $(t_n - \delta_n, t_n + \delta_n) \cap C_j = \emptyset$ y

$$f(x, y) = \begin{cases} f_n(x)f_n(y), & \text{si } x, y \in (t_n, t_{n+1}), \\ -f_{n+1}(x)f_n(y), & \text{si } y \in (t_n, t_{n+1}) \text{ y } x \in (t_{n+1}, t_{n+2}), \\ 0, & \text{si } (x, y) \in A, \end{cases}$$

donde A es el abierto formado por las uniones de $(t_n - \delta_n, t_n + \delta_n) \times (0, 1)$, de $(0, 1) \times (t_n - \delta_n, t_n + \delta_n)$, de $[t_n, t_{n+2}]^c \times (t_n, t_{n+1})$ y de $(t_n, t_{n+1}) \times [t_n, t_{n+2}]^c$ y se tiene que

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f^y dx \right] dy = 0 \neq 1 = \int_0^1 \left[\int_0^1 f_x dy \right] dx,$$

pues si para algún $n \geq 1$, $y = t_n$, $f^y = 0$ y si $y \in (t_n, t_{n+1})$

$$f^y(x) = \begin{cases} f_n(x)f_n(y), & \text{si } x \in (t_n, t_{n+1}), \\ -f_{n+1}(x)f_n(y), & \text{si } x \in (t_{n+1}, t_{n+2}), \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

y por tanto

$$\int_0^1 f^y(x) dx = 0,$$

por otra parte si $x = t_n$, $f_x = 0$, si $x \in (0, t_1)$

$$f_x(y) = \begin{cases} f_0(x)f_0(y), & \text{si } y \in (0, t_1) \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

y si $x \in (t_n, t_{n+1})$, para $n \geq 1$

$$f_x(y) = \begin{cases} f_n(x)f_n(y), & \text{si } y \in (t_n, t_{n+1}), \\ -f_n(x)f_{n-1}(y), & \text{si } y \in (t_{n-1}, t_n), \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

y por tanto

$$\int_0^1 f_x(y)dy = \begin{cases} 0, & \text{si } x = t_n, \\ f_0(x), & \text{si } x \in (0, t_1), \\ 0, & \text{si } x \in (t_n, t_{n+1}). \end{cases}$$

Ejemplo 3.4.7 Sean $\Omega_1 = \Omega_2 = [0, 1]$, con $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}[0, 1]$, $\mu_1 = m$ y μ_2 la medida de contar. Consideremos $f = I_E$, para $E = \{x = y\}$, entonces para todo $x, y \in [0, 1]$

$$\int_0^1 f^y dx = 0, \quad \int_0^1 f_x d\mu_2 = 1,$$

por tanto

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f^y d\mu_1 \right] d\mu_2 = 0 \neq 1 = \int_0^1 \left[\int_0^1 f_x d\mu_2 \right] d\mu_1.$$

3.4.2 Producto de más de dos espacios.

Consideremos n espacios de medida σ -finita,

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n),$$

entonces se demuestra fácilmente que (ver el ejercicio (3.2.3), pág.105)

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n,$$

y por inducción que existe una única medida $\mu = \mu_1 \times \dots \times \mu_n$ en el producto, para la que

$$\mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n),$$

para $A_i \in \mathcal{A}_i$. La existencia se demuestra por inducción considerando $\mu = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_{n-1}) \times \mu_n$ y la unicidad por el Teorema de Hahn (pág.25), pues μ es σ -finita en \mathcal{A}_0 . Vemos así que el *Teorema de la medida producto* se extiende sin dificultad a más de dos espacios factores, pero para dar su enunciado general necesitamos extender el concepto de medida de transición.

Definición. Diremos que $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ es una *familia de medidas de transición* (σ -finita, uniformemente σ -finita, de probabilidad) en los espacios medibles

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_{n+1}, \mathcal{A}_{n+1}),$$

si para cada $i = 1, \dots, n$ y cada

$$(\Omega^i, \mathcal{A}^i) = (\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_i, \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_i),$$

se tiene que

$$\Lambda_i: \Omega^i \times \mathcal{A}_{i+1} \longrightarrow [0, \infty],$$

de forma que para cada $x \in \Omega^i$, $\Lambda_{ix} = \Lambda_i(x, \cdot)$ es una medida (σ -finita, uniformemente σ -finita, de probabilidad) en \mathcal{A}_{i+1} y para cada $B \in \mathcal{A}_{i+1}$,

$$\Lambda_{iB} = \Lambda_i(\cdot, B),$$

es medible en el espacio medible producto $(\Omega^i, \mathcal{A}^i)$.

Teorema 3.4.8 (Ver Ash, p.104) Sea $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1}\}$ una familia de medidas de transición uniformemente σ -finitas en los espacios medibles $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, μ_1 una medida σ -finita en Ω_1 y (Ω, \mathcal{A}) el espacio producto de los $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. Entonces:

(a) Hay una única medida μ en \mathcal{A} tal que para cada $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, con los $A_i \in \mathcal{A}_i$, se tiene

$$\mu(A) = \int_{A_1} d\mu_1 \int_{A_2} d\Lambda_{1x_1} \int_{A_3} d\Lambda_{2(x_1, x_2)} \cdots \int_{A_n} d\Lambda_{n-1(x_1, \dots, x_{n-1})},$$

donde $(x_1, \dots, x_i) \in A_1 \times \cdots \times A_i$. Tal μ es σ -finita y si las $\{\Lambda_i\}$ y μ_1 son de probabilidad, entonces es una probabilidad.

(b) Sea $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible. Si $f \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} d\Lambda_{1x_1} \cdots \int_{\Omega_{n-1}} d\Lambda_{n-2(x_1, \dots, x_{n-2})} \\ &\quad \int_{\Omega_n} f(x_1, \dots, x_n) d\Lambda_{n-1(x_1, \dots, x_{n-1})}. \end{aligned}$$

(c) Si $\int f d\mu$ existe (es finita), entonces la igualdad anterior se satisface en el sentido de que para $j = 1, \dots, n-1$, la integral con respecto a la medida

$$\Lambda_{j(x_1, \dots, x_j)},$$

existe (es finita), excepto para los (x_1, \dots, x_j) de un conjunto de $\mathcal{A}^j = \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_j$ de medida nula por la μ_j definida en (a), es decir definida por

$$\mu_j(A_1 \times \dots \times A_j) = \int_{A_1} d\mu_1 \int_{A_2} d\Lambda_{1x_1} \dots \int_{A_j} d\Lambda_{j(x_1, \dots, x_j)},$$

y basta definirla como 0 ó cualquier función medible en ese conjunto.

Ejercicios

Ejercicio 3.4.1 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y $f: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ medibles e integrables, demostrar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ es $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ -integrable y

$$\int h d\mu = \left(\int f d\mu_1 \right) \left(\int g d\mu_2 \right).$$

3.5 Compleción de la medida producto

Es fácil ver que si $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ son espacios de medida completos, entonces su producto $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ no es necesariamente completo. Para ello observemos que si $A \in \mathcal{A}_1$, $A \neq \emptyset$, $\mu_1(A) = 0$ y existe $B \subset \Omega_2$, con $B \notin \mathcal{A}_2$, entonces

$$A \times B \subset A \times \Omega_2 \quad \text{y} \quad \mu(A \times \Omega_2) = 0,$$

pero $A \times B \notin \mathcal{A}$, pues para cada $x \in A$

$$(A \times B)_x = B \notin \mathcal{A}_2.$$

En particular tenemos que el espacio producto de $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$ consigo mismo no es completo siendo su completación $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), m_2)$.

Teorema 3.5.1 (Ver Rudin, p.179). Sean $k, n \in \mathbb{N}$, entonces la completación del producto

$$(\mathbb{R}^k, \mathcal{L}(\mathbb{R}^k), m_k) \times (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m_n),$$

es $(\mathbb{R}^{k+n}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k+n}), m_{k+n})$.

Terminamos la lección con un resultado alternativo del *Teorema de Fubini* que es de interés especial en vista del resultado anterior. Para ello necesitamos dos resultados previos.

Lema 3.5.2 (Ver Rudin, p.154) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea \mathcal{A}_* la completación de \mathcal{A} relativa a μ . Si $f: (\Omega, \mathcal{A}_*) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ es medible, entonces existe $g: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ medible tal que $f = g$ c.s. (\mathcal{A}, μ) .

Lema 3.5.3 (Ver Rudin, p.154) Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y completos y sea $\mathcal{A}_* = (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)_*$ la completación de $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ relativa a $\mu_1 \times \mu_2$. Si

$$h: (\Omega, \mathcal{A}_*) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

es igual a 0 c.s., entonces $h_x = 0$ c.s. (\mathcal{A}_2, μ_2) y esto c.s. (\mathcal{A}_1, μ_1) , en particular h_x es medible c.s. (\mathcal{A}_1, μ_1) y h es medible c.s.

Teorema 3.5.4 (Ver Rudin, p.154) En las hipótesis del Lema anterior sea

$$f: (\Omega, \mathcal{A}_*) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})),$$

entonces:

(a) f_x y f^y son medibles c.s. (\mathcal{A}_1, μ_1) y (\mathcal{A}_2, μ_2) respectivamente. Si $f \geq 0$ y $F(x) = \int f_x d\mu_2$, $G(y) = \int f^y d\mu_1$ —extendiéndolas como queramos donde no están definidas—, entonces

$$\int f d\mu = \int F d\mu_1 = \int G d\mu_2.$$

(b) Si $\int f d\mu$ existe (es finita), entonces $F(x) = \int f_x d\mu_2$ existe (es finita) c.s. (\mathcal{A}_1, μ_1) y es medible —extendiéndola como queramos donde no está definida—, ídem para G y

$$\int f d\mu = \int F d\mu_1 = \int G d\mu_2.$$

3.6 Aplicaciones. Convolución

Como una simple consecuencia del *Teorema de la medida producto* tenemos el siguiente resultado que nos permite ver la integral de una función no negativa en un espacio de medida σ -finito, como una integral respecto de la medida de Lebesgue.

Corolario 3.6.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible, no negativa. Si $E = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$ y $F(y) = \mu\{x \in \Omega : y < f(x)\}$, entonces $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, F es medible y*

$$\mu \times m(E) = \int f \, d\mu = \int_0^\infty F \, dm.$$

Demostración. Consideremos las funciones medibles $F(x, y) = f(x)$ y $\pi(x, y) = y$, entonces por el ejercicio (2.2.4)

$$E = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\} = \{0 \leq \pi < F\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

y como $E^y = \emptyset$ si $y < 0$, tendremos aplicando el *Teorema de la medida producto clásico* que

$$\begin{aligned} \int f(x) \, d\mu &= \int m[0, f(x)] \, d\mu = \int m[E_x] \, d\mu = \mu \times m(E) \\ &= \int \mu[E^y] \, dm = \int_0^\infty F \, dm. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En particular si $\mu = m$ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R} ,

$$m \times m(E) = \int f \, dm,$$

es decir que la integral de f es el área del conjunto bajo la gráfica de f .

Nota 3.6.2 Podemos obtener un resultado familiar sobre series dobles como aplicación del *Teorema de Fubini*: Sea $\sum_{nm} a_{nm}$ una serie doble y consideremos el espacio de medida $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, \mu)$ donde $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ es la medida de contar, es decir $\mu(A) = \text{card } A$, para cada $A \subset \mathbb{N}$. La serie es absolutamente convergente si y sólo si la función $f(n, m) = a_{nm}$ definida en el espacio producto $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, \mu) \times (\mathbb{N}, \mathcal{A}, \mu)$ tiene integral finita, en cuyo caso el *Teorema de Fubini* implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}.$$

Otra consecuencia de este teorema es la siguiente versión de la integración por partes.

Proposición 3.6.3 Sean $F, G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de distribución acotadas, que se anulan en $-\infty$, μ_F, μ_G sus medidas de Lebesgue-Stieltjes asociadas y $[a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_I [F(x) + F(x^-)] d\mu_G + \int_I [G(x) + G(x^-)] d\mu_F &= \\ &= 2[F(b)G(b) - F(a)G(a)]. \end{aligned}$$

Demostración. Consideremos $A = \{(x, y) \in [a, b]^2 : x \geq y\}$ y $B = A^c = \{(x, y) \in [a, b]^2 : x < y\}$, entonces por una parte

$$\begin{aligned} [\mu_F \times \mu_G]([a, b]^2) &= [\mu_F \times \mu_G](A) + [\mu_F \times \mu_G](B) \\ &= \int_{[a, b]} \mu_G(A_x) d\mu_F + \int_{[a, b]} \mu_F(B^y) d\mu_G \\ &= \int_{[a, b]} \mu_G[a, x] d\mu_F + \int_{[a, b]} \mu_F[a, y] d\mu_G \\ &= \int_{[a, b]} [G(x) - G(a^-)] d\mu_F + \\ &\quad + \int_{[a, b]} [F(y^-) - F(a^-)] d\mu_G \\ &= \int_{[a, b]} G(x) d\mu_F - G(a^-) \mu_F[a, b] + \\ &\quad + \int_{[a, b]} F(y^-) d\mu_G - F(a^-) \mu_G[a, b] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[a,b]} G(x) d\mu_F - G(a^-)[F(b) - F(a^-)] + \\
&\quad + \int_{[a,b]} F(y^-) d\mu_G - F(a^-)[G(b) - G(a^-)],
\end{aligned}$$

y por otra parte eso es igual a

$$\mu_F[a, b] \cdot \mu_G[a, b] = (F(b) - F(a^-))(G(b) - G(a^-)),$$

por tanto

$$F(b)G(b) - F(a^-)G(a^-) = \int_{[a,b]} G(x) d\mu_F + \int_{[a,b]} F(y^-) d\mu_G,$$

y como la expresión de la izquierda es simétrica respecto de F y G , también la de la derecha, por lo tanto

$$F(b)G(b) - F(a^-)G(a^-) = \int_{[a,b]} G(x^-) d\mu_F + \int_{[a,b]} F(y) d\mu_G,$$

y el resultado se tiene sumando. ■

Nuestra última aplicación del *Teorema de Fubini* sirve para definir un nuevo producto entre funciones de \mathcal{L}_1 .

Teorema 3.6.4 Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$, entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}$

$$\int |f(x-y)g(y)| dm < \infty,$$

y en ellos podemos definir el producto de convolución de f y g

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dm,$$

que podemos extender como $f * g(x) = 0$ en el resto de puntos y se tiene que $f * g \in \mathcal{L}_1$ y

$$\int |f * g| dm \leq \left(\int |f| dm \right) \left(\int |g| dm \right).$$

Demostración. En primer lugar la función de \mathbb{R}^2 , $F(x, y) = f(x - y)g(y)$ es borel medible e integrable por el apartado (c) del *Teorema de*

Fubini, pues (ver el ejercicio 2.4.15, pág.91)

$$\begin{aligned}
 \int \left(\int |f(x-y)g(y)| dm \right) dm &= \int |g(y)| \left(\int |f(x-y)| dm \right) dm \\
 &= \int |g(y)| \left(\int |f(x)| dm \right) dm \\
 &= \left(\int |g(y)| dm \right) \left(\int |f(x)| dm \right) \\
 &= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty,
 \end{aligned}$$

y por el apartado (b) existe $f * g$ medible e integrable tal que c.s.

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y) dm,$$

y verifica

$$\int |f * g| dm \leq \left(\int |f| dm \right) \left(\int |g| dm \right). \blacksquare$$

Ejercicios

Ejercicio 3.6.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Demostrar que la gráfica de f es medible

$$E = \{(x, y) \in \Omega \times [0, \infty] : y = f(x)\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}),$$

y que $\mu \times m(E) = 0$.

Ejercicio 3.6.2 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Demostrar que la función $F(y) = \mu\{f^{-1}(y)\}$ es medible y $F = 0$ c.s.

Ejercicio 3.6.3 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f, g: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ medibles y tales que para cada $x > 0$, $\mu\{f > x\} \leq \mu\{g > x\}$. Demostrar que

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Ejercicio 3.6.4 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita, $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ medible y $1 \leq p < \infty$. Demostrar que

$$\int f^p \, d\mu = \int_0^\infty p t^{p-1} \mu\{f > t\} \, dt.$$

3.7 Producto de infinitos espacios medibles

Definición. Sea $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, para $n \in \mathbb{N}$, una colección numerable de espacios medibles y

$$\Omega = \prod \Omega_i = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \Omega_i\}.$$

Diremos que $C \subset \Omega$ es un *cilindro con base* $C_n \subset \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ si

$$C = C_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \dots.$$

Diremos que el cilindro C es *medible* si $C_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ y diremos que es un *medible de base un producto finito* si $C_n \in \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$, es decir es de la forma $C_n = A_1 \times \dots \times A_n$, para $A_i \in \mathcal{A}_i$.

Es fácil ver que los cilindros medibles forman un álgebra, así como las uniones finitas disjuntas de productos finitos de medibles.

Definición. Sea $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, para $n \in \mathbb{N}$, una colección numerable de espacios medibles. Diremos que una σ -álgebra \mathcal{A} en el conjunto producto $\Omega = \prod \Omega_i$ es la σ -álgebra *producto* si se verifican las condiciones:

- (a) Las proyecciones $\pi_i: \Omega \rightarrow \Omega_i$ son medibles.
- (b) Una aplicación $F: \Omega' \rightarrow \Omega$ es medible (respecto de una σ -álgebra \mathcal{A}' de Ω' y \mathcal{A}) si y sólo si lo son sus componentes $F_i = \pi_i \circ F$ (respecto de \mathcal{A}' y \mathcal{A}_i).

Proposición 3.7.1 (Ver Ash, p.261) *La σ -álgebra producto existe, es única y es la σ -álgebra generada por los cilindros medibles y también es la generada por los productos finitos de medibles, la denotaremos $\mathcal{A} = \otimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.*

Definición. Diremos que $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n, \dots$ es una familia infinita de medidas (probabilidades) de transición en los espacios

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n), \dots,$$

si para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_n: \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \times \mathcal{A}_{n+1} \longrightarrow [0, \infty],$$

de modo que fijado $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\Lambda_n(x, \cdot)$ es una medida (probabilidad) en \mathcal{A}_{n+1} y fijado $B \in \mathcal{A}_{n+1}$, $\Lambda_n(\cdot, B)$ es medible.

Teorema 3.7.2 (Ver Ash, p.109) *Sean $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ espacios medibles y $(\Omega, \mathcal{A}) = (\prod \Omega_n, \otimes \mathcal{A}_n)$. Si P_1 es una probabilidad en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n, \dots$ es una familia de probabilidades de transición en los $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$. Entonces hay una única probabilidad P en (Ω, \mathcal{A}) tal que para cada cilindro medible $C \in \mathcal{A}$ de base $C_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$, $P(C) = \mu_n(C_n)$, para μ_n la probabilidad definida en $(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n)$ en (3.4.8-a).*

Corolario 3.7.3 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ un espacio de probabilidad y sea $(\Omega, \mathcal{A}) = (\prod \Omega_n, \otimes \mathcal{A}_n)$. Entonces hay una única probabilidad P en \mathcal{A} , tal que para $A_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$, se tiene*

$$P[A_1 \times \dots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \dots] = P_1[A_1] \cdots P_n[A_n].$$

Nota 3.7.4 Este último resultado se extiende sin complicaciones al caso de un producto arbitrario de espacios de probabilidad (ver DUNFORD-SCHWARTZ, p.200 ó HALMOS, p.158). Sin embargo el anterior necesita, para su extensión a un producto arbitrario de espacios, hipótesis topológicas sobre los espacios factores. Es por ello que posponemos su estudio hasta la lección ??, pág.??.

3.8 Bibliografía y comentarios

Para la confección del presente tema hemos hecho uso de los siguientes libros:

ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.

COHN, D.L.: “*Measure theory*”. Birkhauser (Boston), 1980.

DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “*Linear operators, Vol.I*”. John Wiley–Interscience Pub., 1958.

HALMOS, P.R.: “*Measure Theory*”. Springer–Verlag, 1974.

HEWITT, E. AND STROMBERG, K.: “*Real and abstract analysis*”. Springer–Verlag, 1965.

PARTHASARATHY, K.R.: “*Introduction to probability and measure*”, McMillan Press, 1980.

RUDIN, W.: “*Real and complex analysis*”. Tata McGraw-Hill, 1974.

Parece ser que la primera discusión sobre la relación entre una integral doble y sus integrales simples iteradas, aparece en 1827 cuando CAUCHY señala que las integrales

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy \quad \text{y} \quad \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$$

no son necesariamente iguales cuando f no es acotada.

En 1876 THOMAE extiende la teoría de integración de Riemann de una variable a varias variables y en 1878 dio un ejemplo simple de una función acotada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, para la que la segunda integral del párrafo anterior existía, mientras que la primera no tenía significado pues f^y era Riemann integrable para un único valor de y .

En estos dos ejemplos, de CAUCHY y THOMAE, la integral doble de f no existe. En 1883 DU BOIS–REYMOND demuestra que aunque f sea integrable, como función de dos variables, las funciones f_x y f^y no tienen por qué ser integrables para todo valor de x e y respectivamente (ver HAWKINS, p.92). Pero no consideró la validez del *Teorema de Fubini* atendiendo a las particularidades del conjunto E sobre el que se integra. En este sentido HARNACK estudia, en 1884–85, el *Teorema de Fubini* imponiendo la condición a E , de que para cada punto y , la sección E^y fuese vacía, un punto o un intervalo. Mas tarde, en 1886, hace la observación de que el *Teorema de Fubini* sigue siendo válido cuando E está limitado

por una curva “suficientemente simple”, en un sentido que especifica de la siguiente manera:

(i) *Que la curva pueda encerrarse en un dominio plano de magnitud arbitrariamente pequeña y*

(ii) *Que los conjuntos E_x y E^y se intersequen con la curva en a lo sumo una colección finita de puntos.*

El tratamiento de las integrales dobles y en particular del *Teorema de Fubini* demostraron, en palabras de JORDAN, que “...aunque el papel que juega una función en la integral está claro, la influencia de la naturaleza del dominio E , sobre el que se integra, no parece haber sido estudiada con el mismo cuidado...”.

La situación fue finalmente rectificada por el mismo JORDAN en 1892, a partir de su desarrollo del concepto de conjunto medible. Con las definiciones que dio logró probar un *Teorema de Fubini*, para funciones Riemann integrables, de total generalidad.

También en 1892 DE LA VALLEE-POUSIN —que había extendido la definición de integral de Riemann, a funciones no acotadas—, indicó que una formulación satisfactoria del *Teorema de Fubini*, para funciones no acotadas era un problema difícil. En 1899 demostró una versión bastante complicada de enunciado.

El siguiente paso lo dio LEBESGUE en su Tesis de 1902. Encontró las mismas dificultades que sus predecesores:

Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ era Lebesgue integrable, las funciones f_x y f^y no tenían por qué ser ni Lebesgue medibles.

No obstante, introduciendo los conceptos de integral superior e integral inferior, demostró (ver HAWKINS, p.157) una versión del *Teorema de Fubini* qué, como él mismo observó, tenía como consecuencia el *Teorema de Fubini* si f fuese Borel medible. Pues en ese caso f_x y f^y también lo son.

Esta observación sugirió a FUBINI la posibilidad de mejorar el *Teorema de Lebesgue* y en 1907 prueba esencialmente lo que hemos llamado el *Teorema de Fubini clásico*. No obstante B.LEVI, en 1906, había escrito en un pie de página de un trabajo sobre el *Principio de Dirichlet*, el enunciado de este mismo resultado.

Es curioso observar que una idea fundamental como es que f_x y f^y fuesen medibles c.s. había sido señalada en un caso particular por HOBSON en 1907, sin darse cuenta que era válido en general.

Remitimos al lector interesado en las anteriores referencias históricas al libro

HAWKINS, T.: “*Lebesgue’s Theory of integration*”. Chelsea Pub.Co., 1975.

El lector interesado en el comportamiento de la absoluta continuidad y de la singularidad en el producto de medidas, puede consultar el HEWITT–STROMBERG, p.394.

El producto de convolución definido en el teorema (3.6.4), pág.124, es simplemente el producto natural de polinomios en el siguiente sentido, si consideramos para cada polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ la función definida en \mathbb{Z} , $f_p(i) = a_i$ ($f_p = 0$ en el resto), entonces dados dos polinomios p y q tendremos que a su producto le corresponde $f_{pq}(j) = \sum f_p(j-i)f_q(i) = f_p * f_q(j)$. Además p es la *Transformada de Fourier* de f_p (estudiaremos este concepto en un capítulo posterior).

Por último es posible, en base a lo expuesto en este capítulo, dar una construcción no topológica de la medida de Lebesgue en \mathbb{R} , y por tanto en \mathbb{R}^n , partiendo de un simple espacio de medida —el de la moneda de cara y cruz—

$$\Omega = \{0, 1\}, \quad \mathcal{A} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}, \quad \mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1/2.$$

Remitimos al lector interesado a P.R.HALMOS, p.159.

Fin del Tema III

Capítulo 4

El Teorema de Radon–Nikodym

4.1 Introducción

En (2.4.10) hemos visto que si f es una función con integral, entonces $\mu(E) = 0$ implica $\lambda(E) = 0$, para $\lambda = f\mu$. El *Teorema de Radon–Nikodym* establece el resultado inverso, es decir que si λ es una medida que verifica la condición de anular a los conjuntos que son de medida nula para μ (propiedad que denotamos con $\lambda \ll \mu$), entonces $\lambda = f\mu$, para una cierta f con integral.

A esa función f se la llama *derivada de Radon–Nikodym* de λ respecto de μ y se denota $d\lambda/d\mu$, pues como veremos extiende en contextos particulares la noción de derivación de funciones en el sentido de que es un límite de cocientes incrementales. En particular en el tema siguiente veremos que en \mathbb{R}^n , si λ anula a los borel medibles de medida de Lebesgue nula, entonces la derivada de Radon–Nikodym $d\lambda/dm$, coincide c.s. en cada $x \in \mathbb{R}^n$, con el límite $\lambda(E)/m(E)$, cuando $m(E) \rightarrow 0$, para los E tales que $x \in E$.

4.2 Teorema de descomposición de carga

Si λ es una medida en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , entonces para todo $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(\emptyset) = 0 \leq \lambda(A) \leq \lambda(\Omega),$$

y por tanto el $\inf \lambda$ y el $\sup \lambda$ se alcanzan. Este hecho también es obvio para una carga $\lambda = f\mu$, donde μ es una medida y f una función medible, para la que existe la $\int f d\mu$, pues para $A = \{f \geq 0\}$ y todo $E \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} I_{A^c} f \leq I_E f \leq I_A f &\Rightarrow \int_{A^c} f d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \int_A f d\mu \\ &\Rightarrow \lambda(A^c) \leq \lambda(E) \leq \lambda(A), \end{aligned}$$

A continuación demostramos que esta propiedad, característica de las funciones continuas sobre los compactos, la tienen todas las cargas.

Teorema 4.2.1 *Sea λ una carga en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , entonces existen $A, B \in \mathcal{A}$ tales que*

$$\lambda(A) = \max\{\lambda(C) : C \in \mathcal{A}\}, \quad \lambda(B) = \min\{\lambda(C) : C \in \mathcal{A}\}.$$

Demostración. Veamos el máximo. Si existe un $A \in \mathcal{A}$ tal que $\lambda(A) = \infty$, hemos terminado. Supongamos entonces que $\lambda < \infty$. Como $\lambda(\emptyset) = 0$, tendremos que

$$0 \leq \alpha = \sup\{\lambda(E) : E \in \mathcal{A}\},$$

y podemos tomar una sucesión $0 \leq \lambda(E_n) \rightarrow \alpha$. Sea $E = \cup E_n$ y denotemos con $E'_n = E \cap E_n^c$. Ahora consideremos, para cada n , la partición de E en los 2^n subconjuntos

$$\begin{aligned} E &= E_1 \cup E'_1 && (\text{para } n = 1) \\ &= (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E'_2) \cup (E'_1 \cap E_2) \cup (E'_1 \cap E'_2) && (\text{para } n = 2) \\ &= \cup_{i=1}^{2^n} E_{ni}, \quad \text{con } E_{ni} = E_1^* \cap \cdots \cap E_n^*, && (\text{para } n) \\ &\quad \text{donde } E_j^* = E_j \quad \text{ó} \quad E_j^* = E'_j, \end{aligned}$$

consideremos ahora los conjuntos

$$A_n = \bigcup_{\{i: \lambda(E_{ni}) \geq 0\}} E_{ni}, \quad (A_n = \emptyset, \quad \text{si todos los } \lambda(E_{ni}) < 0),$$

por tanto tendremos que

$$0 \leq \lambda(E_n) \leq \lambda(A_n) \leq \lambda\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

pues para cada n los E_{ni} son disjuntos y se sigue fácilmente la segunda desigualdad, la tercera es porque

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cup (A_{n+1} \cap A_n^c) \cup (A_{n+2} \cap A_{n+1}^c \cap A_n^c) \cup \dots,$$

con la unión de la derecha disjunta y $\lambda(A_{n+m} \cap A_{n+m-1}^c \cap \dots \cap A_n^c) \geq 0$, pues para $m \leq k$, cada

$$E_{ki} = E_1^* \cap \dots \cap E_m^* \cap \dots \cap E_k^* \subset E_1^* \cap \dots \cap E_m^* = E_{mj},$$

por tanto ó $E_{ki} \subset E_{mj} \subset A_m$ (si $\lambda(E_{mj}) \geq 0$) ó $E_{ki} \subset E_{mj} \subset A_m^c$ (si $\lambda(E_{mj}) < 0$), es decir ó $E_{ki} \cap A_m^c = \emptyset$ ó $E_{ki} \cap A_m^c = E_{ki}$ y por inducción $A_{n+m} \cap A_{n+m-1}^c \cap \dots \cap A_n^c$ es la unión de algunos de los $E_{n+m,i}$, de los que definen A_{n+m} .

Ahora tomando límites en n , como $\lambda(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) < \infty$ y $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A$, tendremos por la continuidad inferior de las cargas (1.3.13), pág.17,

$$\alpha = \lim \lambda(E_n) \leq \lambda(A) \leq \alpha.$$

Para el mínimo se aplica el resultado anterior a $-\lambda$. ■

Nota 4.2.2 En el tema I vimos que si λ era aditiva y no negativa sobre un álgebra, entonces λ era acotada si y sólo si era finita en cada elemento del álgebra y dijimos que esto no era cierto en general si quitábamos la no negatividad. Sin embargo si en lugar de un álgebra tenemos una σ -álgebra y λ es numerablemente aditiva sí es cierto y es una simple consecuencia del resultado anterior.

Corolario 4.2.3 Si $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ es una medida real (carga finita), entonces es acotada.

Definición. Diremos que un conjunto $P \in \mathcal{A}$ es *positivo* para una carga λ , si $\lambda(A \cap P) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Diremos que $N \in \mathcal{A}$ es *negativo* si $\lambda(A \cap N) \leq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Diremos que un conjunto es *nulo* si es positivo y negativo.

Llamaremos *descomposición de Hahn* de una carga λ a toda partición del espacio $P, N = P^c \in \mathcal{A}$, con P positivo y N negativo.

Nota 4.2.4 Observemos que si $P, N \in \mathcal{A}$ es una descomposición de Hahn, uno de los dos es finito, pues

$$\lambda(\Omega) = \lambda(P) + \lambda(N).$$

Observemos también que si $C \in \mathcal{A}$ es nulo, entonces $\lambda(C) = 0$ —de hecho $\lambda(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{A}$, con $E \subset C$ —, sin embargo no se tiene el recíproco en general, pues por ejemplo en $\Omega = [-1, 1]$, $\lambda(E) = \int_E x dm$, $\lambda(\Omega) = 0$ pero Ω no es nulo. Sin embargo si λ es una medida, sí.

Teorema de descomposición de Hahn 4.2.5 *Existe una descomposición de Hahn para cada carga λ en un espacio medible.*

Demostración. Si $\lambda < \infty$, consideramos el conjunto $A \in \mathcal{A}$ del Teorema (4.2.1), $\lambda(A) = \max \lambda$ (en caso contrario sería $-\infty < \lambda$ y consideraríamos B siendo la demostración similar). Veamos que $P = A$ y $N = A^c$ es una descomposición de Hahn. Como $\lambda(\emptyset) = 0$, tendremos que $0 \leq \lambda(A) < \infty$ y si $E \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E^c \cap A) \leq \lambda(E \cap A) + \lambda(A),$$

$$\lambda(A) \geq \lambda(A \cup E) = \lambda(A) + \lambda(A^c \cap E),$$

lo cual implica que $\lambda(E \cap A) \geq 0$ y $\lambda(E \cap A^c) \leq 0$. ■

En las siguientes propiedades vemos que la descomposición de Hahn esencialmente es única.

Proposición 4.2.6 *Sea P, N una descomposición de Hahn, entonces:*

(a) *Para $E, B \in \mathcal{A}$, $E \subset B$:*

$$\lambda(B \cap N) \leq \lambda(E \cap N) \leq \lambda(E) \leq \lambda(E \cap P) \leq \lambda(B \cap P).$$

(b) $\lambda(B \cap P) = \max\{\lambda(E) : E \subset B, E \in \mathcal{A}\},$

$$\lambda(B \cap N) = \min\{\lambda(E) : E \subset B, E \in \mathcal{A}\}.$$

(c) *Dada otra descomposición de Hahn P', N'*

$$\lambda(E \cap N) = \lambda(E \cap N') \quad \text{y} \quad \lambda(E \cap P) = \lambda(E \cap P').$$

Demostración. (a) Obvio pues $\lambda(E) = \lambda(E \cap N) + \lambda(E \cap P)$ y $E = E \cap B$, por tanto $\lambda(B \cap N) = \lambda(E \cap B \cap N) + \lambda(E^c \cap B \cap N) \leq \lambda(E \cap N)$ y $\lambda(B \cap P) = \lambda(E \cap B \cap P) + \lambda(E^c \cap B \cap P) \geq \lambda(E \cap P)$.

(b) Se sigue de (a).

(c) Se sigue de (b). ■

Veremos a continuación que las cargas son diferencia de medidas, una de las cuales es finita.

Teorema de descomposición de Jordan 4.2.7 *Sea λ una carga en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , entonces para cada $B \in \mathcal{A}$*

$$\lambda^+(B) = \sup\{\lambda(E) : E \subset B, E \in \mathcal{A}\},$$

$$\lambda^-(B) = -\inf\{\lambda(E) : E \subset B, E \in \mathcal{A}\},$$

son medidas, al menos una es finita y $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.

Demostración. Sea P, N una descomposición de Hahn, entonces por el resultado anterior $\lambda^+(B) = \lambda(B \cap P)$ y $\lambda^-(B) = -\lambda(B \cap N)$, de donde se sigue que son medidas, que una de ellas es finita, pues $\lambda^+(\Omega) = \lambda(P)$ y $\lambda^-(\Omega) = -\lambda(N)$ y que $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. ■

Definición. A las medidas λ^+ y λ^- las llamaremos *parte positiva* y *parte negativa* de λ . Llamaremos *variación* de λ a la medida

$$|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-,$$

y a $|\lambda|(\Omega)$ la *variación total* de λ .

Proposición 4.2.8 (a) *Para cada $A \in \mathcal{A}$, $|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)$ y además $|\lambda|$ es la medida más pequeña que lo satisface.*

(b) *Si $\lambda_1, \lambda_2 : \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$ son cargas, entonces*

$$|\lambda_1 + \lambda_2| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2|.$$

(c) *Si λ es una carga*

$$|\lambda|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| : E_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup E_i = A\right\}.$$

Demostración. (a) $|\lambda(A)| = |\lambda^+(A) - \lambda^-(A)| \leq |\lambda|(A)$, y si μ es una medida para la que $|\lambda(A)| \leq \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned} |\lambda|(A) &= \lambda^+(A) + \lambda^-(A) \\ &= |\lambda(A \cap P)| + |\lambda(A \cap N)| \\ &\leq \mu(A \cap P) + \mu(A \cap N) = \mu(A), \end{aligned}$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

(b) y (c) se dejan como ejercicio. ■

Nota 4.2.9 Por otro lado λ es una carga finita si y sólo si lo son λ^+ y λ^- si y sólo si lo es $|\lambda|$, en cuyo caso es acotada y escribiremos $\|\lambda\| = |\lambda|(\Omega)$. Veremos en la próxima lección que sobre el espacio vectorial de las cargas finitas (que llamaremos medidas reales) esto es una norma, con la que dicho espacio es de Banach.

La descomposición de una carga nos permite extender la noción de integral.

Definición. Dada una carga λ en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , diremos que una función f medible es *integrable respecto λ* ó que es *λ -integrable* si lo es respecto de las medidas λ^+ y λ^- , en cuyo caso definimos su integral como

$$\int f d\lambda = \int f d\lambda^+ - \int f d\lambda^-.$$

Ejercicios

Ejercicio 4.2.1 Sean $\lambda_1, \lambda_2: \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$ cargas, demostrar que

$$|\lambda_1 + \lambda_2| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2|.$$

Ejercicio 4.2.2 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio medible con una carga. Demostrar:

(a) $E \in \mathcal{A}$ es nulo si y sólo si $|\lambda|(E) = 0$.

(b) Si P, N y P', N' son descomposiciones de Hahn, $|\lambda|(P \triangle P') = 0$.

Ejercicio 4.2.3 Sean μ_1, μ_2 medidas, $\mu = \mu_1 + \mu_2$ y f una función medible. Demostrar que existe $\int f d\mu$ sii existen $\int f d\mu_1$ la $\int f d\mu_2$ y su suma está definida. Y en tal caso

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2.$$

Ejercicio 4.2.4 Sea λ una carga. Demostrar:

- (a) g es λ -integrable si y sólo si es $|\lambda|$ -integrable.
 (b) Si g es λ -integrable,

$$\left| \int g d\lambda \right| \leq \int |g| d|\lambda|.$$

- (c) Existe una medida μ y una función medible f , con integral respecto de μ , tal que para todo $E \in \mathcal{A}$

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu.$$

Ejercicio 4.2.5 Encontrar en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la descomposición de Jordan para la carga $\lambda = P - \delta_{\{0\}}$, siendo P una probabilidad.

Ejercicio 4.2.6 Sea f una función con integral en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y consideremos la carga $\lambda = f\mu$. Demostrar que

$$\lambda^+(A) = \int_A f^+ d\mu, \quad \lambda^-(A) = \int_A f^- d\mu, \quad |\lambda|(A) = \int_A |f| d\mu.$$

Ejercicio 4.2.7 Demostrar que si una carga $\lambda = \mu_1 - \mu_2$ es diferencia de dos medidas μ_i , entonces $\lambda^+ \leq \mu_1$ y $\lambda^- \leq \mu_2$.

Ejercicio 4.2.8 Sean μ_1 y μ_2 medidas positivas y finitas y $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Demostrar que si f es μ_1 y μ_2 integrables entonces es μ integrable y

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2.$$

Ejercicio 4.2.9 Sea λ una carga en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que

$$|\lambda|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| : E_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup E_i = A \right\},$$

¿Es cierto el resultado si ponemos $\sum_{i=1}^{\infty}$ en lugar de sumas finitas?.

4.3 Medidas reales y medidas complejas

Definición. Llamaremos *medida real* en (Ω, \mathcal{A}) a toda carga finita, es decir a una función de conjunto numerablemente aditiva $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Llamaremos *medida compleja* a toda función de conjunto numerablemente aditiva

$$\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C},$$

tal que $\mu(\emptyset) = 0$.

Nota 4.3.1 Observemos que las medidas reales son un subconjunto de las medidas complejas. Por otra parte es fácil ver que cada medida compleja μ puede escribirse de forma única como

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2$$

donde μ_1 y μ_2 son medidas reales. Y por el *Teorema de Jordan*

$$\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i\mu_2^+ - i\mu_2^-$$

donde μ_1^+ , μ_1^- , μ_2^+ y μ_2^- son medidas finitas. Por último observemos que si μ es una medida compleja, entonces es numerablemente aditiva, por tanto dada cualquier colección numerable $E_n \in \mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos,

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

y como la serie converge a un número de \mathbb{C} —no como en el caso de las medidas en las que la serie podía divergir—, y converge al mismo valor para cualquier reordenación de la serie, puesto que la unión no cambia, la serie converge absolutamente.

Si dada una medida compleja μ , quisiéramos encontrar una medida positiva $|\mu|$ análoga a la variación de una carga, es decir que sea mínima entre las que satisfacen $|\mu(A)| \leq \lambda(A)$, en \mathcal{A} , tendríamos que tal medida debe verificar

$$|\mu|(A) = \sum |\mu|(A_i) \geq \sum |\mu(A_i)|,$$

para cada partición A_i de A en \mathcal{A} . Esto sugiere la siguiente definición que extiende la propiedad vista para cargas en (4.2.8), pág.135.

Definición. Dada una medida compleja μ , llamaremos *variación* de μ a la medida (a continuación demostramos que lo es)

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| : A_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup A_i = A\right\}.$$

Teorema 4.3.2 Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible y μ una medida compleja. Entonces su variación $|\mu|$ es una medida finita que verifica $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$ y es la mínima entre las que satisfacen esta propiedad, además si λ es otra medida compleja $|\mu + \lambda| \leq |\mu| + |\lambda|$.

Demostración. Por (4.2.8) sabemos que es cierto para μ real. Ahora para $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, es obvio que $|\mu|(\emptyset) = 0$. Veamos que $|\mu|$ es aditiva, para ello sean $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos y consideremos una partición finita $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ de $A \cup B$, entonces

$$\sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| \leq \sum_{i=1}^n |\mu(E_i \cap A)| + \sum_{i=1}^n |\mu(E_i \cap B)| \leq |\mu|(A) + |\mu|(B),$$

por tanto $|\mu|(A \cup B) \leq |\mu|(A) + |\mu|(B)$. Para la otra desigualdad consideremos sendas particiones finitas $A_i, B_j \in \mathcal{A}$ de A y B respectivamente, entonces como todos ellos son una partición de $A \cup B$,

$$\sum |\mu(A_i)| + \sum |\mu(B_j)| \leq |\mu|(A \cup B),$$

y $|\mu|(A) + |\mu|(B) \leq |\mu|(A \cup B)$, por tanto $|\mu|$ es aditiva. Ahora como $|\mu(A)| \leq |\mu_1(A)| + |\mu_2(A)| \leq |\mu_1|(A) + |\mu_2|(A)$ entonces para todo $A \in \mathcal{A}$ y toda partición finita suya $A_i \in \mathcal{A}$

$$\sum_i |\mu(A_i)| \leq |\mu_1|(A) + |\mu_2|(A),$$

de donde se sigue que

$$|\mu|(A) \leq |\mu_1|(A) + |\mu_2|(A) < \infty,$$

por tanto $|\mu| \leq |\mu_1| + |\mu_2|$ y es finita. Ahora sea $A_n \in \mathcal{A}$, con $A_n \downarrow \emptyset$, entonces $|\mu|(A_n) \rightarrow 0$, pues $|\mu_i|(A_n) \rightarrow 0$ por ser medidas finitas, por tanto $|\mu|$ es numerablemente aditiva por (1.3.15), pág.17.

Ahora dada otra medida ν tal que $|\mu(A)| \leq \nu(A)$, en \mathcal{A} , se tiene que dada una partición finita $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ de un $A \in \mathcal{A}$

$$\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| \leq \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \nu(A),$$

por tanto $|\mu|(A) \leq \nu(A)$. Por último la desigualdad $|\mu + \lambda| \leq |\mu| + |\lambda|$ se sigue de esta última propiedad aplicada a $\mu + \lambda$. ■

Definición. Dada una medida compleja μ , llamaremos *variación total* de μ al valor finito

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega).$$

Nota 4.3.3 Como consecuencia tenemos que si μ es compleja, entonces para todo $E \in \mathcal{A}$

$$(4.1) \quad |\mu(E)| \leq |\mu|(E) \leq |\mu|(\Omega) = \|\mu\|,$$

por lo que su rango está en un disco de radio finito $\|\mu\|$. Esta propiedad se expresa diciendo que μ es de *variación acotada*. Denotaremos con $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ el \mathbb{R} -espacio vectorial de todas las medidas reales

$$\mu: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R},$$

y con $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ el \mathbb{C} -espacio vectorial de las medidas complejas

$$\mu: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Lema 4.3.4 $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$ si y sólo si $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$ es aditiva y tal que $\mu(A_n) \rightarrow 0$, para cada $A_n \downarrow \emptyset$.

Demostración. En primer lugar $\mu(\emptyset) = 0$, pues $\mu(\emptyset) = 2\mu(\emptyset) \in \mathbb{K}$. Ahora el resultado lo vimos en (1.3.15), pág.17, para el caso real (para cargas) y de este se sigue el caso complejo considerando $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, con μ_1 y μ_2 reales. ■

Teorema 4.3.5 Los espacios $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , son de Banach con la norma

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega).$$

Demostración. Que es una norma se sigue fácilmente (la desigualdad triangular es consecuencia de que $|\mu + \lambda| \leq |\mu| + |\lambda|$). Veamos que es completo. Sea $\mu_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$ una sucesión de Cauchy, entonces por (4.1) se tiene para cada $A \in \mathcal{A}$

$$|\mu_n(A) - \mu_m(A)| \leq \|\mu_n - \mu_m\|,$$

por tanto $\mu_n(A) \in \mathbb{K}$ es de Cauchy, además uniformemente, y tiene límite que llamamos $\mu(A) = \lim \mu_n(A)$ y la convergencia es uniforme en A . Demostremos que $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$ y que $\|\mu_n - \mu\| \rightarrow 0$. En primer lugar $\mu(\emptyset) = \lim \mu_n(\emptyset) = 0$ y es aditiva pues si $A, B \in \mathcal{A}$ son disjuntos, entonces

$$\mu(A \cup B) = \lim \mu_n(A \cup B) = \lim \mu_n(A) + \lim \mu_n(B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Para demostrar que es numerablemente aditiva veamos —por el Lema anterior (4.3.4)— que $\mu(A_n) \rightarrow 0$, para cada sucesión $A_n \in \mathcal{A}$ con $A_n \downarrow \emptyset$. Sea $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq \epsilon/2$, para todo $n \geq N$ y todo A medible. Ahora como $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_N(A_m) = 0$, existe un $k \in \mathbb{N}$, tal que para $m \geq k$, $|\mu_N(A_m)| \leq \epsilon/2$, por tanto,

$$|\mu(A_m)| \leq |\mu(A_m) - \mu_N(A_m)| + |\mu_N(A_m)| \leq \epsilon,$$

y $\mu(A_m) \rightarrow 0$, por tanto μ es numerablemente aditiva.

Por último veamos que $\mu_n \rightarrow \mu$, es decir que $\|\mu - \mu_n\| \rightarrow 0$. Sea A_1, \dots, A_k una partición de Ω y sea $\epsilon > 0$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^k |\mu_m(A_i) - \mu_n(A_i)| \leq \|\mu_m - \mu_n\| \leq \epsilon,$$

para todo $m, n \geq N$ y haciendo $m \rightarrow \infty$, tendremos que

$$\sum_{i=1}^k |\mu(A_i) - \mu_n(A_i)| \leq \epsilon,$$

por tanto $\|\mu - \mu_n\| \leq \epsilon$, para $n \geq N$ y el resultado se sigue. ■

Ejercicios

Ejercicio 4.3.1 Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible con una medida compleja

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = \lambda_1^+ - \lambda_1^- + i\lambda_2^+ - i\lambda_2^- ,$$

demostrar que

$$\lambda_i^\pm \leq |\lambda_i| \leq |\lambda| \leq \lambda_1^+ + \lambda_1^- + \lambda_2^+ + \lambda_2^- .$$

4.4 El Teorema de Radon–Nikodym

Definición. Sea λ una carga ó una medida compleja (en particular una medida ó una medida real), en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, diremos que λ es *absolutamente continua respecto de μ* , y lo denotaremos $\lambda \ll \mu$, si para $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(A) = 0.$$

Sea f medible en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, tal que existe la $\int f d\mu$, entonces hemos visto en el Tema anterior que $\lambda = f\mu$ es una carga para la que $\lambda \ll \mu$, pues si $\mu(A) = 0$,

$$-\infty I_A \leq f I_A \leq \infty I_A \quad \Rightarrow \quad 0 = -\infty \mu(A) \leq \lambda(A) \leq \infty \mu(A) = 0.$$

Del mismo modo si $f = f_1 + i f_2: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es medible e integrable, entonces

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu = \int_A f_1 d\mu + i \int_A f_2 d\mu = \lambda_1(A) + i \lambda_2(A),$$

es una medida compleja, para la que por lo anterior $\lambda_i \ll \mu$ y por tanto $\lambda \ll \mu$. En esta lección veremos que esta propiedad es esencial para la representación de una carga ó de una medida compleja λ en la forma $f\mu$.

El siguiente resultado nos explica por qué la palabra continuidad se utiliza en esta definición.

Proposición 4.4.1 *Sea λ una medida compleja en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Entonces son equivalentes:*

(a) $\lambda \ll \mu$.

(b) $|\lambda| \ll \mu$.

(c) Para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, entonces $|\lambda(E)| < \epsilon$.

Si λ es una carga entonces (a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c).

Demostración. (a) \Rightarrow (b) En cualquier caso como

$$|\lambda|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\lambda(A_i)| : A_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup A_i = A\right\}.$$

tendremos que si $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \mu(A) = 0 &\Rightarrow \mu(B) = 0, \quad \text{para todo } B \subset A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda(B) = 0, \quad \text{para todo } B \subset A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\lambda|(A) = 0, \end{aligned}$$

por tanto $|\lambda| \ll \mu$.

(b) \Rightarrow (a) En cualquier caso se sigue de que $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$.

(c) \Rightarrow (a) Es obvia en cualquier caso.

(a) \Rightarrow (c) Para λ medida compleja. Supongamos que (c) no es cierto, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo n , existen $E_n \in \mathcal{A}$, tales que $\mu(E_n) < 2^{-n}$, pero $|\lambda(E_n)| \geq \epsilon$. Ahora por el Lema de Borel–Cantelli $\mu(\limsup E_n) = 0$, pues $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, y por (b) $|\lambda|(\limsup E_n) = 0$, pero

$$\epsilon \leq |\lambda(E_n)| \leq |\lambda|(E_n) \leq |\lambda|(\cup_{k=n}^{\infty} E_n) < \infty$$

y llegamos a un absurdo pues $|\lambda|(\cup_{k=n}^{\infty} E_n) \rightarrow |\lambda|(\limsup E_n)$. ■

Nota 4.4.2 Para una carga en general (a) no implica (c), ni siquiera si λ es una medida (no acotada, pues las acotadas al ser un caso particular de medidas complejas sí lo satisfacen). Por ejemplo para $\mu = m$ la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ y

$$\lambda(E) = \int_E \frac{1}{x} dm,$$

se tiene para todo $t \in (0, 1)$, $m(0, t) = t$ y

$$\lambda(0, t) = \int_0^t \frac{1}{x} dx = \infty.$$

A continuación vemos uno de los resultados fundamentales de la Teoría de la medida.

Teorema de Radon–Nikodym I 4.4.3 Sean λ y μ medidas σ -finitas en (Ω, \mathcal{A}) , tales que $\lambda \ll \mu$. Entonces existe una única c.s. (\mathcal{A}, μ) función finita medible con integral $g : \Omega \rightarrow [0, \infty)$, tal que para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

Demostración. La unicidad es consecuencia de (2.4.26), página 90: si μ es σ -finita y $\int_A g d\mu \leq \int_A g' d\mu$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $g \leq g'$ c.s.

La existencia la vamos a dividir en una serie de pasos:

(a) Supongamos que λ y μ son medidas finitas y consideremos el conjunto

$\mathcal{F} = \{f: \Omega \longrightarrow [0, \infty], \text{ medibles, } \mu\text{-integrables tales que}$

$$\int_A f d\mu \leq \lambda(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}\},$$

el cual es no vacío — $0 \in \mathcal{F}$ — y si $f, g \in \mathcal{F}$ entonces $\max(f, g) \in \mathcal{F}$, pues $0 \leq h = \max(f, g)$ es medible, por tanto tiene integral y si consideramos un $A \in \mathcal{A}$, $B = \{x \in A : f(x) > g(x)\}$ y $C = \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_A h d\mu &= \int_B h d\mu + \int_C h d\mu \\ &= \int_B f d\mu + \int_C g d\mu \leq \lambda(B) + \lambda(C) = \lambda(A), \end{aligned}$$

consideremos ahora

$$s = \sup\left\{\int f d\mu : f \in \mathcal{F}\right\} \quad \text{y} \quad f_n \in \mathcal{F}, \quad \int f_n d\mu \uparrow s,$$

y veamos que el supremo se alcanza. Sea $g_n = \max(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{F}$, entonces $g_n \uparrow g$ converge a una función medible g , además $f_n \leq g_n$ y por tanto $\int f_n d\mu \leq \int g_n d\mu \leq s$, por tanto aplicando el *Teorema de la convergencia monótona*, pág.79, $s = \int g d\mu$ y para todo $A \in \mathcal{A}$, $\int_A g_n d\mu \rightarrow \int_A g d\mu$, por tanto $\int_A g d\mu \leq \lambda(A)$ y $g \in \mathcal{F}$ y como es integrable podemos considerarla finita haciéndola cero donde valga ∞ .

Como $\lambda(A) \geq \int_A g d\mu$ podemos considerar la medida finita

$$\nu(A) = \lambda(A) - \int_A g d\mu,$$

para la que $\nu \ll \mu$. Ahora si $\nu(\Omega) = 0$, entonces hemos terminado pues para cada A medible $\nu(A) = 0$, es decir

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

En caso contrario $0 < \nu(\Omega) < \infty$, vamos a llegar a una contradicción. Como μ es finita existe un $k > 0$ tal que $k\mu(\Omega) < \nu(\Omega)$ y por tanto para la carga finita $\lambda' = \nu - k\mu$, $\lambda'(\Omega) > 0$. Consideremos una descomposición de Hahn P, N , para λ' . Veamos que $\int (g + kI_P) > s$ y que $g + kI_P \in \mathcal{F}$: $\int (g + kI_P) d\mu = s + k\mu(P)$ y si fuese $\mu(P) = 0$ tendríamos $\nu(P) = 0$ y $\lambda'(P) = 0$, por tanto una contradicción pues $0 < \lambda'(\Omega) = \lambda'(N) \leq 0$. Ahora para cada A medible $\lambda'(A \cap P) \geq 0$ y

$$\begin{aligned} \int_A (g + kI_P) d\mu &= \int_A g d\mu + k\mu(A \cap P) \leq \int_A g d\mu + \nu(A \cap P) \\ &\leq \int_A g d\mu + \nu(A) = \lambda(A), \end{aligned}$$

lo cual es absurdo y el resultado se sigue.

(b) Supongamos ahora que μ y λ son medidas σ -finitas, entonces existen $A_n \in \mathcal{A}$, que podemos tomar disjuntos, tales que $\cup A_n = \Omega$, $\lambda(A_n) < \infty$ y $\mu(A_n) < \infty$. Si consideramos las medidas finitas λ y μ en cada espacio medible $(A_n, \mathcal{A}|_{A_n})$, tendremos que $\lambda \ll \mu$ y por (a) existen $f_n: A_n \rightarrow [0, \infty)$ medibles e integrables, que podemos extender a Ω , $f_n: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ haciéndolas nulas fuera de A_n de tal forma que para cada $E \in \mathcal{A}$

$$\lambda(E \cap A_n) = \int_{E \cap A_n} f_n d\mu = \int_E f_n d\mu,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \sum \lambda(E \cap A_n) \\ &= \sum \int_E f_n d\mu = \int_E \left(\sum f_n \right) d\mu, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue para $f = \sum f_n$. ■

Teorema de Radon–Nikodym II 4.4.4 *Sea λ una carga y μ una medida σ -finita en (Ω, \mathcal{A}) , tales que $\lambda \ll \mu$. Entonces existe una única c.s. (\mathcal{A}, μ) función medible con integral $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $A \in \mathcal{A}$*

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

Demostración. Como μ es σ -finita, la unicidad se sigue como en el teorema anterior.

(a) Supongamos primero que λ es una medida y que μ es finita. Consideremos la clase de conjuntos

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{A} : (C, \mathcal{A}|_C, \lambda|_C) \text{ es } \sigma\text{-finito}\},$$

la cual es no vacía pues $\emptyset \in \mathcal{C}$, contiene a todo medible E , con $\lambda(E) < \infty$ y es cerrada para uniones numerables. Sea $s = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{C}\} \leq \mu(\Omega) < \infty$ y $C_n \in \mathcal{C}$ tales que $\mu(C_n) \uparrow s$, entonces como $C = \cup C_n \in \mathcal{C}$, $\mu(C_n) \leq \mu(C) \leq s$ y tomando límites, $\mu(C) = s < \infty$. Ahora aplicando el resultado anterior existe una función medible $g: C \rightarrow [0, \infty)$, tal que para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A \cap C) = \int_{A \cap C} g d\mu,$$

ahora bien si $\mu(A \cap C^c) > 0$ tendrá que ser $\lambda(A \cap C^c) = \infty$, pues en caso contrario $C \cup (A \cap C^c) \in \mathcal{C}$ y $\mu(C \cup (A \cap C^c)) > \mu(C) = s$, pues $s < \infty$, lo cual es absurdo. Y si $\mu(A \cap C^c) = 0$ entonces $\lambda(A \cap C^c) = 0$, así que en cualquier caso

$$\lambda(A \cap C^c) = \int_{A \cap C^c} \infty d\mu,$$

y por tanto si extendemos $g(x) = \infty$ para los $x \in C^c$, tendremos que

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

(b) Si μ es σ -finita y λ es una medida, podemos considerar $A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos, tales que $\cup A_n = \Omega$ y $\mu(A_n) < \infty$ y por el caso anterior existen $g_n: A_n \rightarrow [0, \infty]$ medibles, que extendemos a Ω con $g_n = 0$ en A_n^c , tales que para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A \cap A_n) = \int_{A \cap A_n} g_n d\mu = \int_{A_n} g_n d\mu,$$

por tanto el resultado se sigue para $g = \sum g_n$, pues

$$\lambda(A) = \sum \lambda(A \cap A_n) = \sum \int_{A_n} g_n d\mu = \int_A g d\mu.$$

(c) Por último consideremos que μ es σ -finita y λ es una carga, por tanto $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ donde una de ellas, digamos λ^- , es finita, entonces como $\lambda \ll \mu$, tendremos que $\lambda^+ \ll \mu$ y $\lambda^- \ll \mu$, por lo que aplicando

los casos anteriores existen g_1 medible y no negativa y g_2 medible, no negativa y finita, tales que

$$\lambda^+(A) = \int_A g_1 d\mu, \quad \lambda^-(A) = \int_A g_2 d\mu,$$

y por tanto para $g = g_1 - g_2$, $\lambda(A) = \int_A g d\mu$. ■

Teorema de Radon–Nikodym III 4.4.5 *Sea λ una medida compleja y μ una medida σ -finita en (Ω, \mathcal{A}) , tales que $\lambda \ll \mu$. Entonces existe una única c.s. (\mathcal{A}, μ) función medible integrable $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, tal que para cada $A \in \mathcal{A}$*

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

Demostración. La unicidad es simple como en los resultados anteriores.

Para λ real $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ siendo las dos medidas finitas y ambas $\lambda^\pm \ll \mu$ (hágase como ejercicio), por lo que aplicando el *Teorema de Radon–Nikodym I*, existen funciones medibles finitas no negativas g_1, g_2 y $g = g_1 - g_2$, tales que para cada A medible

$$\lambda(A) = \lambda^+(A) - \lambda^-(A) = \int_A g d\mu.$$

Para λ compleja $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, tenemos $\lambda_i \ll \mu$ (hágase como ejercicio), por lo que aplicando el caso real se tiene el resultado. ■

Nota 4.4.6 En estos resultados parece que no puede haber una función g determinada, pues en un conjunto de medida nula podemos modificarla y sigue siendo una función válida, sin embargo por una parte en la demostración del caso mas sencillo en el que λ y μ son positivas y finitas se construye una con procedimientos “naturales” y no es de extrañar que en situaciones suficientemente regulares haya una más “canónica” que las demás. En (5.2.8), pág.162, veremos que esto es así en \mathbb{R}^n .

Definición. Una función g como en los teoremas anteriores tal que para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

se llama *derivada de Radon–Nikodym de λ respecto de μ* y se denota $d\lambda/d\mu$, aunque $d\lambda/d\mu$ no es una función sino cualquiera que lo satisfaga, la cual es única c.s. (\mathcal{A}, μ) en dos casos: si μ es σ -finita ó si λ

es finita (es decir g es integrable). Si μ es la medida de Lebesgue, g se llama *función de densidad* de λ .

Con ayuda del siguiente resultado, que hemos visto para el caso de una carga en el ejercicio 4.2.6 —por tanto para el caso real—, veremos cómo están relacionadas una medida compleja y su variación en términos de la derivada de Radon–Nikodym.

Proposición 4.4.7 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, medible e integrable, entonces*

$$\lambda(A) = \int_A f \, d\mu \quad \Rightarrow \quad |\lambda|(A) = \int_A |f| \, d\mu.$$

Demostración. Consideremos la medida $\nu(A) = \int_A |f| \, d\mu$, para $A \in \mathcal{A}$, entonces como

$$|\lambda(A)| = \left| \int_A f \, d\mu \right| \leq \int_A |f| \, d\mu = \nu(A),$$

tendremos que $|\lambda|(A) \leq \nu(A)$. Veamos la otra desigualdad.

Sea $f = f_1 + if_2$ y consideremos sendas sucesiones de funciones simples $g_{1n} \rightarrow f_1$ y $g_{2n} \rightarrow f_2$, tales que $|g_{1n}| \leq |f_1|$ y $|g_{2n}| \leq |f_2|$. Consideremos ahora las funciones simples complejas

$$g_n = \frac{|g_{1n} + ig_{2n}| + I_{\{g_{1n} + ig_{2n} = 0\}}}{g_{1n} + ig_{2n} + I_{\{g_{1n} + ig_{2n} = 0\}}} \rightarrow \begin{cases} 1, & \text{si } f = 0, \\ \frac{|f|}{f}, & \text{si } f \neq 0, \end{cases}$$

por tanto $|g_n| = 1$, $f_n = fg_n \rightarrow |f|$, $|f_n| = |f|$ y $|f|$ integrable. Se sigue del *Teorema de la convergencia dominada*, (2.4.14) (ver página 86) que para cualquier A medible

$$\int_A f_n \, d\mu \rightarrow \int_A |f| \, d\mu,$$

y si $g_n = \sum_{j=1}^k a_{nj} I_{A_{nj}}$ entonces $|a_{nj}| = 1$ y

$$\begin{aligned} \left| \int_A f_n \, d\mu \right| &= \left| \int_A g_n f \, d\mu \right| = \left| \sum_{j=1}^k a_{nj} \int_{A \cap A_{nj}} f \, d\mu \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^k a_{nj} \lambda(A \cap A_{nj}) \right| \leq \sum_{j=1}^k |\lambda(A \cap A_{nj})| \leq |\lambda|(A). \end{aligned}$$

y tomando límites tendremos $\int_A |f| \, d\mu \leq |\lambda|(A)$. ■

Teorema de representación polar de una medida 4.4.8 *Sea λ una medida compleja en el espacio medible (Ω, \mathcal{A}) . Entonces existe una función $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ integrable, tal que $|h| = 1$ en Ω y $h = d\lambda/d|\lambda|$.*

Demostración. En primer lugar $|\lambda|$ es finita y $\lambda \ll |\lambda|$, pues $|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)$, por tanto se sigue de (4.4.5) que existe $f = d\lambda/d|\lambda|$ y por el resultado anterior, $|d\lambda/d|\lambda|| = d|\lambda|/d|\lambda| = 1$, es decir $|f| = 1$ c.s. $(\mathcal{A}, |\lambda|)$ y si consideramos el medible $A = \{|f| = 1\}$, tendremos que $|\lambda|(A^c) = 0$ y para $h = I_A f + I_{A^c} = d\lambda/d|\lambda|$, $|h| = 1$. ■

Definición. Diremos que una función medible $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es *integrable respecto de una medida compleja*

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = \lambda_1^+ - \lambda_1^- + i\lambda_2^+ - i\lambda_2^-,$$

si es integrable respecto de las medidas reales λ_i , es decir si lo es respecto de las medidas λ_i^\pm en cuyo caso definimos su integral como

$$\begin{aligned} \int f d\lambda &= \int f d\lambda_1 + i \int f d\lambda_2 \\ &= \int f d\lambda_1^+ - \int f d\lambda_1^- + i \int f d\lambda_2^+ - i \int f d\lambda_2^-. \end{aligned}$$

Si $f = f_1 + if_2: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es medible, diremos que es λ -integrable si lo son f_1 y f_2 , en cuyo caso definimos

$$\int f d\lambda = \int f_1 d\lambda + i \int f_2 d\lambda.$$

Proposición 4.4.9 *Sea $\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$, entonces $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible es λ -integrable si y sólo si es $|\lambda|$ -integrable y si consideramos la función $h = d\lambda/d|\lambda|$ del resultado anterior con $|h| = 1$, se tiene que*

$$\int f d\lambda = \int fh d|\lambda|.$$

Demostración. La equivalencia entre integraciones se sigue fácilmente de

$$\lambda_i^\pm \leq \lambda_i^+ + \lambda_i^- = |\lambda_i| \leq |\lambda| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| = \lambda_1^+ + \lambda_1^- + \lambda_2^+ + \lambda_2^-,$$

y del ejercicio (2.4.4), página 91.

La igualdad de integrales se demuestra para funciones indicador, simples y en general para funciones integrables utilizando la linealidad y el teorema de la convergencia dominada, pág.85. ■

Ejercicios

Ejercicio 4.4.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible no negativa. Si definimos la medida $\lambda(A) = \int_A f d\mu$, demostrar que para cada función medible g

$$\int g d\lambda = \int fg d\mu,$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

Ejercicio 4.4.2 Sean λ_1 , λ_2 y λ_3 medidas, λ_2 y λ_3 σ -finitas, en (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que si $\lambda_1 \ll \lambda_2$ y $\lambda_2 \ll \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \ll \lambda_3$ y además se tiene que

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_3} = \frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{d\lambda_3}.$$

Ejercicio 4.4.3 Sean μ y ν medidas σ -finitas, con $\nu \ll \mu$ y sea $\lambda = \mu + \nu$. Demostrar que $\nu \ll \lambda$ y si $f = d\nu/d\lambda$, entonces $0 \leq f < 1$ c.s. (μ) y que $d\nu/d\mu = f/(1-f)$.

Ejercicio 4.4.4 Sean λ y μ medidas σ -finitas en (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que son equivalentes las condiciones:

- (a) $\mu \ll \lambda$ y $\lambda \ll \mu$.
- (b) $\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\} = \{A \in \mathcal{A} : \lambda(A) = 0\}$.
- (c) Existe una función medible $g: \Omega \rightarrow (0, \infty)$, tal que $\lambda(A) = \int_A g d\mu$.

Ejercicio 4.4.5 Demostrar que si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ -finita, existe una medida finita λ , que tiene los mismos conjuntos nulos que μ .

Ejercicio 4.4.6 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ integrable. Demostrar que si S es un cerrado de \mathbb{C} , tal que para cada $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) > 0$, se tiene

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$$

entonces $f(x) \in S$ c.s.

Ejercicio 4.4.7 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Demostrar que

$$\{\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \lambda \ll \mu\},$$

es un subespacio vectorial cerrado del espacio de Banach $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$.

Ejercicio 4.4.8 Sean $\nu_1 \ll \mu_1$ en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $\nu_2 \ll \mu_2$ en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, medidas σ -finitas. Demostrar que $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ y que

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y).$$

Ejercicio 4.4.9 Sea f medible compleja integrable respecto de una medida compleja λ , demostrar que

$$\left| \int f d\lambda \right| \leq \int |f| d|\lambda|.$$

4.5 Singularidad

En esta lección consideraremos otra propiedad de las medidas que en cierto modo es opuesta a la de la absoluta continuidad.

Definición. Sea λ una medida arbitraria (medida positiva, carga ó medida compleja) en (Ω, \mathcal{A}) y $A \in \mathcal{A}$. Diremos que λ *está concentrada en* A si $\lambda(E) = 0$ para cualquier $E \in \mathcal{A}$ tal que $E \subset A^c$.

Nota 4.5.1 Que λ esté concentrada en A equivale a que para cada $E \in \mathcal{A}$, $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$. Observemos que en el caso de que sea una medida

$$\lambda \text{ está concentrada en } A \iff \lambda(A^c) = 0.$$

Definición. Diremos que λ_1 y λ_2 medidas arbitrarias en (Ω, \mathcal{A}) *son singulares* y lo denotaremos $\lambda_1 \perp \lambda_2$, si existen $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos tales que λ_1 está concentrada en A y λ_2 en B .

Ejemplo 4.5.2 Si $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ es la descomposición de Jordan de una carga λ , entonces $\lambda^+ \perp \lambda^-$, pues si P, N es una descomposición de Hahn, $\lambda^+(A) = \lambda(A \cap P)$ y $\lambda^-(A) = -\lambda(A \cap N)$, por tanto λ^+ está concentrada en P y λ^- en N .

Veamos unas cuantas propiedades elementales de la singularidad y su relación con la absoluta continuidad.

Proposición 4.5.3 Sean λ , λ_1 y λ_2 cargas ó medidas complejas en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Entonces:

(a) λ está concentrada en $A \in \mathcal{A}$ si y sólo si $|\lambda|$ está concentrada en $A \in \mathcal{A}$.

(b) $\lambda_1 \perp \lambda_2$ si y sólo si $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.

(c) Si $\lambda_1 \perp \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.

(d) Si $\lambda_1 \ll \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$, entonces $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(e) $\lambda \perp \lambda$ si y sólo si $\lambda = 0$.

(f) Si $\lambda \ll \mu$ y $\lambda \perp \mu$, entonces $\lambda = 0$.

Demostración. (a) \Rightarrow Si $\lambda(B) = 0$ para todo $B \subset A^c$

$$|\lambda|(A^c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda(A_i)| : A_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup A_i = A^c \right\} = 0.$$

\Leftarrow se sigue de que $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$.

(b) Es consecuencia de (a).

(c) Existen conjuntos disjuntos $A_1, B_1 \in \mathcal{A}$ tales que λ_1 está concentrada en A_1 y μ en B_1 y conjuntos disjuntos $A_2, B_2 \in \mathcal{A}$ tales que λ_2 está concentrada en A_2 y μ en B_2 , por tanto $\lambda_1 + \lambda_2$ está concentrada en $A = A_1 \cup A_2$ y μ en $B = B_1 \cap B_2$ siendo $A \cap B = \emptyset$.

(d) Como $\lambda_2 \perp \mu$ existen A y B medibles disjuntos tales que λ_2 está concentrada en A y μ en B , pero entonces para todo E medible $\mu(E \cap A) = 0$, por tanto $\lambda_1(E \cap A) = 0$ y λ_1 está concentrada en A^c y $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(e) λ está concentrada en A y en B medibles disjuntos, por tanto para todo E medible

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A) = \lambda(E \cap A \cap B) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

(f) Es una simple consecuencia de (d) y (e). ■

En el *Teorema de descomposición de Jordan* hemos visto cómo toda carga puede ponerse como diferencia de dos medidas positivas. Ahora veremos cómo la absoluta continuidad y la singularidad son propiedades en base a las cuales podemos realizar otro tipo de descomposición de una medida dada.

Teorema de descomposición de Lebesgue 4.5.4 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y λ una medida σ -finita ó compleja, entonces existen únicas medidas λ_a y λ_s , tales que

$$\lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu \quad \text{y} \quad \lambda = \lambda_a + \lambda_s.$$

Demostración. Veamos en primer lugar la unicidad: supongamos que existen dos descomposiciones

$$\lambda_a + \lambda_s = \lambda = \nu_a + \nu_s,$$

con λ_s y μ concentradas en A y A^c respectivamente y ν_s y μ en B y B^c , de este modo μ está concentrada en $A^c \cap B^c$ y λ_s y ν_s en $A \cup B$, por lo tanto

$$\begin{aligned} E \subset A \cup B &\Rightarrow \mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda_a(E) = \nu_a(E) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_s(E) = \nu_s(E) \\ E \subset A^c \cap B^c &\Rightarrow \lambda_s(E) = \nu_s(E) = 0 \Rightarrow \lambda_a(E) = \nu_a(E), \end{aligned}$$

y por aditividad se sigue la unicidad. Para la existencia consideremos primero el caso en que λ es una medida finita y sea $\mathcal{N}_\mu = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\}$, ahora consideremos una sucesión $A_n \in \mathcal{N}_\mu$ tal que

$$\lambda(A_n) \uparrow s = \sup\{\lambda(A) : A \in \mathcal{N}_\mu\},$$

por tanto para $N = \cup A_n \in \mathcal{N}_\mu$, pues $\mu(N) = 0$, y como $\lambda(A_n) \leq \lambda(N) \leq s$, tendremos que $\lambda(N) = s$ y para las medidas finitas

$$\lambda_a(A) = \lambda(A \cap N^c), \quad \lambda_s(A) = \lambda(A \cap N),$$

es $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_s \perp \mu$ y $\lambda_a \ll \mu$, pues si para un B fuese $\mu(B) = 0$ y $\lambda_a(B) = \lambda(B \cap N^c) > 0$, llegaríamos a un absurdo, pues $\mu(B \cap N^c) = 0$ y por tanto $N \cup (B \cap N^c) \in \mathcal{N}_\mu$ y como λ es finita

$$\lambda(N \cup (B \cap N^c)) > \lambda(N) = s.$$

Si λ es una medida σ -finita consideramos una partición $A_n \in \mathcal{A}$ de Ω , con $\lambda(A_n) < \infty$ y aplicamos el resultado anterior a cada espacio de medida $(A_n, \mathcal{A}|_{A_n}, \lambda|_{A_n})$ y sean $N_n \subset A_n$ los conjuntos con $\mu(N_n) = 0$ correspondientes. Ahora para $N = \cup N_n$, tendremos que $\mu(N) = 0$ y las medidas correspondientes

$$\lambda_a(A) = \lambda(A \cap N^c), \quad \lambda_s(A) = \lambda(A \cap N),$$

forman una descomposición de Lebesgue de λ , pues $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_s \perp \mu$ y $\lambda_a \ll \mu$, pues si para un B fuese $\mu(B) = 0$, tendríamos $\mu(A_n \cap B) = 0$ y por tanto $\lambda(A_n \cap B \cap N_n^c) = 0$, de donde $\lambda(A_n \cap B \cap N^c) = 0$ y para la unión $\lambda_a(B) = \lambda(B \cap N^c) = 0$.

Para λ compleja consideramos la medida finita $|\lambda|$ y el conjunto N correspondiente, entonces

$$\lambda_a(A) = \lambda(A \cap N^c), \quad \lambda_s(A) = \lambda(A \cap N),$$

forman una descomposición de Lebesgue de λ , pues $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_s \perp \mu$ pues $\mu(N) = 0$ y $\lambda_a \ll \mu$, pues si para un B medible fuese $\mu(B) = 0$, tendríamos $|\lambda|(B \cap N^c) = 0$, pues $|\lambda|_a \ll \mu$ y

$$|\lambda_a(B)| = |\lambda(B \cap N^c)| \leq |\lambda|(B \cap N^c) = 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicios

Ejercicio 4.5.1 Demostrar que si λ_1 y λ_2 son complejas y $\lambda_1 \perp \lambda_2$, entonces $|\lambda_1 + \lambda_2| = |\lambda_1| + |\lambda_2|$.

4.6 Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.

COHN, D.L.: “*Measure theory*”. Birkhauser (Boston), 1980.

DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “*Linear operators, Vol.I*”. John Wiley–Interscience Pub., 1958.

FOLLAND, G.B.: “*Real Analysis. Modern Techniques and their applications*”, John Wiley, 1984.

MUKHERJEA, A. AND POTHOVEN, K.: “*Real and functional Analysis*”. Plenum Press, 1978.

MUNROE, M.E.: “*Measure and integration*”. Addison Wesley, 1971.

RUDIN, W.: “*Real and complex analysis*”. Tata McGraw-Hill, 1974.

YOSIDA, K.: “*Functional Analysis*”. Springer-Verlag, 1974.

Como bibliografía complementaria podemos considerar los siguientes libros:

HEWITT, E. AND STROMBERG, K.: “*Real and abstract analysis*”. Springer-Verlag, 1965.

WHEEDEN, R.L. AND ZYGMUND, A.: “*Measure and integral. An introduction to Real Analysis*”. Marcel Dekker, Inc. 1977.

ZAANEN, A.C.: “*Integration*”. North-Holland, 1967.

La descomposición de JORDAN de una medida está íntimamente relacionada con la descomposición de una función de variación acotada, como diferencia de funciones crecientes, que veremos en el siguiente capítulo.

En cuanto al *Teorema de Radon-Nikodym*, nace con el análisis que hace LEBESGUE del *Teorema fundamental del cálculo* (al que dedicaremos el siguiente capítulo), en cuyo libro

LEBESGUE, H.: “*Leçons sur l'intégration*” (1a.edición 1903, 2a.edición 1928). Reimp. de 2a. ed. por Chelsea Pub. Comp., 1973.

da una condición necesaria y suficiente, para que una función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se exprese como una integral indefinida. Al año siguiente VITALI

VITALI, G.: “*Sulle funzioni integrali*”. Atti. Acc. Sci. Torino, 40, pp.1021–1034. Año 1904–1905.

caracteriza tales funciones como las absolutamente continuas (ver pág.164). Los resultados de estos dos autores fueron extendidos en 1913 por

RADON, J.: “*Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunctionen*”. S.B. Akad. Wiss. Wien, 122, 1295–1438, 1913.

para una medida de Borel en un espacio euclídeo. Y en 1929–30 por

NIKODYM, O.M.: “*Sur les fonctions d'ensembles*”. Comp. Rend. I Cong. Math. Pays Slaves, Warsaw, 303–313, 1929.

NIKODYM, O.M.: “*Sur une generalisation des integrales de M.J.Radon*”. Fund. Math. 15, 131–179, 1930.

Por otra parte en 1939

BOCHNER, S.: “*Additive set functions on groups*”. Ann. Math., 2, 40, 769–799, 1939.

prueba una versión del teorema para el caso en que λ y μ son aditivas. Su prueba original utiliza la versión numerablemente aditiva, así como el *Teorema de Lebesgue* sobre diferenciación de funciones monótonas. Su enunciado es el siguiente:

Teorema 4.6.1 Sea \mathcal{A} un álgebra en Ω y λ y μ medidas complejas aditivas tales que:

(a) $\sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A}\} < \infty$.

(b) Para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|\mu(A)| < \delta$, entonces $|\lambda(A)| < \epsilon$.

Entonces existe una sucesión de funciones simples s_n , tal que para $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \lim \int_A s_n d\mu.$$

En 1940 VON NEUMANN demuestra el *Teorema de Radon–Nikodym* NEUMANN, J. VON,: “On rings of operators III”. Ann.Math.2, 41, 94-161, 1940.

para $\lambda \ll \mu$ donde λ y μ son medidas acotadas, utilizando exclusivamente el hecho de que $L^2(\Omega, \lambda + \mu) = L^2(\Omega, \lambda + \mu)^*$.

Remitimos al lector interesado en una versión distinta del *Teorema de Radon–Nikodym*, a la p.318 del HEWITT–STROMBERG.

Por último, el *Teorema de Radon–Nikodym* es una de las herramientas fundamentales en la teoría de las medidas vectoriales y con él se introduce un punto de vista para el estudio y clasificación de los espacios de Banach. A este respecto recomendamos el DUNFORD–SCHWARTZ y el más reciente

DIESTEL–UHL: “Vector measures”, AMS, 15, 1977.

Por último queremos destacar la profunda relación existente entre la derivada de Radon–Nikodym y dos conceptos en principio sin conexión aparente: El de *esperanza condicionada* (estadística) y el de *proyección* (espacios de Hilbert). De esto hablaremos en capítulos posteriores.

Fin del Tema IV

Capítulo 5

Diferenciación

5.1 Introducción

El *Teorema fundamental del cálculo* de la teoría clásica de Riemann asegura que:

- (a) Si f es Riemann integrable en $[a, b]$ y

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

entonces F es continua en $[a, b]$. Si f es continua en un $x \in [a, b]$, entonces F es diferenciable en x y $F'(x) = f(x)$.

- (b) Si F es diferenciable en $[a, b]$ y F' es Riemann integrable en $[a, b]$, entonces

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt.$$

En este tema estudiaremos los resultados correspondientes a la teoría de Lebesgue, para la que se tiene:

- (c) Si f es Lebesgue integrable en $[a, b]$ y

$$F(x) = \int_a^x f(t)dm$$

entonces F es absolutamente continua en $[a, b]$ y por tanto continua (esto ya lo sabíamos, ver el ejercicio (2.4.21), página 92). Si f es continua en un $x \in [a, b]$, entonces F es diferenciable en x y $F'(x) = f(x)$, pues dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|t - x| \leq \delta$ entonces $|f(x) - f(t)| \leq \epsilon$, pero entonces para $0 \leq r \leq \delta$

$$\left| \frac{F(x+r) - F(x)}{r} - f(x) \right| \leq \frac{1}{r} \int_x^{x+r} |f - f(x)| dm \leq \epsilon.$$

Pero veremos más, aunque f no sea continua tendremos que $F' = f$ c.s. Recíprocamente veremos que si F es absolutamente continua en $[a, b]$, entonces es de la forma

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dm,$$

donde f es Lebesgue integrable y $f = F'$ c.s..

5.2 Diferenciación de medidas

En esta lección consideramos el espacio $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m)$, con m la medida de Lebesgue.

Lema 5.2.1 *Sea \mathcal{C} una colección de bolas abiertas de \mathbb{R}^n y sea U su unión, entonces para cada $r < m(U)$, existe un número finito de esas bolas $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{C}$ disjuntas y tales que $r3^{-n} < \sum_{i=1}^m m(B_i)$.*

Demostración. Por ser regular la medida de Lebesgue (ver (1.6.23), página 46), existe un compacto $K \subset U$, con $r < m(K)$ y como las bolas de \mathcal{C} lo recubren podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{A_i\}_{i=1}^k$. Ahora elegimos B_1 como la bola A_i de radio mayor, B_2 la de radio mayor entre las que no cortan a B_1 y así sucesivamente hasta la última B_m . De este modo para cualquier A_i hay una B_j a la que corta y tiene radio mayor o igual que el de A_i , por lo tanto si denotamos con B'_j la bola con igual centro que B_j y radio triple, tendremos que $K \subset \cup A_i \subset \cup B'_i$ y por tanto

$$r < m(K) \leq \sum_{i=1}^m m(\cup B'_i) = 3^n \sum_{i=1}^m m(\cup B_i).$$

Definición. Denotaremos con \mathcal{L}_{1loc} el espacio de las funciones medibles $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ integrables en cada compacto, a las que llamaremos *localmente integrables* y si $f \in \mathcal{L}_{1loc}$ definimos el *valor promedio de f en cada bola $B(x, r)$* como

$$P_f(x, r) = \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f \, dm.$$

Lema 5.2.2 *Para cada $f \in \mathcal{L}_{1loc}$, la función $P_f(x, r)$ es continua en r para cada x y medible en x para cada r .*

Demostración. Por una parte $m(B(x, r)) = r^n m(B)$, para B la bola unidad, por tanto basta demostrar que $g(r) = \int_{B(x, r)} f \, dm$ es continua en r , ahora bien para las coronas $B(\epsilon) = B(x, r + \epsilon) \setminus B(x, r)$ $I_{B(\epsilon)} \rightarrow 0$ c.s., pues converge a 0 salvo en $S(x, r)$, que es nulo pues para todo $k > 0$, $m[S(x, r)] \leq m[B(x, r + 1/k)] - m[B(x, r)]$; ahora por el teorema de la convergencia dominada, ó mejor por su consecuencia (2.4.20)

$$|g(r + \epsilon) - g(r)| \leq \int |I_{B(\epsilon)} f| \, dm \rightarrow 0, \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

Por otro lado

$$P_f(x, r) = \frac{1}{r^n m(B)} \int I_{B(x, r)} f \, dm = \int g_x \, dm,$$

para $g_x(y) = g(x, y) = I_{\{\|x-y\| < r\}} f(y) / r^n m(B)$, siendo g medible en \mathbb{R}^{2n} y cada g_x integrable, entonces por (2.2.7) existe una sucesión de funciones simples g_n , tales que $|g_n| \leq |g|$ y $g_n \rightarrow g$, por tanto cada $g_n = \sum a_i I_{A_i}$ y su sección por x $g_{nx} = \sum a_i I_{A_{ix}}$ es medible (ver (3.2.3)) y su integral $h_n(x) = \int g_{nx} = \sum a_i m[A_{ix}]$ es medible (ver (3.3.6)) y podemos aplicar el TCD, pues $|g_{nx}| \leq |g_x|$ y $g_{nx} \rightarrow g_x$, por tanto

$$h_n(x) = \int g_{nx} \rightarrow \int g_x = P_f(x, r),$$

y para cada r , $P_f(x, r)$ es medible en x por ser límite de medibles. ■

Definición. Para cada $f \in \mathcal{L}_{1loc}$ definimos su *función maximal de Hardy–Littlewood*

$$Hf(x) = \sup_{r>0} P_{|f|}(x, r) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f| \, dm.$$

Proposición 5.2.3 *Hf es medible.*

Demostración. Por el Lema para cada x $P_{|f|}(x, r)$ es continua en r , por tanto $\sup_{r>0} P_{|f|}(x, r) = \sup_{r>0, r \in \mathbb{Q}} P_{|f|}(x, r)$, y como ahora la familia es numerable y las funciones son medibles, Hf es medible. ■

Teorema maximal 5.2.4 *Para toda $f \in \mathcal{L}_1$ y todo $\alpha > 0$*

$$m\{Hf > \alpha\} \leq \frac{3^n}{\alpha} \int |f| dm.$$

Demostración. Para cada $x \in E_\alpha = \{Hf > \alpha\}$, existe $r_x > 0$ tal que $P_{|f|}(x, r_x) > \alpha$, entonces como $B = \cup B(x, r_x)$ contiene a E_α , si $c < m(E_\alpha)$ entonces $c < m(B)$ y tendremos por (5.2.1) que existe un subrecubrimiento finito y disjunto, B_1, \dots, B_n , de estas bolas tal que

$$c < 3^n \sum_{i=1}^n m(B_i) \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_{i=1}^n \int_{B_i} |f| dm \leq \frac{3^n}{\alpha} \int |f| dm,$$

ahora basta hacer $c \uparrow m(E_\alpha)$. ■

Estos resultados nos permiten estudiar teoremas fundamentales de diferenciación en el sentido de que nos dan información sobre el comportamiento límite de cocientes incrementales.

Teorema 5.2.5 *Sea $f \in \mathcal{L}_{1loc}$, entonces $\lim_{r \rightarrow 0} P_f(x, r) = f(x)$ c.s.*

Demostración. Basta demostrar el resultado en cada conjunto acotado $\{\|x\| \leq N\}$ y como para cada x de este conjunto vamos a integrar f en $B(x, r)$ con r pequeño, por tanto para $r < 1$ sólo evaluaremos f en puntos de $\{\|y\| \leq N + 1\}$, podemos considerar que f se anula fuera de esa bola y por tanto que es integrable. Ahora bien, veremos en (7.2.7), página 246, que las funciones $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, continuas de soporte compacto (por tanto integrables) son densas en las integrables por lo que dado $\epsilon > 0$ existe una función continua e integrable g tal que $\int |f - g| \leq \epsilon y$ como por continuidad

$$\begin{aligned} |P_g(x, r) - g(x)| &= \frac{1}{m(B(x, r))} \left| \int_{m(B(x, r))} g(y) - g(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{m(B(x, r))} |g(y) - g(x)| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

tendremos que

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow 0} |P_f(x, r) - f(x)| &= \\ &= \limsup_{r \rightarrow 0} |P_{f-g}(x, r) + P_g(x, r) - g(x) + (g - f)(x)| \\ &\leq H(f - g)(x) + |f - g|(x). \end{aligned}$$

y si llamamos

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{x : \limsup_{r \rightarrow 0} |P_f(x, r) - f(x)| > \alpha\}, \\ B_\alpha &= \{|f - g| > \alpha\}, \quad C_\alpha = \{Hf - g > \alpha\} \end{aligned}$$

entonces $A_\alpha \subset B_{\alpha/2} \cup C_{\alpha/2}$, y como $\alpha m(B_\alpha) \leq \int_{B_\alpha} |f - g| \leq \epsilon$, tendremos por el Teorema de maximalidad que

$$m(A_\alpha) \leq \frac{2\epsilon}{\alpha} + \frac{2\epsilon 3^n}{\alpha},$$

por tanto $m(A_\alpha) = 0$. ■

Lo que acabamos de demostrar equivale a decir que

$$\frac{1}{m[C]} \int_C [f - f(x)] dm \rightarrow 0, \quad \text{si } C = B(x, r) \text{ y } r \rightarrow 0,$$

lo cual implica que el promedio de $f - f(x)$ en cada bola C es pequeño cuando r se hace pequeño. Cabría pensar que esto es debido a un efecto de cancelación de signos, pero no es así pues se tiene el siguiente resultado más fuerte.

Teorema 5.2.6 *Sea $f \in \mathcal{L}_{1loc}$, entonces para $x \in \mathbb{R}^n$ c.s. se tiene*

$$\frac{1}{m[B(x, r)]} \int_{B(x, r)} |f - f(x)| dm \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0,$$

Demostración. Sea $D \subset \mathbb{C}$ denso y numerable y para cada $z \in D$ apliquemos el teorema anterior a $|f - z|$, entonces existe un Lebesgue medible nulo E_z fuera del cual

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m[B(x, r)]} \int_{B(x, r)} |f(y) - z| dm = |f(x) - z|,$$

y para cada x fuera de $E = \cup E_z$ y $\epsilon > 0$ existe un $z \in D$, tal que $|f(x) - z| < \epsilon$, por tanto $|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - z| + \epsilon$ y como $x \notin E_z$

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m[B(x, r)]} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dm = |f(x) - z| + \epsilon < 2\epsilon,$$

y el resultado se sigue. ■

Finalmente daremos el resultado más general, en el que en lugar de bolas centradas en x en las que integramos nuestra función, consideramos otro tipo de conjuntos que ni siquiera tienen que contener al punto x .

Definición. Diremos que una familia de medibles $E_r \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (para $r > 0$) *encoge suavemente hacia x* si existe una constante $\alpha > 0$ tal que: (i) Cada $E_r \subset B(x, r)$, (ii) $\alpha m(B(x, r)) \leq m(E_r)$.

Teorema de diferenciación de Lebesgue 5.2.7 *Sea $f \in \mathcal{L}_{1loc}$, entonces para $x \in \mathbb{R}^n$ c.s. y $E_r \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ una familia que encoge suavemente hacia x , se tiene*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m[E_r]} \int_{E_r} |f - f(x)| dm = 0.$$

En particular si f es real y tiene integral (ó es compleja y es integrable) y definimos la carga finita en los compactos (ó medida compleja) $\lambda(E) = \int_E f dm$, entonces $\lim \lambda(E_r)/m[E_r] = f(x)$.

Demostración. Por definición existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{m[E_r]} \int_{E_r} |f - f(x)| dm &\leq \frac{1}{m[E_r]} \int_{B(x, r)} |f - f(x)| dm \\ &\leq \frac{1}{\alpha m[B(x, r)]} \int_{B(x, r)} |f - f(x)| dm, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue del teorema anterior. ■

Teorema 5.2.8 *Sea μ una carga, finita en los compactos, ó una medida real o compleja. Entonces c.s. existe*

$$D\mu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(E_r)}{m(E_r)},$$

(para E_r encogiéndose suavemente a x) y $D\mu = d\mu_a/dm$, para $\mu = \mu_a + \mu_s$ la descomposición de Lebesgue.

Demostración. Para μ_a se sigue del resultado anterior, por tanto basta demostrar que $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_s(E_r)}{m(E_r)} = 0$ c.s., para lo cual basta considerar $E_r = B(x, r)$ y que $\mu_s = \lambda$ es positiva, finita en los acotados y singular $\lambda \perp m$, pues

$$\left| \frac{\mu_s(E_r)}{m(E_r)} \right| \leq \frac{|\mu_s|(E_r)}{m(E_r)} \leq \frac{|\mu_s|(B(x, r))}{\alpha m(B(x, r))}.$$

Sea A un boreliano tal que $\lambda(A) = m(A^c) = 0$, definamos para $k \in \mathbb{N}$

$$A_k = \{x \in A : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(B(x, r))}{m(B(x, r))} > \frac{1}{k}\},$$

y veamos que $m(A_k) = 0$. Por ser λ finita en los acotados es regular (ver (1.6.23), página 46), por tanto como $\lambda(A) = 0$, para cada $\epsilon > 0$ existe un abierto $U_\epsilon \supset A$, tal que $\lambda(U_\epsilon) < \epsilon$. Por definición de A_k , para cada $x \in A_k$ existe una bola abierta B_x , centrada en x tal que $B_x \subset U_\epsilon$ y $\lambda(B_x) > m(B_x)/k$. Sea $V_\epsilon = \cup B_x$ y $c < m(V_\epsilon)$, entonces por el Lema 5.2.1, hay una colección finita y disjunta de estas bolas B_1, \dots, B_m , tales que

$$c < 3^n \sum_{i=1}^m m(B_i) \leq 3^n k \sum_{i=1}^m \lambda(B_i) \leq 3^n k \lambda(V_\epsilon) \leq 3^n k \lambda(U_\epsilon) \leq 3^n k \epsilon,$$

por tanto $m(V_\epsilon) \leq 3^n k \epsilon$ y como $A_k \subset V_\epsilon$, $m(A_k) = 0$. ■

5.3 Derivación e integración

En esta lección estudiaremos el *Teorema fundamental del cálculo* en el contexto de la integración de Lebesgue. Para ello utilizaremos dos propiedades fundamentales de las funciones reales, directamente relacionadas con este problema, la variación acotada y la absoluta continuidad.

5.3.1 Funciones de variación acotada.

Definición. Dada una función $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}), llamamos *variación de F en un intervalo $J \subset I$* a

$$v_F\{J\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |F(t_i) - F(t_{i-1})| : t_0 \leq \dots \leq t_n \in J\right\},$$

y diremos que F es de *variación acotada en J* si $v_F\{J\} < \infty$ y de *variación acotada* si $v_F\{I\} < \infty$.

Para $I = \mathbb{R}$, llamamos *variación de F* a la función creciente $v_F(x) = v_F\{(-\infty, x]\}$ (y para $I = [a, b]$, $v_F(x) = v_F\{[a, x]\}$). Diremos que F *se anula en $-\infty$* si $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ y denotaremos con $\mathcal{V}_0(\mathbb{R})$ el \mathbb{K} -espacio vectorial de las funciones $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ de variación acotada que se anulan en $-\infty$ y son continuas a la derecha.

Nota 5.3.1 Observemos que si F es de variación acotada en un intervalo $[a, b]$, entonces se puede extender con $F(x) = F(a)$ para $x < a$ y $F(x) = F(b)$ para $x > b$ a una F de variación acotada en todo \mathbb{R} ; y recíprocamente si F es de variación acotada en \mathbb{R} , su restricción a cada intervalo $[a, b]$ es de variación acotada en $[a, b]$.

Definición. Diremos que $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ es *absolutamente continua* (para $I = \mathbb{R}$ ó $I = [a, b]$) si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si

$$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n),$$

son intervalos disjuntos de I para los que $\sum(b_i - a_i) \leq \delta$, entonces

$$\sum |F(b_i) - F(a_i)| \leq \epsilon.$$

Nota 5.3.2 Se demuestra fácilmente que si $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua, entonces es uniformemente continua, sin embargo hay funciones uniformemente continuas, incluso de variación acotada, que no son absolutamente continuas. Por otra parte si F es diferenciable y su derivada es acotada, entonces como una simple consecuencia del teorema del valor medio, F es absolutamente continua.

Veremos en 5.3.11 que una función absolutamente continua es de variación acotada en cada intervalo compacto, sin embargo no lo es necesariamente en \mathbb{R} , como por ejemplo para $F(x) = x$.

Nota 5.3.3 Es inmediato probar que si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son de variación acotada también $f + g$ y $f - g$, pues $v_{f \pm g} \leq v_f + v_g$. También es fácil ver que si f es monótona y acotada, entonces es de variación acotada, de hecho $v_f(x) = f(x) - f(-\infty)$ y por lo anterior también es de variación acotada la diferencia de dos de este tipo. El siguiente resultado prueba el recíproco de esto.

Lema 5.3.4 Si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de variación acotada $v_F + F$ y $v_F - F$ son acotadas y crecientes y por tanto existen funciones f y g acotadas y crecientes, por ejemplo $f = (v_F + F)/2$ y $g = (v_F - F)/2$, tales que $F = f - g$.

Demostración. En primer lugar F es acotada, pues para $x < y$

$$|F(y) - F(x)| \leq |F(y) - F(x)| + v_F(x) \leq v_F(y) \leq v_F(\infty) < \infty,$$

por tanto $v_F + F$ es acotada. Ahora como $-F$ también es de variación acotada, basta ver que $v_F + F$ es creciente. Sea $x < y$ y $\epsilon > 0$, entonces existen $x_0 < \dots < x_n = x$, tales que

$$v_F(x) - \epsilon \leq \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})|,$$

y como $|F(y) - F(x)| + F(y) - F(x) \geq 0$, tendremos que

$$\begin{aligned} v_F(y) + F(y) &\geq \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| + |F(y) - F(x)| + F(y) \\ &\geq v_F(x) + F(x) - \epsilon, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue. ■

Proposición 5.3.5 Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ de variación acotada, entonces:

(a) v_F es creciente y se anula en $-\infty$.

(b) Si F es continua a la derecha, entonces v_F también, por tanto es una función de distribución y $v_F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$.

Demostración. (a) De la definición se sigue que si $J_1 \subset J_2$, entonces $v_F\{J_1\} \leq v_F\{J_2\}$, en particular si $x < y$

$$0 \leq v_F(x) = v_F\{(-\infty, x]\} \leq v_F\{(-\infty, y]\} = v_F(y).$$

Ahora dado $\epsilon > 0$ y un $x \in \mathbb{R}$, existen $x_0 < \dots < x_n = x$, tales que

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| > v_F(x) - \epsilon,$$

como por otra parte para $t < x_0$,

$$v_F(t) + \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq v_F(x),$$

tendremos que para $t < x_0$, $v_F(t) < \epsilon$, por tanto $\lim_{x \rightarrow -\infty} v_F(x) = 0$.

(b) Sea $x_n \downarrow x$ y $\epsilon > 0$. Por la continuidad existe un $\delta > 0$, tal que si $0 < t - x < \delta$, $|F(t) - F(x)| \leq \epsilon$, por otra parte como antes, dado $y > x$ existen $t_0 < \dots < t_m = y$, tales que

$$v_F(y) - \epsilon < \sum_{i=1}^m |F(t_i) - F(t_{i-1})|,$$

y sin pérdida de generalidad podemos suponer que uno de los puntos de la partición es $t_k = x$ y que $t_{k+1} - x < \delta$ (para ello si es necesario metemos dos puntos más, con lo que la expresión de la derecha aumenta), por tanto

$$\begin{aligned} v_F(y) &< \sum_{i=1}^k |F(t_i) - F(t_{i-1})| + 2\epsilon + \sum_{i=k+2}^m |F(t_i) - F(t_{i-1})| \\ &\leq v_F(x) + 2\epsilon + v_F(y) - v_F(t_{k+1}) \quad \Rightarrow \\ v_F(t_{k+1}) &\leq v_F(x) + 2\epsilon, \end{aligned}$$

y para los $x_n < t_{k+1}$, tendremos por ser v_F monótona creciente que

$$v_F(x) \leq v_F(x_n) \leq v_F(t_{k+1}) \leq v_F(x) + 2\epsilon,$$

y el resultado se sigue. ■

Proposición 5.3.6 (a) $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ es de variación acotada si y sólo si lo son $\operatorname{Re}(F)$ e $\operatorname{Im}(F)$.

(b) $F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$ si y sólo si $F_1 = \operatorname{Re}(F)$, $F_2 = \operatorname{Im}(F) \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$ si y sólo si existen f_1, g_1, f_2, g_2 funciones de distribución acotadas que se anulan en $-\infty$ y tales que $F_1 = f_1 - g_1$, $F_2 = f_2 - g_2$.

Demostración. (a) es obvia. (b) se sigue de (a) y de que F se anula en $-\infty$ si y sólo si lo hacen F_1 y F_2 y F es continua a la derecha si y sólo si lo son F_1 y F_2 y lo último se sigue del Lema (5.3.4) y (5.3.5). ■

5.3.2 Medidas y funciones de variación acotada.

Veamos ahora que hay una biyección entre $\mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{K})$ y $\mathcal{V}_0(\mathbb{R})$, similar a la que vimos en la página 31 del tema I, entre las medidas (positivas) de Lebesgue–Stieltjes y las funciones de distribución.

Teorema 5.3.7 *La igualdad $F(x) = \mu(-\infty, x]$ define una biyección*

$$\phi: \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{K}) \rightarrow F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R}),$$

en el sentido de que dada la $F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$, existe una única $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{K})$, tal que $F(x) = \mu(-\infty, x]$. Además es un isomorfismo de espacios vectoriales y si $F = \phi(\mu)$, $v_F = \phi(|\mu|)$, por tanto para la norma $\|F\| = v_F(\mathbb{R})$, el isomorfismo es entre espacios normados.

Demostración. Si μ es compleja y $\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i\mu_2^+ - i\mu_2^-$, es su descomposición de Jordán, con las μ_i^\pm medidas finitas, que definen las funciones de distribución acotadas $F_i^\pm(x) = \mu_i^\pm(-\infty, x]$, entonces

$$F = F_1^+ - F_1^- + iF_2^+ - iF_2^-,$$

y por el Lema (5.3.6), $F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$. Recíprocamente sea $F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$ y $F = F_1 + iF_2$, entonces por (5.3.6), $F_1, F_2 \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$ y por 5.3.5, $v_{F_i} \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$, por tanto $f_i = (v_{F_i} + F_i)/2$ y $g_i = (v_{F_i} - F_i)/2$ son funciones de distribución que se anulan en $-\infty$ y definen medidas únicas tales que

$$\begin{aligned} \mu_1(-\infty, x] &= f_1(x), & \mu_2(-\infty, x] &= f_2(x), \\ \mu_3(-\infty, x] &= g_1(x), & \mu_4(-\infty, x] &= g_2(x), \end{aligned}$$

para las que

$$\mu = \mu_1 - \mu_3 + i\mu_2 - i\mu_4,$$

es una medida compleja que verifica el enunciado. Que es isomorfismo es obvio y si μ y F se corresponden, entonces por (5.3.5) $v_F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$ y para la medida μ_{v_F} que le corresponde por ϕ , como $|F(y) - F(x)| + v_F(x) \leq v_F(y)$, tendremos que

$$|\mu(x, y)| = |F(y) - F(x)| \leq v_F(y) - v_F(x) = \mu_{v_F}(x, y),$$

y tomando límites $x \rightarrow -\infty$ ($y \rightarrow \infty$), también

$$|\mu(-\infty, y)| \leq \mu_{v_F}(-\infty, y], \quad |\mu(x, \infty)| \leq \mu_{v_F}(x, \infty),$$

y tenemos la desigualdad $|\mu(A)| \leq \mu_{v_F}(A)$, para $A \in \mathcal{A}_0$ el álgebra de las uniones finitas y disjuntas de semiintervalos. Ahora bien si consideramos la clase de los borelianos que tienen esa propiedad, vemos que es una clase monótona que contiene a \mathcal{A}_0 y por el teorema de la clase monótona, pág.7 es todo $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por tanto se sigue de (4.3.2)

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), |\mu(A)| \leq \mu_{v_F}(A) \Rightarrow |\mu| \leq \mu_{v_F},$$

pero por otra parte como $F(b) - F(a) = \mu(a, b]$ se sigue de (4.3.2) que

$$\begin{aligned} v_F(x) &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| : x_0 < \cdots < x_n = x \right\} \\ &\leq |\mu|((-\infty, x]) \leq \mu_{v_F}((-\infty, x]) = v_F(x), \end{aligned}$$

y las medidas finitas $|\mu|, \mu_{v_F}$ coinciden en los semiintervalos $(-\infty, x]$, por tanto en \mathcal{A}_0 y por el teorema de Hahn en los borelianos y son iguales. Por último

$$\|\phi(\mu)\| = v_F(\mathbb{R}) = |\mu|(\mathbb{R}) = \|\mu\|. \quad \blacksquare$$

5.3.3 Teorema fundamental del cálculo.

Veamos ahora qué relación existe entre la absoluta continuidad de funciones y la de medidas.

Proposición 5.3.8 Sean μ y $F = \phi(\mu)$, correspondientes por el isomorfismo (5.3.7), entonces F es absolutamente continua sii $\mu \ll m$.

Demostración. “ \Leftarrow ” Sabemos por (4.4.1) que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que si $m(E) < \delta$, entonces $|\mu|(E) < \epsilon$, por tanto si $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$, entonces para $E = \cup(a_i, b_i]$, se tiene $m(E) < \delta$ y por tanto

$$\sum_{i=1}^k |F(b_i) - F(a_i)| = \sum_{i=1}^k |\mu(a_i, b_i]| \leq |\mu|(E) \leq \epsilon.$$

“ \Rightarrow ” Sea $m(A) = 0$ y veamos que $\mu(A) = 0$, para ello observemos en primer lugar que $\mu(\{b\}) = F(b) - F(b^-) = 0$ por ser F continua y por tanto $\mu(a, b) = \mu(a, b]$. Por otro lado sabemos por (1.6.23) que m y las μ_i^\pm son regulares, por tanto

$$\begin{aligned} m(A) &= \inf \{m(V) : V \text{abierto}, A \subset V\}, \\ \mu_i^\pm(A) &= \inf \{\mu_i^\pm(V) : V \text{abierto}, A \subset V\}, \end{aligned}$$

y como la intersección finita de abiertos es abierto podemos encontrar una sucesión decreciente de abiertos V_n , tales que $m(V_n) \rightarrow m(A) = 0$ y $\mu_i^\pm(V_n) \rightarrow \mu_i^\pm(A)$, por tanto $\mu(V_n) \rightarrow \mu(A)$. Ahora dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$, entonces $\sum_{i=1}^k |F(b_i) - F(a_i)| \leq \epsilon$, y como $m(A) = 0$ existe un n a partir del cual $m(V_n) < \delta$, pero todo abierto de \mathbb{R} es unión numerable disjunta de intervalos abiertos, por lo tanto $V_n = \cup(a_i, b_i)$ y para todo k , $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) \leq m(V_n) \leq \delta$, por tanto $\sum_{i=1}^k |F(b_i) - F(a_i)| \leq \epsilon$, por lo que

$$|\mu(V_n)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(a_i, b_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(a_i, b_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |F(b_i) - F(a_i)| \leq \epsilon,$$

por tanto $|\mu(A)| \leq \epsilon$ y como el ϵ es arbitrario, $\mu(A) = 0$. ■

Proposición 5.3.9 Sea $F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$, entonces existe c.s. F' , por tanto es lebesgue medible, y es integrable $F' \in \mathcal{L}_1$. Además para $F = \phi(\mu)$,

$$\begin{aligned} \mu \perp m &\Leftrightarrow F' = 0 \quad \text{c.s.} \\ \mu \ll m &\Leftrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x F'(x) dm. \end{aligned}$$

Demostración. Se sigue de (5.2.8) que c.s.

$$\frac{F(x+r) - F(x)}{r} = \frac{\mu(E_r)}{m(E_r)} \rightarrow f(x), \quad (r \rightarrow 0)$$

para $E_r = (x, x+r]$ si $r > 0$ y $E_r = (x+r, x]$ si $r < 0$, $\mu = \mu_a + \mu_s$ la descomposición de Lebesgue y $d\mu_a = f dm$, por tanto $F' = f$ c.s. Además

$$\begin{aligned} \mu \perp m &\Leftrightarrow \mu_a = 0 \Leftrightarrow F' = 0 \text{ c.s.} \\ \mu \ll m &\Leftrightarrow \mu = \mu_a \Leftrightarrow F(x) = \mu(-\infty, x] = \int_{-\infty}^x F'(x) dm. \end{aligned}$$

donde la implicación “ \Leftarrow ” de la cuarta equivalencia se sigue de que dos medidas finitas que coinciden en los semiintervalos $(-\infty, x]$ son iguales. ■

En el *Teorema de Radon-Nikodym* (4.4.3) hemos puesto de manifiesto la íntima relación entre la absoluta continuidad de medidas y las integrales indefinidas. Esta relación subsiste para funciones de \mathcal{V}_0 como vemos en el siguiente resultado que es una consecuencia del anterior.

Teorema de Lebesgue 5.3.10 Sea $f \in \mathcal{L}_1[\mathcal{L}(\mathbb{R}), m]$ y $F(x) = \int_{-\infty}^x f dm$, entonces F es diferenciable c.s. y $F' = f$ c.s. (m), además $F \in \mathcal{V}_0$ y es absolutamente continua. Recíprocamente si $F \in \mathcal{V}_0$ es absolutamente continua, entonces F' existe c.s., es integrable y $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dm$.

Demostración. Consideremos la medida real ó compleja $\mu(A) = \int_A f dm$, y sea $F = \phi(\mu)$, entonces la primera parte se sigue de (5.3.9). El recíproco se sigue de ese mismo resultado y de (5.3.8). ■

Consideremos ahora que nuestra función F está definida en un intervalo compacto $[a, b]$, en cuyo caso las condiciones se simplifican pues se tiene el siguiente:

Lema 5.3.11 Si $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es absolutamente continua, es de variación acotada.

Demostración. Queremos ver que existe un $k < \infty$, tal que dados $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$,

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq k,$$

para ello sabemos que existe un $\delta > 0$, tal que si (a_i, b_i) son una colección finita de intervalos disjuntos tales que $\sum_{i=1}^m (b_i - a_i) \leq \delta$, entonces $\sum |F(b_i) - F(a_i)| \leq 1$. Consideremos los intervalos

$$[a, \delta], [\delta, 2\delta], \dots, [(k-1)\delta, b],$$

para k tal que $b \leq k\delta$. Entonces incluyendo más puntos entre los x_i , si es necesario, para que estén los extremos de estos intervalos (en cuyo caso la suma que perseguimos aumenta), podremos agrupar los x_i por intervalos y para los de cada intervalo como $\sum (x_i - x_{i-1}) = \delta$, tendremos que $\sum |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq 1$, por tanto para todos los x_i , $\sum |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq k$. ■

Teorema Fundamental del Cálculo Integral de Lebesgue 5.3.12

Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Si F es absolutamente continua, entonces es diferenciable c.s., F' es Lebesgue integrable y $F(x) = F(a) + \int_a^x F' dm$. Recíprocamente si $F(x) = F(a) + \int_a^x f dm$, para una $f \in \mathcal{L}_1$, entonces F es absolutamente continua y $f = F'$ c.s.

Demostración. “ \Rightarrow ” Definamos $G(x) = F(x) - F(a)$ en $[a, b]$, $G(x) = F(b) - F(a)$ en $x > b$ y $G(x) = 0$ en $x < a$, entonces $G \in \mathcal{V}_0$ por el Lema (5.3.11) y es absolutamente continua, por tanto se sigue del Teorema de Lebesgue (5.3.10) que $F' = G' \in \mathcal{L}_1$ y en $[a, b]$

$$F(x) - F(a) = G(x) = \int_{-\infty}^x G' dm = \int_a^x F' dm.$$

“ \Leftarrow ” Definamos $f(x) = 0$ en $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$, por tanto $f \in \mathcal{L}_1[\mathcal{L}(\mathbb{R}), m]$ y para G como antes es $G(x) = \int_{-\infty}^x f dm$, entonces por el Teorema de Lebesgue G es diferenciable c.s. y $G' = f$ c.s., ahora bien en $[a, b]$ $G(x) = F(x) - F(a)$ y $G' = F'$. ■

Ante estos resultados nos planteamos la siguiente cuestión:

Sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, ¿qué condiciones debe verificar F para que se verifique $F(x) - F(a) = \int_a^x F' dm$?

Para $F(x) = x^2 \sin x^{-2}$ si $x \neq 0$ y $F(0) = 0$, se tiene que F es diferenciable en todo punto, sin embargo

$$\int_0^1 |F'(x)| dx = \infty,$$

por tanto F' no es integrable en $[0, 1]$, ni F es de variación acotada ni por tanto absolutamente continua en $[0, 1]$.

Podríamos pensar entonces que la cuestión anterior es afirmativa si F es diferenciable en casi todo punto (m) y $F' \in \mathcal{L}_1$, pero tampoco esto es cierto (ver Rudin, p.179). Lo mas lejos que podemos ir en la contestación afirmativa de esta cuestión está en el siguiente resultado (ver COHN, p.191; BENEDETTO, p.150).

Teorema 5.3.13 (a) Si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, diferenciable salvo en una colección numerable de puntos y $F' \in \mathcal{L}_1$, entonces

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F' dm.$$

(b) Si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, diferenciable en casi todo $[a, b]$, $F' \in \mathcal{L}_1$ y se satisface

$$m(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad m[F(A)] = 0.$$

entonces

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F' dm.$$

5.4 Transformaciones diferenciables

5.4.1 Transformaciones lineales.

Una aplicación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n)$, entre \mathbb{R} -espacios vectoriales de dimensión k y n respectivamente,

$$T: \mathcal{E}_k \rightarrow \mathcal{E}_n,$$

define por dualidad otra $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_n^*, \mathcal{E}_k^*)$, que llamamos su *traspuesta*

$$T^*: \mathcal{E}_n^* \longrightarrow \mathcal{E}_k^*, \quad [T^*(w)](x) = w[T(x)],$$

pues si consideramos bases u_j de \mathcal{E}_k y v_i de \mathcal{E}_n , la matriz correspondiente a T^* en las bases duales, v^i y u^j , es la traspuesta A^t , de la matriz A correspondiente a T .

Por otro lado cada *espacio Euclídeo* \mathcal{E} (\mathbb{R} -espacio vectorial con un producto interior), finito dimensional, se identifica canónicamente con su dual mediante el isomorfismo

$$\phi: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^*, \quad x \mapsto \langle x, \cdot \rangle,$$

(cuya matriz correspondiente a una base ortonormal u_j y su dual u^j es la identidad, pues $\phi(u_j) = u^j$). Por tanto si los espacios \mathcal{E}_k y \mathcal{E}_n son euclídeos tendremos un endomorfismo lineal canónico

$$T_k = \phi_k^{-1} \circ T^* \circ \phi_n \circ T: \mathcal{E}_k \longrightarrow \mathcal{E}_k,$$

que en términos de las bases u_j y v_i ¡si son ortonormales! le corresponde la matriz $B = A^t A$, la cual es semidefinida positiva y sus autovalores λ son reales y no negativos¹ por lo que el determinante de nuestra aplicación es no negativo, lo cual nos permite dar la siguiente definición.

¹Pues para todo $x \in \mathbb{R}^k$ si $y = Ax$, $x^t B x = x^t A^t A x = y^t y \geq 0$, y como $B = \overline{B}^t$, si $x \in \mathbb{C}^k$, $x \neq 0$ y $Bx = \lambda x$

$$\lambda \overline{x}^t x = \overline{x}^t B x = \overline{x}^t \overline{B}^t x = \overline{\lambda} \overline{x}^t x \quad \Rightarrow \quad \lambda = \overline{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

y tiene un autovector no nulo $x \in \mathbb{R}^k$, para el que

$$0 \leq x^t A^t A x = x^t \lambda x = \lambda \left(\sum x_i^2 \right) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \lambda.$$

Definición. Para cada aplicación lineal $T: \mathcal{E}_k \rightarrow \mathcal{E}_n$, entre espacios euclídeos, en las condiciones anteriores, definimos

$$J(T) = \sqrt{\det T_k} = \sqrt{\det(A^t A)} \geq 0.$$

A partir de ahora por comodidad tomaremos nuestros espacios euclídeos como \mathbb{R}^n con el producto escalar estándar, $\langle x, y \rangle = x^t \cdot y = \sum x_i y_i$.

Proposición 5.4.1 $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal es inyectiva sii lo es T_k sii $J(T) > 0$; y en tal caso $k \leq n$.

Demostración. $k = \dim \text{Im } T + \dim \ker T = \dim \text{Im } T \leq n$. En términos matriciales, A es inyectiva sii $A^t A$ lo es sii $A^t A$ es isomorfismo sii $\det T_k > 0$, donde lo primero se sigue de las equivalencias

$$Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad A^t Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x^t A^t Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 5.4.2 Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal.

- (a) Si $\det T = 0$, $T(E) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ y $m[T(E)] = 0$.
- (b) $\det T \neq 0$, entonces T lleva borelianos en borelianos y lebesgue medibles en lebesgue medibles y para todo lebesgue medible E ,

$$m[T(E)] = |\det(T)|m(E).$$

Demostración. (a) Utilizando la medida de Hausdorff es obvio² pues $\text{Im } T = \mathcal{S}_k = \{h_1 = 0, \dots, h_{n-k} = 0\}$ es un subespacio k -dimensional con $\dim_H(\mathcal{S}_k) = k < n$, por tanto $H_n(\mathcal{S}_k) = 0$ y $m(\mathcal{S}_k) = 0$.

(b) Si el $\det T \neq 0$, T conserva los borelianos pues T es isomorfismo lineal, por tanto homeomorfismo y por (2.2.1) T y T^{-1} son medibles. Podemos entonces definir la medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu(E) = m[T(E)]$, la cual es no nula, invariante por traslaciones y finita en los compactos y por (1.6.18) de Lebesgue, $\mu = c(T) \cdot m$, con $c(T) = m[T(Q)] > 0$ y $Q = [0, 1]^n$

² Demostración alternativa: Basta ver que para cada hiperplano \mathcal{H} , $m[\mathcal{H}] = 0$, pues si $\det T = 0$, la $\text{Im } T = \mathcal{S}_k = \{h_1 = 0, \dots, h_{n-k} = 0\}$, es un subespacio k -dimensional con $k < n$, el cual está en un hiperplano $\mathcal{H} = \{h_1 = 0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $m[\mathcal{H}] = 0$, pues si $h_1 = \sum a_i x_i$, algún a_i será no nulo, por ejemplo $a_1 \neq 0$ y para cada $y = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, la sección \mathcal{H}^y tiene un único punto $x_1 = -\sum_{i=2}^n (a_i/a_1)x_i$, por tanto por el teorema de la medida producto

$$m[\mathcal{H}] = \int m_1[\mathcal{H}^y] dm_{n-1} = 0.$$

el cubo unidad. Se sigue que $m[T(E)] = c(T) \cdot m(E)$ y T conserva los lebesgue medibles. Ahora basta demostrar que $c(T) = |\det(T)|$. Ahora bien si T_1 y T_2 son dos isomorfismos lineales, también lo es $T_1 \circ T_2$ y se tiene $c[T_1 \circ T_2] = c[T_1]c[T_2]$, por tanto como todo isomorfismo lineal T se expresa como composición finita de isomorfismos lineales de los tres siguientes tipos, para $r \neq 0$ y e_i la base estándar de \mathbb{R}^n

$$T_1(e_1) = re_1, \quad T_1(e_i) = e_i, \quad \text{para } i = 2, \dots, n,$$

$$T_2(e_i) = e_i, \quad T_2(e_j) = e_k, \quad T_2(e_k) = e_j, \quad 1 \leq j < k \leq n,$$

$$T_3(e_1) = e_1, \quad T_3(e_i) = e_i + re_k, \quad T_3(e_n) = e_n, \quad \text{para } 1 \leq i \neq k \leq n,$$

basta demostrar que para ellos $c(T) = |\det T|$, es decir $m[T(Q)] = |\det T|$, además para la tercera podemos suponer que $i = 1$, $k = 2$ y $r = 1$, ya que basta aplicar varias veces T_1 y T_2 convenientemente, pues por ejemplo

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para ellas el resultado es obvio pues (para $r > 0$)

$$T_1(Q) = [0, r] \times [0, 1]^{n-1} \Rightarrow m[T_1(Q)] = r = |\det T_1|,$$

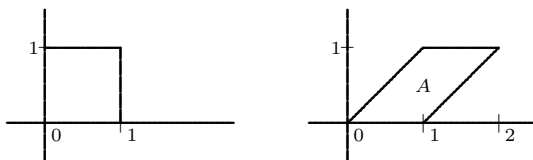
$$T_2(Q) = Q \Rightarrow m[T_2(Q)] = 1 = |\det T_2|,$$

$$T_3(Q) = A \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \Rightarrow m[T_3(Q)] = 1 = |\det T_3|$$

para el paralelogramo

$$A = \{(x_1 + x_2, x_2) : x_1, x_2 \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2,$$

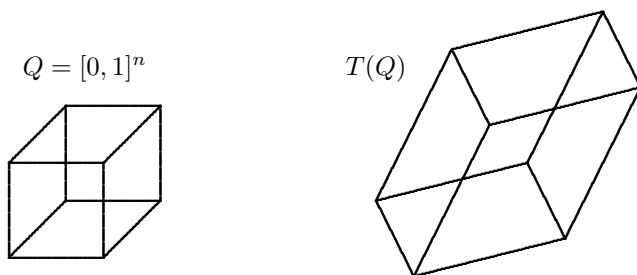
de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$ y $(1, 1)$,



el cual tiene área $m_2[A] = 1$. ■

Interpretación geométrica del determinante 5.4.3 Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal, entonces para $Q = [0, 1]^n$, el cubo unidad

$$|\det(T)| = m[T(Q)].$$



— Figura 4. Interpretación geométrica del determinante.—

Para que una aplicación lleve borelianos en borelianos basta pedirle que sea continua e inyectiva, este resultado que vemos a continuación, lo utilizaremos más adelante.

Lema 5.4.4 *Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $F: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua e inyectiva, entonces $E \in \mathcal{B}(V)$ sii $F(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.*

Demostración. $\Rightarrow V$ es unión numerable de compactos

$$K_n = \{x : \|x\| \leq n, d(x, V^c) \geq 1/n\},$$

por tanto si $C \subset V$ es un cerrado de V , es unión numerable de compactos $C_n = C \cap K_n$ y $F(C)$ es boreliano pues es unión numerable de los compactos $F(C_n)$. Se sigue que los cerrados de V , en particular V , están en la clase

$$\mathcal{C} = \{E \subset V : F(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\},$$

que es una σ -álgebra, pues es cerrada para uniones numerables y si $C \in \mathcal{C}$, $C^c \in \mathcal{C}$, ya que $F(C)$ y $F(C^c)$ son disjuntos por ser F inyectiva y su unión es $F(V)$, por lo que $F(C^c) = F(V) \cap F(C)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Por tanto $\mathcal{B}(V) \subset \mathcal{C}$.

\Leftarrow Por ser F continua y por que $E = F^{-1}[F(E)]$ por ser F inyectiva.

■

5.4.2 Transformaciones y medidas de Hausdorff.

Consideremos ahora las medidas de Hausdorff H_k en los espacios euclídeos \mathbb{R}^n .

Proposición 5.4.5 Sea $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal e inyectiva, entonces $k \leq n$, $J(T) > 0$, $T(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ para cada $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ y

$$H_k[T(E)] = J(T)H_k[E].$$

Demostración. Por (5.4.1) $J(T) > 0$ y $k \leq n$. Por (5.4.4) lleva borelianos en borelianos.

Si $k = n$, $J(T) = |\det T|$ y el resultado se sigue de (5.4.2) y de (1.7.8) (página 54), por ser $\gamma_n H_n$ la medida de Lebesgue n -dimensional. Si $k < n$, consideremos una rotación $R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que lleve $T(\mathbb{R}^k)$ en el subespacio $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ y sea $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ la composición

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{T} \mathbb{R}^n \xrightarrow{R} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{R}^k$$

tal que $R[T(x)] = (F(x), 0)$, por tanto en términos matriciales

$$RT = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^t T = T^t R^t RT = F^t F \Rightarrow J(T) = J(F).$$

Ahora por el ejercicio (1.7.2) (página 54), por ser H_k invariante por rotaciones y por lo visto en el primer caso ($k = n$)

$$\begin{aligned} H_k[T(E)] &= H_k[R(T(E))] = H_k[F(E) \times \{0\}^{n-k}] \\ &= H_k[F(E)] = J(F)H_k(E) = J(T)H_k(E). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Interpretación geométrica de $J(T)$ 5.4.6 Sea $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal, entonces para $Q = [0, 1]^k$,

$$J(T) = \gamma_k H_k[T(Q)].$$

5.5 El teorema de cambio de variable

Nuestro interés es dar una fórmula que nos permita calcular la medida de Hausdorff k -dimensional de los borelianos de una subvariedad diferenciable k -dimensional de \mathbb{R}^n . Para ello necesitamos una serie de resultados previos y recordar algunas definiciones.

Definición. Sea $U \subset \mathbb{R}^k$ un abierto. Decimos que una aplicación $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *diferenciable en* $x \in U$ si existe una aplicación lineal $DF_x: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{\|z\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x+z) - F(x) - DF_x(z)\|}{\|z\|} = 0.$$

Diremos que F es *diferenciable* si lo es en cada punto de U . Diremos que es de *clase 1* si es diferenciable y la aplicación $DF, x \in U \rightarrow DF_x \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ es continua³. Por inducción diremos que F es de clase m si DF es de clase $m-1$ y de clase ∞ si es de clase m para toda m . Diremos que F es un *difeomorfismo* si tiene inversa y también es diferenciable, en cuyo caso se tiene que $k = n$.

Nota 5.5.1 Es fácil demostrar que, en términos de coordenadas, la matriz asociada a la aplicación lineal DF_x es la *matriz Jacobiana*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right), \quad \text{para } F = (f_1, \dots, f_n)$$

cuya existencia no implica que F sea diferenciable en x , ni siquiera que sea continua, como prueba

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } x = y = 0, \end{cases}$$

sin embargo F es de clase 1 sii existen las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ y son continuas y de clase m sii existen las derivadas parciales de las f_i hasta el orden m y son continuas. Además si $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal, entonces $DF_x = F$ para todo x .

³Con cualquier norma en el espacio $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, pues al ser de dimensión finita todas definen la misma topología, sin embargo habitualmente consideraremos $\|T\| = \sup\{|T(x)| : \|x\| = 1\}$

Lema 5.5.2 Sea $F: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase 1, entonces:

(a) Si $x \in U$ y $DF_x = 0$, para cada $\epsilon > 0$ existe un entorno abierto de x , $U_x \subset U$, tal que para $y, z \in U_x$

$$\|F(y) - F(z)\| \leq \epsilon \|y - z\|.$$

(b) Si $x \in U$, para cada $\epsilon > 0$ existe un entorno abierto de x , $U_x \subset U$, tal que para $y, z \in U_x$

$$\|F(y) - F(z) - DF_x(y - z)\| \leq \epsilon \|y - z\|.$$

(c) Si $x \in U$ y $T = DF_x$ es inyectiva, para todo $\alpha > 1$ existe un abierto $U_x \subset U$, entorno de x tal que

$$\forall y, z \in U_x, \quad \alpha^{-1} \|T(y) - T(z)\| \leq \|F(y) - F(z)\| \leq \alpha \|T(y) - T(z)\|,$$

$$\forall y \in U_x, \forall z \in \mathbb{R}^k, \quad \alpha^{-1} \|T(z)\| \leq \|DF_y(z)\| \leq \alpha \|T(z)\|.$$

Demostración. El resultado basta verlo para una elección de normas, pues todas son equivalentes.

(a) Como $DF_x = 0$, $\partial f_i(x)/\partial x_j = 0$ y existe un entorno convexo de x , U_x , tal que para cada $v \in U_x$ y cualesquiera i, j , $|\partial f_i(v)/\partial x_j| \leq \epsilon$ y para $y, z \in U_x$ si consideramos la función $f(t) = f_i[z + t(y - z)]$, tendremos que

$$\begin{aligned} f_i(y) - f_i(z) &= f(1) - f(0) = \int_0^1 g'(t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} [z + t(y - z)] (y_j - z_j) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|F(y) - F(z)\|_\infty \leq \epsilon \|y - z\|_1. \end{aligned}$$

(b) Basta aplicar el apartado anterior a $G(y) = F(y) - DF_x(y)$.

(c) Como $T = DF_x$ es continua e inyectiva se alcanza y es positivo, $0 < k = \min\{\|T(z)\| : \|z\| = 1\}$ y por la desigualdad de (b) y los mismos ϵ y U_x

$$\begin{aligned} \|T(y - z)\| - \epsilon \|y - z\| &\leq \|F(y) - F(z)\| \leq \|T(y - z)\| + \epsilon \|y - z\| \\ \Rightarrow 1 - \epsilon/k &\leq \frac{\|F(y) - F(z)\|}{\|T(y - z)\|} \leq 1 + \epsilon/k \end{aligned}$$

y el resultado se sigue tomando un $\epsilon > 0$, tal que

$$\alpha^{-1} \leq 1 - \epsilon/k < 1 + \epsilon/k \leq \alpha.$$

Ahora para la segunda desigualdad, dado el $\alpha > 1$, elijamos un $\epsilon > 0$ que satisfaga las desigualdades anteriores. Como DF es continua en x , existe U_x , tal que para todo $y \in U_x$ y todo z con $\|z\| = 1$,

$$\begin{aligned} & \|DF_y(z) - DF_x(z)\| \leq \|DF_y - DF_x\| \leq \epsilon \\ \Rightarrow & \|DF_x(z)\| - \epsilon \leq \|DF_y(z)\| \leq \|DF_x(z)\| + \epsilon \\ \Rightarrow & 1 - \epsilon/k \leq \frac{\|DF_y(z)\|}{\|DF_x(z)\|} \leq 1 + \epsilon/k \\ \Rightarrow & \alpha^{-1}\|DF_x(z)\| \leq \|DF_y(z)\| \leq \alpha\|DF_x(z)\|, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue. ■

Definición. Diremos que $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ es una *subvariedad diferenciable* k -dimensional si para cada $x \in \mathcal{S}$, existe un difeomorfismo

$$\phi = (u_1, \dots, u_n): V_x \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n,$$

con V_x entorno abierto de x y W abierto tales que

$$\mathcal{S} \cap V_x = \{y \in V_x : u_{k+1}(y) = \dots = u_n(y) = 0\}.$$

Nota 5.5.3 Normalmente esto no es la definición sino una caracterización, por otra parte no hemos hecho alusión a la clase de la subvariedad, que se corresponde con la clase del difeomorfismo. En los resultados que desarrollemos supondremos que es de clase 1.

Como una simple consecuencia toda subvariedad \mathcal{S} es localmente parametrizable, es decir que para todo $x \in \mathcal{S}$ existe un abierto $V_x \subset \mathbb{R}^n$, un abierto $U \subset \mathbb{R}^k$ y una aplicación diferenciable, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, inyectiva ella y su aplicación lineal tangente DF_z en todo $z \in U$ (a estas aplicaciones se las llama *inmersiones*) y tal que $F(U) = V_x \cap \mathcal{S}$. A una tal F la llamaremos una *parametrización* del abierto $V_x \cap \mathcal{S}$ de la subvariedad.

Toda subvariedad se puede expresar como unión numerable de subvariedades parametrizables, pues \mathbb{R}^n tiene una base numerable de abiertos B_m (las bolas $B(x, r)$, con $x \in \mathbb{Q}^n$ y $r \in \mathbb{Q}$), por tanto para todo $x \in \mathcal{S}$ existe un abierto básico B_m , con $x \in B_m$ y $B_m \subset V_x$ (para el abierto V_x de la definición) y para $A_m = F^{-1}(B_m)$, $F(A_m) = B_m \cap \mathcal{S}$ y con estos rellenamos la subvariedad. Para nuestros propósitos es suficiente considerar que nuestra subvariedad es parametrizable globalmente.

Corolario 5.5.4 Sea $U \subset \mathbb{R}^k$ un abierto y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión de clase 1. Entonces para cada $\alpha > 1$ hay un recubrimiento numerable por abiertos U_i de U y aplicaciones lineales inyectivas $T_i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

$$\alpha^{-1}\|T_i(z)\| \leq \|DF_y(z)\| \leq \alpha\|T_i(z)\|, \quad \forall y \in U_i, z \in \mathbb{R}^k,$$

$$\alpha^{-1}\|T_i(y) - T_i(z)\| \leq \|F(y) - F(z)\| \leq \alpha\|T_i(y) - T_i(z)\|, \quad \forall y, z \in U_i.$$

Demostración. Se sigue de (5.5.2) que para cada $x \in U$ hay un entorno abierto suyo U_x y una aplicación lineal para los que es cierto el resultado, ahora bien U es unión numerable de compactos K_n (ver (5.4.4)), por tanto cada compacto K_n se recubre con una colección finita de estos abiertos y U con una colección numerable. ■

Lema 5.5.5 Sean $F, G: \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ aplicaciones de un conjunto Ω en un espacio métrico (\mathcal{X}, d) y $c > 0$, tales que

$$d[F(x), F(y)] \leq c \cdot d[G(x), G(y)], \quad \text{para } x, y \in \Omega$$

entonces para todo $B \subset \Omega$ y todo $p > 0$,

$$H_p[F(B)] \leq c^p \cdot H_p[G(B)].$$

Demostración. Sea $\delta > 0$ y sean $A_i \subset \mathcal{X}$, tales que $G(B) \subset \cup A_i$ y $d(A_i) \leq \delta$, entonces para $B_i = G^{-1}(A_i)$

$$\begin{aligned} B &\subset G^{-1}[G(B)] \subset G^{-1}[\cup A_i] \subset \cup B_i \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow F(B) \subset F(\cup B_i) \subset \cup F(B_i), \end{aligned}$$

siendo por hipótesis $d[F(B_i)] \leq c \cdot d[G(B_i)] \leq c \cdot d[A_i] \leq c\delta$, por tanto

$$H_{p, c\delta}[F(B)] \leq \sum d[F(B_i)]^p \leq c^p \cdot \sum d[A_i]^p,$$

de donde

$$H_{p, c\delta}[F(B)] \leq c^p \cdot H_{p, \delta}[G(B)] \quad \Rightarrow \quad H_p[F(B)] \leq c^p \cdot H_p[G(B)]. \quad \blacksquare$$

Corolario 5.5.6 En particular se tiene que $H_p[F(B)] \leq c^p \cdot H_p[G(B)]$, para cada $B \subset \Omega$ en cualquiera de los casos:

(a) \mathcal{X} es un espacio normado y $\forall x, y \in \Omega$

$$\|F(x) - F(y)\| \leq c\|G(x) - G(y)\|.$$

(b) \mathcal{X} es un espacio normado, Ω es un espacio vectorial F y G son lineales y para todo $x \in \Omega$

$$\|F(x)\| \leq c\|G(x)\|.$$

Teorema 5.5.7 Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión inyectiva de clase 1, $S = F(U)$, entonces $A \in \mathcal{B}(U)$ sii $F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y para la función continua y no negativa $x \rightarrow J(DF_x)$,

$$H_k[F(A)] = \int_A J(DF_x) dH_k,$$

y para cada función borel medible g en S no negativa o H_k -integrable

$$\int_S g dH_k = \int_U g[F(x)] \cdot J(DF_x) dH_k.$$

Demostración. Como F es continua e inyectiva, $A \in \mathcal{B}(U)$ sii $F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ por (5.4.4). Ahora por (5.5.4) para cada $\alpha > 1$ hay una sucesión de abiertos $U_i \subset U$ y de aplicaciones lineales inyectivas $T_i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ (con $J(T_i) > 0$ por (5.4.1)), tales que

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}\|T_i(z)\| &\leq \|DF_y(z)\| \leq \alpha\|T_i(z)\|, \quad \forall y \in U_i, z \in \mathbb{R}^k, \\ \alpha^{-1}\|T_i(y) - T_i(z)\| &\leq \|F(y) - F(z)\| \leq \alpha\|T_i(y) - T_i(z)\|, \quad \forall y, z \in U_i, \end{aligned}$$

y aplicando (5.5.5) tenemos que para $A, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, con $A \subset V_i$ y todo $y \in V_i$

$$\begin{aligned} \alpha^{-k}H_k[T_i(E)] &\leq H_k[DF_y(E)] \leq \alpha^kH_k[T_i(E)], \\ \alpha^{-k}H_k[T_i(A)] &\leq H_k[F(A)] \leq \alpha^kH_k[T_i(A)], \end{aligned}$$

y aplicando (5.4.5) con $E = [0, 1]^k$, a la primera desigualdad, como $0 < H_k(E) < \infty$, por (1.7.7), pág.53, se tiene que para todo $y \in V_i$

$$\alpha^{-k}J[T_i] \leq J[DF_y] \leq \alpha^kJ[T_i],$$

y de la segunda, de (5.4.5) e integrando la anterior en A se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha^{-2k}H_k[F(A)] &\leq \alpha^{-k}H_k[T_i(A)] = \alpha^{-k}J[T_i]H_k[A] \\ &\leq \int_A J[DF_y] dH_k \leq \alpha^kJ[T_i]H_k[A] \\ &= \alpha^kH_k[T_i(A)] \leq \alpha^{2k}H_k[F(A)], \end{aligned}$$

y el resultado se sigue para todo boreliano $A \subset U$, pues si consideramos los borelianos disjuntos $B_i = U_i \cap (U_1 \cup \dots \cup U_{i-1})^c$, para los que $U = \cup B_i$, tendremos que A es unión numerable disjunta de los borelianos $A_i = A \cap B_i \subset U_i$ y $F(A)$ de los también borelianos disjuntos $F(A_i)$ —pues F es inyectiva—, por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha^{-2k} H_k[F(A)] &= \alpha^{-2k} \sum_{i=1}^{\infty} H_k[F(A_i)] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} J[DF_y] dH_k \\ &= \int_A J[DF_y] dH_k \leq \alpha^{2k} H_k[F(A)], \end{aligned}$$

y como el α es arbitrario, tendremos que para cada boreliano $A \subset U$

$$H_k[F(A)] = \int_A J[DF_y] dH_k.$$

La segunda parte se demuestra como habitualmente, teniendo en cuenta que para funciones indicador es la primera parte, para funciones simples no negativas por la linealidad de la integral, para funciones no negativas por el teorema de la convergencia monótona, pág.79 y para funciones integrables por el teorema de aditividad (2.4.4), página 79. ■

Corolario (Teorema del cambio de variable) 5.5.8 *Sea $F: U \rightarrow V$ un difeomorfismo de clase 1, con U, V abiertos de \mathbb{R}^n . Entonces para toda función medible, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa o integrable*

$$\int_V f dm = \int_U f[F(x)] \cdot |\det(DF_x)| dm.$$

Demostración. Es obvio considerando que $\gamma_n H_n = m$. ■

Si multiplicamos ambos miembros de la igualdad obtenida en el teorema por γ_k , tendremos que

$$(5.1) \quad \gamma_k H_k[F(A)] = \int_A J[DF_y] dm,$$

para m la medida de Lebesgue k -dimensional en \mathbb{R}^k . Esta fórmula se da en los cursos de geometría diferencial, pero con una apariencia distinta. Los que hayan seguido estos cursos recordarán que nuestra subvariedad \mathcal{S} hereda la estructura Riemanniana de \mathbb{R}^n , con la que es una variedad Riemanniana y que si en \mathbb{R}^k consideramos un sistema de coordenadas x_i

—correspondientes a una base ortonormal— y en \mathbb{R}^n otro y_j —también correspondiente a otra base ortonormal—, entonces en \mathcal{S} podemos considerar el sistema de coordenadas u_i , para el que $x_i = u_i \circ F$, respecto del que la métrica de \mathcal{S} se expresa en coordenadas por

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{\partial}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_j} = F_* \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot F_* \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \left(\sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \left(\sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \frac{\partial}{\partial y_k} \right) = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x), \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(g_{ij})} &= \sqrt{\det \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)^t \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) \right]} \\ &= \sqrt{\det[(DF_x)^t(DF_x)]} = J[DF_x], \end{aligned}$$

es decir que

$$\gamma_k H_k[F(A)] = \int_A \sqrt{\det(g_{ij})} \, dm.$$

Ejemplo 5.5.9 Sea $a > 0$, $f(x) = 1/\sqrt{a^2 - x^2}$ y $F(x) = a \sin x$, para $F: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-a, a)$, entonces $F'(x) = a \cos x > 0$ y $f[F(x)] = 1/a \cos x$, por tanto

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \pi.$$

Ejemplo 5.5.10 Sea $F(t) = \sin t / \cos t$, para $F: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-\infty, \infty)$ y $f(x) = 1/1 + x^2$, entonces $F'(t) = 1 + F^2(t) > 0$ y $f[F(t)]F'(t) = 1$, por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \pi.$$

Ejemplo 5.5.11 Por el *Teorema de cambio de variable* (5.5.8) (página 182) tenemos que para toda función medible, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa o integrable

$$\int_V f \, dm = \int_U f[F] \cdot |\det(DF_x)| \, dm.$$

y para $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ y el difeomorfismo $F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ $V = F(U) = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x > 0\}$, tenemos por el *Teorema de Fubini* (3.4.3), pág.115

$$\int_V f \, dm_2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho d\theta.$$

(Observemos que $m_2\{(x, 0) : x > 0\} = 0$, por tanto podemos extender f como queramos en ese conjunto y considerar la integral de la izquierda en todo \mathbb{R}^2 .)

Ejemplo 5.5.12 Calculemos la $I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ (ver el ejercicio (2.5.6), de la página 96). Por Fubini y la igualdad del ejemplo anterior

$$I^2 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho d\theta = \pi,$$

por tanto $I = \sqrt{\pi}$.

Ejemplo 5.5.13 Calcular el área $V_2 = m_2[B(0, 1)]$ de la bola unidad de \mathbb{R}^2 : Por el teorema de cambio de variable en coordenadas polares (ver el ejemplo 5.5.11), para $U_0 = (0, 1) \times (0, \infty)$ y $V_0 = F(U_0) = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(x, 0) : x > 0\}$, tenemos

$$V_2 = \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy = \int_{\rho \leq 1, 0 < \theta < 2\pi} \rho \, d\rho d\theta = \pi.$$

Ejemplo 5.5.14 Calculemos ahora el hipervolumen $V_n = m_n(B[0, 1])$ de la bola unidad B de \mathbb{R}^n : Para $n = 1$, $V_1 = 2$; para $n = 2$, $V_2 = \pi$ (ver el ejemplo (5.5.13)); y para $n \geq 3$, por el teorema de la medida producto para $m_n = m_{n-2} \times m_2$, como $m_n[B(0, r)] = r^n V_n$,

$$\begin{aligned} V_n &= m_n[B] = \int m_{n-2}[B_{(x_1, x_2)}] \, dm_2 \\ &= \int_{\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}} m_{n-2}(B[0, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}]) \, dm_2 \\ &= \int_{\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n-2}{2}} V_{n-2} \, dm_2 \\ &= V_{n-2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2)^{\frac{n}{2}-1} \rho \, d\rho d\theta = \pi V_{n-2} \int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}. \end{aligned}$$

haciendo el cambio $t = 1 - \rho^2$. Con esta regla de recurrencia y los dos valores iniciales, tenemos todos los valores buscados

$$V_{2n+1} = \frac{(2\pi)^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}, \quad V_{2n} = \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = \frac{\pi^n}{n!},$$

que en términos de la función Γ (ver el ejercicio (2.5.8), página 97) se expresan simultáneamente con el valor

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Ejemplo 5.5.15 Calcular el área n -dimensional de la gráfica $\mathcal{S} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in V\}$, de una función $f: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Para ello consideremos $F: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $F(x) = (x, f(x))$, que es inmersión inyectiva por tanto

$$\gamma_n H_n[\mathcal{S}] = \int_V J[DF_x] dm_n = \int_V \sqrt{1 + \sum f_{x_i}^2} dm_n,$$

pues para $a_i = f_{x_i}$ y $a^t = (a_1, \dots, a_n)$,

$$J[DF_x]^2 = \det[I + aa^t] = 1 + \sum a_i^2,$$

pues las columnas de la matriz $C = aa^t$ son múltiplos de a , por tanto dependientes y el rango de C es 0, si $a = 0$, ó 1 en caso contrario, en cualquier caso tiene $n - 1$ autovalores nulos y el correspondiente al autovector a , pues $Ca = aa^t a = (a^t a)a$, es decir C tiene autovalores

$$\lambda_1 = a^t a = \sum a_i^2, \quad \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

por tanto los autovalores de $I + C$ son $1 + \sum a_i^2$ y los demás el 1; y el determinante de $I + C$ es su producto.

Ejemplo 5.5.16 Calcular el área n -dimensional A_n de la esfera unidad S_n de \mathbb{R}^{n+1} :

Sea $A_n = \gamma_n H_n(S_n)$ y consideremos la partición de la esfera unitaria $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $S_n = S_n^+ \cup S_n^- \cup E_n$, donde S_n^+ es el casquete superior, S_n^- el casquete inferior de la esfera, para los que $H_n(S_n^-) = H_n(S_n^+)$ pues ambos casquetes son isométricos por la reflexión respecto de $x_{n+1} = 0$; y $E_n = \{x \in S_n : x_{n+1} = 0\} = S_{n-1} \times \{0\}$ es el ecuador.

A continuación veremos que $H_n(S_n^+) < \infty$ para todo n y por inducción se sigue que $H_n(S_n) = 2H_n(S_n^+)$, pues para $n = 1$, $H_1(E_1) = H_1(\{-1, 1\}) = 0$, por tanto $H_1(S_1) = 2H_1(S_1^+)$ y si $H_n(S_n) = 2H_n(S_n^+) < \infty$, se sigue de (1.7.3), pág.52, $H_{n+1}(E_{n+1}) = H_{n+1}(S_n) = 0$.

Ahora bien por el ejercicio anterior, para V la bola unidad abierta de \mathbb{R}^n y $f(x) = \sqrt{1 - \sum x_i^2}$, $F(V) = S_n^+$, por tanto

$$A_n/2 = \gamma_n H_n[S_n^+] = \int_V \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}} dm_n.$$

pues $a_i = f_{x_i} = -x_i/\sqrt{1 - \sum x_i^2}$.

Aplicando ahora Fubini al cálculo anterior y por el ejemplo (5.5.9), el área del casquete superior de S_n es para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} A_n/2 &= \int_V \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}} dm_n = \\ &= \int_{\sum_{i=2}^n x_i^2 \leq 1} \int_{-\sqrt{1 - \sum_{i=2}^n x_i^2}}^{\sqrt{1 - \sum_{i=2}^n x_i^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - \sum_{i=2}^n x_i^2) - x_1^2}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \\ &= \pi m_{n-1}(B[0, 1]) = \pi V_{n-1}, \end{aligned}$$

este mismo cálculo da, $A_1/2 = \pi$.

Ejercicios

Ejercicio 5.5.1 Calcular el área y el volumen de la elipse y elipsoide respectivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ejercicio 5.5.2 Sea $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase 1, demostrar que para todo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, si $\sigma(t) = (x_i(t))$

$$H_1(\sigma[a, b]) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i'(t)^2} dt.$$

Ejercicio 5.5.3 Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y consideremos su gráfica $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$, demostrar que para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$,

$$\gamma_2 H_2[F(A)] = \int_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy.$$

Ejercicio 5.5.4 (1) Demostrar que el área de la esfera de radio r es $4\pi r^2$.
 (2) Demostrar que el área del casquete esférico de radio r y altura h es $2\pi rh$.

5.6 Cálculo de la constante γ_n .

En el teorema (1.7.8) de la página 54, demostramos la existencia de una constante γ_n , tal que $\gamma_n H_n = m$, la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . En esta lección calcularemos el valor de esta constante, utilizando algunos de los resultados de este Tema. Para ello necesitamos una serie de Lemas previos.

Lema 5.6.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, entonces dado $\epsilon > 0$, existen bolas cerradas y disjuntas $B_m \subset A$, con $0 < d(B_m) < \epsilon$, tales que

$$m(A) = \sum m(B_m).$$

Demostración. Sea B_1 cualquier bola de A de diámetro $d(B_1) < \epsilon$, ahora elegidas $B_i = B[x_i, r_i]$, para $i = 1, \dots, m$, elegimos B_{m+1} del siguiente modo: consideramos la familia \mathcal{C}_m de las bolas cerradas de A con diámetro menor que ϵ y disjuntas de las B_i anteriores, la cual es no vacía porque $A - (\cup_{i=1}^m B_i)$ es abierto no vacío. Ahora consideramos $s_m = \sup\{r : B[x, r] \in \mathcal{C}_m\}$ y elegimos B_{m+1} como cualquier bola de \mathcal{C}_m , con radio $r_{m+1} > s_m/2$.

Veamos que el boreliano $C = A - (\cup B_n)$ tiene medida nula.

En primer lugar si $B_0 = B[0, 1]$ es la bola unitaria, como $m[B[x, t]] = t^n m[B_0]$, tendremos que

$$m[B_0] \sum_{m=1}^{\infty} r_m^n = \sum_{m=1}^{\infty} m[B_m] = m[\cup B_m] \leq m[A] < \infty,$$

por lo que $r_m \rightarrow 0$.

Supongamos que $m(C) > 0$, entonces para $B'_m = B[x_m, 4r_m]$,

$$\sum m[B'_m] = 4^n \sum m[B_m] \leq 4^n m[A] < \infty,$$

por lo que existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$m[\cup_{m=N+1}^{\infty} B'_m] \leq \sum_{m=N+1}^{\infty} m[B'_m] < m[C],$$

y por tanto existe un $p \in C$ tal que $p \notin \cup_{m=N+1}^{\infty} B'_m$. Como p está en C no está en el cerrado $\cup_{i=1}^N B_i$ y podemos encontrar una bola $B[p, r] \subset A$ disjunta de B_1, \dots, B_N y $0 < r < \epsilon$, ahora bien si $B[p, r]$ es disjunta de B_1, \dots, B_m , entonces $B[p, r] \in \mathcal{C}_m$ y $r \leq s_m < 2r_{m+1}$, pero $r_m \rightarrow 0$ por tanto existe un primer $m > N$ tal que $B[p, r] \cap B_m \neq \emptyset$ y $B[p, r] \in \mathcal{C}_{m-1}$. Sea $z \in B[p, r] \cap B_m$, como $p \notin B'_m$ tendremos

$$s_{m-1} \geq r \geq \|p - z\| \geq \|p - x_m\| - \|z - x_m\| \geq 4r_m - r_m = 3r_m > \frac{3}{2}s_{m-1},$$

lo cual es absurdo. ■

Definición. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos su *simetrización de Steiner* respecto del hiperplano $\{x_1 = 0\}$ como

$$S(A) = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : |t| \leq \frac{m[A^y]}{2}\}.$$

de modo análogo se definen las simetrías respecto del resto de hiperplanos coordenados $\{x_i = 0\}$.

Lema 5.6.2 Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $S(A)$ es su simetrización de Steiner respecto del hiperplano $\{x_i = 0\}$, entonces

- $S(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
- $d[S(A)] \leq d[A]$.
- $m[S(A)] = m[A]$.
- $x = (x_1, \dots, x_n) \in S(A)$ sii $(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n) \in S(A)$.
- Si A es simétrico respecto de un hiperplano $\{x_j = 0\}$, $S(A)$ también.

Demostración. Haremos la demostración para $i = 1$. Denotaremos para cada $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\beta(y) = \sup A^y$, $\alpha(y) = \inf A^y$.

(a) Que $S(A) = \{f \leq g\}$ es boreliano se sigue del ejercicio (2.2.4) de la página 71 y del Teorema de Fubini, para las funciones medibles $g(t, y) = m[A^y]$ y $f(t, y) = |t|$.

(b) Sean $(t_1, y_1), (t_2, y_2) \in S(A)$, entonces

$$\begin{aligned} d[(t_1, y_1), (t_2, y_2)] &= \sqrt{|t_1 - t_2|^2 + d(y_1, y_2)^2} \\ &\leq \lim d[(s_n, y_1), (r_n, y_2)] \leq d(A), \end{aligned}$$

para ciertas $s_n \in A^y$ y $r_n \in A^y$, pues

$$\begin{aligned} |t_1 - t_2| &\leq \frac{m[A^{y_1}] + m[A^{y_2}]}{2} \leq \frac{\beta(y_1) - \alpha(y_1) + \beta(y_2) - \alpha(y_2)}{2} \\ &\leq \max\{\beta(y_1) - \alpha(y_2), \beta(y_2) - \alpha(y_1)\} = \lim |s_n - r_n|, \end{aligned}$$

por tanto $d[S(A)] \leq d(A)$.

(c) Se sigue del teorema de Fubini que

$$m_n[S(A)] = \int m_1[S(A)^y] dm_{n-1} = \int m_1[A^y] dm_{n-1} = m_n(A).$$

(d) Es obvio y (e) porque (por ejemplo para $j = 2$)

$$\begin{aligned} x = (x_i) \in S(A) &\Leftrightarrow |x_1| \leq \frac{m\{t : (t, x_2, \dots, x_n) \in A\}}{2} \\ &\Leftrightarrow |x_1| \leq \frac{m\{t : (t, -x_2, \dots, x_n) \in A\}}{2} \\ &\Leftrightarrow (x_1, -x_2, \dots, x_n) \in S(A). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En el siguiente resultado veremos que entre los conjuntos de un diámetro fijo d , la bola de ese diámetro, es decir de radio $d/2$, es el de máximo volumen.

Teorema 5.6.3 Dado $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$m[A] \leq m[B[0, d(A)/2]].$$

Demostración. Consideremos la composición de simetrizaciones de Steiner $S(A) = S_n \circ \dots \circ S_1(A)$, respecto de los hiperplanos coordenados.

Entonces por (d) y (e) del resultado anterior $S(A)$ es simétrico, $x \in S(A)$ sii $-x \in S(A)$ y por (b)

$$\begin{aligned} x = (x_i) \in S(A) &\Rightarrow x, -x \in S(A) \\ &\Rightarrow 2\|x\| = \|x - (-x)\| \leq d[S(A)] \leq d(A) \end{aligned}$$

por tanto $S(A) \subset B[0, d(A)/2]$ y se sigue de (c) que

$$m[A] = m[S(A)] \leq m[B[0, d(A)/2]]. \quad \blacksquare$$

Teorema 5.6.4 $\gamma_n H_n = m$ para las constantes

$$\gamma_n = m[B[0, 1/2]] = V_n/2^n = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Demostración. La última igualdad se vio en el ejercicio (5.5.14), de la página 184, veamos pues la primera, lo cual equivale a que $H_n(B) = 1$, para $B = B[0, 1/2]$, la bola de radio $1/2$. Por una parte para $C = [0, 1]^n$ y B_i , tales que $d(B_i) < \delta$ y $C \subset \cup B_i$, tenemos por la desigualdad (5.6.3), por ser $d(B_i) = d(\overline{B_i})$ y $\overline{B_i} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$1 = m[C] \leq \sum_i m[\overline{B_i}] \leq \sum_i m[B[0, d(B_i)/2]] = m[B] \sum_i d(B_i)^n,$$

por tanto $\gamma_n H_n(C) \leq m[B] H_{n,\delta}(C) \leq m[B] H_n(C)$ y $\gamma_n \leq m[B]$, veamos la otra desigualdad.

Consideremos el cubo unidad abierto $(0, 1)^n = A$ un $\epsilon > 0$ y por el Lema (5.6.1) una sucesión de bolas $B_i \subset A$ disjuntas, con $0 < d(B_i) < \delta$ y $m[A - \cup B_i] = 0$, entonces

$$0 \leq H_{n,\delta}[A - \cup B_i] \leq H_n[A - \cup B_i] = 0,$$

lo cual implica, por ser B_i una bola de radio $d(B_i)/2$ y $1 = m[A] = \sum m[B_i]$,

$$\begin{aligned} H_{n,\delta}[A] &\leq H_{n,\delta}[\cup B_i] \leq \sum d(B_i)^n \\ &= \sum \frac{m[B[0, d(B_i)/2]]}{m[B[0, 1/2]]} = \sum \frac{m[B_i]}{m[B]} = \frac{1}{m[B]}, \end{aligned}$$

de donde $m[B] H_n(A) \leq 1 = m(A) = \gamma_n H_n(A)$ y $m[B] \leq \gamma_n$. \blacksquare

5.7 Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

- ASH, R.B.: "*Real Analysis and Probability*". Ac.Press, 1972.
 BENEDETTO, J.J.: "*Real variable and integration*". B.G.Teubner, 1976.
 COHN, D.L.: "*Measure theory*". Birkhauser (Boston), 1980.
 DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: "*Linear operators, Vol,I*". John Wiley-Interscience Pub., 1958.
 FOLLAND, G.B.: "*Real Analysis. Modern Techniques and their applications*", John Wiley, 1984.
 MUKHERJEA, A. AND POTHOVEN, K.: "*Real and functional Analysis*". Plenum Press, 1978.
 MUNROE, M.E.: "*Measure and integration*". Addison Wesley, 1971.
 RUDIN, W.: "*Real and complex analysis*". Tata McGraw-Hill, 1974.
 YOSIDA, K.: "*Functional Analysis*". Springer-Verlag, 1974.

Como bibliografía complementaria consideramos los siguientes:

- HEWITT, E. AND STROMBERG, K.: "*Real and abstract analysis*". Springer-Verlag, 1965.
 WHEEDEN, R.L. AND ZYGMUND, A.: "*Measure and integral. An introduction to Real Analysis*". Marcel Dekker, Inc. 1977.
 ZAAANEN, A.C.: "*Integration*". North-Holland, 1967.

Como comentamos en el capítulo anterior, la descomposición de JORDAN de una medida está íntimamente relacionada con la descomposición de una función de variación acotada como diferencia de funciones crecientes. De hecho es de JORDAN el concepto de función de variación acotada, que acuña en 1881, y suya es la demostración de (5.3.4).

- JORDAN, C.: "*Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*". Gauthier-Villars, Paris, 3a.Ed., Vol.I,II y III, 1909-1915.

Como también comentamos anteriormente, LEBESGUE da en su libro

- LEBESGUE, H.: "*Leçons sur l'integration*" (1a.edición 1903, 2a.edición 1928). Reimp. de 2a. ed. por Chelsea Pub. Comp., 1973.

una condición necesaria y suficiente para que una función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se exprese como una integral indefinida, enunciado esencialmente el *Teorema fundamental del cálculo* (5.3.12) —aunque sin demostración y a

pie de la página 129—; en este libro también está el teorema de diferenciación: *Toda función continua de variación acotada tiene derivada c.s.*, del que en 1939 F. RIESZ señala la posibilidad de quitar la hipótesis de la continuidad, (ver (5.3.9)). En cuanto a VITALI acuña en su artículo de 1904

VITALI, G.: “*Sulle funzioni integrali*”. Atti. Acc. Sci. Torino, 40, pp.1021–1034. Año 1904–1905.

el concepto de función *absolutamente continua*, aunque ya HARNACK en 1890 había usado un concepto similar en un contexto distinto. En ese trabajo VITALI caracteriza, con la absoluta continuidad, la relación entre diferenciación e integración en el contexto de la teoría de Lebesgue, demostrando el *Teorema fundamental del cálculo* (5.3.12). Mas tarde, en 1907, LEBESGUE daría una prueba mas corta que la de VITALI, el cual publica ese mismo año el artículo

VITALI, G.: “*Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*”. Atti. Acc. Sci., Torino, 43, 1907.

en el que tratando de extender el *Teorema fundamental del cálculo* a \mathbb{R}^2 , prueba el *Teorema de recubrimiento de Vitali*. Este resultado fue la base de demostración de teoremas generales de diferenciación. De hecho las pruebas clásicas de (5.2.8) —ver COHN, WHEEDEN–ZYGmund, etc.—, lo utilizan. Nosotros sin embargo hemos seguido a FOLLAND, RUDIN, ASH,... que se basan en el Lema mas simple (5.2.1).

Por otra parte hay procesos de integración, como los desarrollados por DENJOY y PERRON en 1912–14, que están orientados a fin de que el *Teorema fundamental del cálculo*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt,$$

sea válido cuando f sea diferenciable en todo punto. Sin embargo, como ya comentamos, en ellos falla la propiedad de que f sea integrable sii $|f|$ lo es. Remitimos al lector al libro de

MC SHANE, E.J.: “*Integration*”. Princeton Univ. Press, 1944.

Analicemos ahora el teorema (5.2.8), que nos asegura la existencia del límite

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(E_r)}{m(E_r)},$$

y que además es la derivada de Radón–Nykodim, $f = d\mu_a/dm$, para $\mu = \mu_a + \mu_s$ la descomposición de Lebesgue. Cuando consideramos la

densidad de masa f de un objeto en un punto, la definimos como una relación infinitesimal, en el punto, entre la masa μ y el volumen m , esa es la idea que subyace en el resultado anterior. Sin embargo este resultado no dice que esa cantidad infinitesimal de masa sea realmente una medida $d_x\mu$ en el espacio tangente $T_x(\mathbb{R}^n)$ (idem para el volumen, que sigue siendo el volumen en el espacio tangente) y que la relación entre ambas medidas $d_x\mu/d_xm$, que en este caso son proporcionales es un número $f(x)$, que es la densidad en el punto considerado.

Pero este nuevo concepto existe y tiene la ventaja de que no son necesarias dos medidas —como la de masa y volumen— para analizar su comportamiento infinitesimal, sino que cada medida define canónicamente una medida infinitesimal en los puntos en que es diferenciable —que además son casi todos en términos de la de Lebesgue—. Remitimos al lector interesado al trabajo

FARO, R.; NAVARRO, J.A.; SANCHE, J.: “On the concept of differential of a measure”. Arch. Math., Vol 64, 58–68, 1995.

el cual surge como contestación a la pregunta siguiente: ¿Es mera notación la $d\mu$ que aparece en la teoría de integración abstracta o por el contrario tras ella se esconde un concepto matemático como el de la diferencial de una función?

En ese trabajo se define el concepto de diferencial de una medida $d_x\mu$, en un punto $x \in \mathbb{R}^n$, como una medida homogénea en el espacio tangente a \mathbb{R}^n en el punto x . Se demuestra que toda medida es diferenciable (c.s. $[m]$), que $d_x\mu$ es proporcional a d_xm (c.s. $[m]$), siendo m una medida de Lebesgue y se prueba una versión diferencial de la fórmula del cambio de variable de la teoría de integración que nos dice que el concepto de diferencial de una medida es invariante por difeomorfismos (por lo que la definición de diferencial de una medida es válida en una variedad diferenciable \mathcal{X} , en la que no hay medida de Lebesgue con la que comparar). Como consecuencia se tiene una versión mas refinada de la derivada de RADON–NIKODYM $d\lambda/d\mu$, en el contexto de las variedades diferenciables, donde no es una mera clase de funciones coincidiendo casi seguro, sino una verdadera función $f(x) = \frac{d_x\lambda}{d_x\mu}$, bien definida en toda la variedad, salvo en un conjunto de medida nula por μ .

Fin del Tema V

Capítulo 6

Espacios de funciones medibles

6.1 Los espacios \mathcal{L}_p

A lo largo de todo el tema consideraremos un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Definición. Para cada $0 < p < \infty$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , definimos el espacio $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, de las funciones medibles $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ tales que

$$\int |f|^p d\mu < \infty,$$

y para cada $f \in \mathcal{L}_p$, y $p \geq 1$

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Si no hay confusión denotaremos tal espacio por $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$ ó \mathcal{L}_p .

Veremos en la siguiente lección que para $p \geq 1$ las $\|\cdot\|_p$ son seminormas. No hemos incluido los valores correspondientes a $0 < p < 1$ pues para ellos las $\|\cdot\|_p$ en general no satisfacen la desigualdad triangular, sin embargo hablaremos de estos espacios más adelante.

Proposición 6.1.1 Para $0 < p < \infty$, $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial.

Demostración. Es obvio que si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $f, g \in \mathcal{L}_p$, entonces $\alpha f \in \mathcal{L}_p$ y $f + g \in \mathcal{L}_p$ ya que (para lo segundo)

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\ &\leq 2^p |f(x)|^p + 2^p |g(x)|^p. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observemos que aunque $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})$ es un \mathbb{R} -subespacio vectorial de $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{C})$ no es un \mathbb{C} -subespacio vectorial suyo.

6.1.1 El espacio \mathcal{L}_∞ .

Para el caso $p = \infty$ no hay un criterio único para definir $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathbb{K})$. Para unos autores, como ASH, RUDIN y WHEEDEN-ZYGMUND, el *supremo esencial* de una función medible $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ es el

$$\inf\{c \leq \infty : \mu\{|f| > c\} = 0\}.$$

es decir el menor valor c para el que $|f| \leq c$ c.s. Y $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathbb{K})$ es el espacio de las funciones medibles f tales que $|f|$ tiene supremo esencial finito, es decir las funciones medibles acotadas salvo en un conjunto de medida nula.

Nosotros seguimos la dada por COHN.

Definición. Diremos que $A \in \mathcal{A}$ es *localmente nulo* si para cada $B \in \mathcal{A}$ con $\mu(B) < \infty$ se tiene que $\mu(A \cap B) = 0$. Del mismo modo diremos que una propiedad se satisface *localmente casi seguro* (l.c.s.) si el conjunto de puntos en los que no se verifica es localmente nulo. Denotamos con \mathcal{N} el conjunto de todos los medibles nulos y con \mathcal{N}^* los localmente nulos.

Se tienen las siguientes propiedades elementales.

Proposición 6.1.2 (a) $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}^*$.

(b) Si $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ y $B \in \mathcal{N}^*$, entonces $A \in \mathcal{N}^*$.

(c) Si $A \in \mathcal{N}^*$ es σ -finito, $A \in \mathcal{N}$.

(d) Si $A_n \in \mathcal{N}^*$, $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{N}^*$.

Definición. Denotaremos con $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathbb{K})$ ó \mathcal{L}_∞ si no hay confusión, el espacio de las funciones medibles $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ que llamaremos *esencialmente acotadas*, para las que existe un $0 \leq c < \infty$ tal que $\{|f| > c\}$ es localmente nulo, y para ellas definimos

$$\|f\|_\infty = \inf\{c < \infty : \{|f| > c\} \in \mathcal{N}^*\}.$$

Proposición 6.1.3 \mathcal{L}_∞ es un \mathbb{K} -espacio vectorial y $\|f\|_\infty$ es una seminorma.

Demostración. Si $f, g \in \mathcal{L}_\infty$, entonces $f + g \in \mathcal{L}_\infty$, pues dados $0 \leq a, b < \infty$, tales que $A = \{|f| > a\}$ y $B = \{|g| > b\}$ son localmente nulos, $A \cup B$ es localmente nulo y fuera de él

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq a + b,$$

por lo que $\{|f + g| > a + b\} \subset A \cup B$ y es localmente nulo, por tanto $f + g \in \mathcal{L}_\infty$ y además $\|f + g\|_\infty \leq a + b$. Ahora tomando ínfimos en a, b tendremos que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ■

El motivo de elegir esta definición y no la anterior es que con ella podremos englobar distintos resultados en uno y además obtener otros en los que los autores que siguen la primera definición, imponen condiciones que no son necesarias, como que el espacio sea σ -finito, siendo así que con esta condición ambas definiciones coinciden.

Por \mathcal{L}_p entenderemos indistintamente $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})$ ó $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{C})$ y utilizaremos esta notación en aquellos resultados que sean igualmente válidos para ambos espacios. El cuerpo correspondiente lo denotaremos con \mathbb{K} .

Ejercicios

Ejercicio 6.1.1 Demostrar que si $f \in \mathcal{L}_\infty$, entonces $\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ es localmente nulo.

Ejercicio 6.1.2 Demostrar que si $f \in \mathcal{L}_\infty$ y es integrable, entonces $\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ es nulo.

6.2 Los espacios de Banach L_p

6.2.1 Desigualdades fundamentales.

Dijimos en la lección anterior que las $\|\cdot\|_p$, para $1 \leq p$, son seminormas. Para demostrarlo necesitamos algunos resultados previos y un nuevo concepto.

Definición. Diremos que $1 < p, q < \infty$ son *exponentes conjugados* si se verifica que $p + q = pq$ ó equivalentemente

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Observemos que para $p = 2, q = 2$, el cual es un caso especialmente importante. Por otro lado si hacemos $p \rightarrow 1$, entonces $q \rightarrow \infty$, por lo que consideraremos que 1 e ∞ son también exponentes conjugados.

El primero de los resultados es una simple consecuencia de la concavidad de la función log.

Lema 6.2.1 (a) Sean $a, b \in (0, \infty)$ y $t \in [0, 1]$, entonces

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b.$$

(b) Sean $1 < p, q < \infty$ conjugados y $c, d \in [0, \infty)$, entonces

$$cd \leq \frac{c^p}{p} + \frac{d^q}{q}.$$

(c) Sean $a, b \in (0, \infty)$ y $r > 0$, entonces

$$\begin{aligned} (a+b)^r &< a^r + b^r && \text{para } 0 < r < 1, \\ (a+b)^r &> a^r + b^r && \text{para } 1 < r < \infty, \end{aligned}$$

Demostración. (a) Por la concavidad de log

$$\log(a^t b^{1-t}) = t \log a + (1-t) \log b \leq \log(ta + (1-t)b),$$

y el resultado se sigue por ser log creciente.

(b) Para $c = 0$ ó $d = 0$ es obvio; en caso contrario por (a) para $t = 1/p$, $a = c^p$ y $b = d^q$, tendremos

$$cd = a^{1/p} b^{1/q} = a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b = \frac{c^p}{p} + \frac{d^q}{q}.$$

(c) Considérese la función $f(x) = (x+b)^r - x^r - b^r$, para la cual $f(0) = 0$ y $f' > 0$ si $r > 1$, por tanto f es creciente y $f' < 0$ si $0 < r < 1$, por tanto f es decreciente. ■

Como consecuencia tenemos algunas de las desigualdades mas importantes del Análisis Funcional.

Desigualdad de Hölder 6.2.2 Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados. Si $f \in \mathcal{L}_p$ y $g \in \mathcal{L}_q$, $fg \in \mathcal{L}_1$ y

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demostración. Si $p = 1$ y $q = \infty$ consideramos el conjunto $A = \{x : f(x) \neq 0\}$, el cual es σ -finito —pues por la *desigualdad de Tchebycheff*, $\mu\{|f| \geq 1/n\} < \infty$ — y el conjunto $B = \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$, el cual es localmente nulo, por tanto $A \cap B$ es nulo y en los x de su complementario se satisface

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty,$$

por tanto $\int |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$. Si $p = \infty$ y $q = 1$ es similar.

Si $1 < p < \infty$ y $\|f\|_p = 0$ (ó $\|g\|_q = 0$) es obvio, pues $f = 0$ c.s. y por tanto $fg = 0$ c.s., por lo que $\|fg\|_1 = 0$. Si $\|f\|_p \neq 0$ y $\|g\|_q \neq 0$, se tiene por el Lema (6.2.1) que para todo x

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g\|_q^q},$$

y por tanto

$$\frac{\int |fg| d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \blacksquare$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz 6.2.3 Si $f, g \in \mathcal{L}_2$, $f\bar{g} \in \mathcal{L}_1$ y

$$\left| \int f\bar{g} d\mu \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Demostración. Se sigue del resultado anterior, pues

$$\left| \int f\bar{g} d\mu \right| \leq \int |fg| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \quad \blacksquare$$

Nota 6.2.4 Observemos que

$$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\mu,$$

es casi¹ un producto interior en \mathcal{L}_2 , del que deriva la seminorma $\| \cdot \|_2$, pues

$$\|f\|_2 = \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{1/2} = \left(\int f \bar{f} d\mu \right)^{1/2} = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

Desigualdad de Minkowsky 6.2.5 Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in \mathcal{L}_p$, entonces $f + g \in \mathcal{L}_p$ y

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demostración. Que $f + g \in \mathcal{L}_p$ lo vimos en (6.1.1) y (6.1.3). Veamos la desigualdad.

Para $p = \infty$ lo hemos visto. Para $p = 1$ es obvio, pues

$$\|f + g\|_1 = \int |f + g| d\mu \leq \int (|f| + |g|) d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Para $1 < p < \infty$, si $\int |f + g|^p d\mu = 0$ el resultado es obvio, en caso contrario sea q el exponente conjugado de p , entonces

$$\int (|f + g|^{p-1})^q d\mu = \int |f + g|^{qp-q} d\mu = \int |f + g|^p d\mu < \infty,$$

de donde se sigue que $(f + g)^{p-1} \in \mathcal{L}_q$ y que $\|(f + g)^{p-1}\|_q = \|f + g\|_p^{p/q}$. Ahora por la *desigualdad de Holder*

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p d\mu \leq \int (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f(f + g)^{p-1}| d\mu + \int |g(f + g)^{p-1}| d\mu \\ &\leq \|f\|_p \|(f + g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \|(f + g)^{p-1}\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p/q}, \end{aligned}$$

y dividiendo tenemos el resultado pues $p - p/q = 1$. ■

¹La única propiedad que no se tiene es que $\langle f, f \rangle = 0$ implique $f = 0$, aunque se tiene que $f = 0$ c.s. (por (2.4.24), pág.89, y por tanto en el espacio en el que identifiquemos funciones que coincidan casi seguro será un producto interior.

Corolario 6.2.6 *Para cada $1 \leq p \leq \infty$, \mathcal{L}_p es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y $\|\cdot\|_p$ es una seminorma en él.*

6.2.2 El espacio \mathcal{L}_p para $0 < p < 1$.

Hemos dicho que para $0 < p < 1$, $\|\cdot\|_p$ no es una seminorma en \mathcal{L}_p en general, pues no satisface la desigualdad triangular. Para verlo consideremos conjuntos medibles disjuntos A y B , con $\mu(A) = a$ y $\mu(B) = b$ finitos y no nulos. Ahora sea $f = I_A$ y $g = I_B$, entonces $f + g = I_{A \cup B}$ y

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p &= \left(\int I_{A \cup B} d\mu \right)^{1/p} = (a + b)^{1/p} \\ &> a^{1/p} + b^{1/p} = \|f\|_p + \|g\|_p, \end{aligned}$$

donde la desigualdad se sigue de (6.2.1)(c).

No obstante podemos definir para todo $p \in (0, 1)$ la seudométrica en \mathcal{L}_p

$$d_p(f, g) = \int |f - g|^p d\mu,$$

pues se tienen las propiedades:

- i) $d_p(f, g) \geq 0$,
- ii) $d_p(f, g) = 0$ si y sólo si $f = g$ c.s.,
- iii) $d_p(f, g) = d_p(g, f)$ y
- iv) la desigualdad triangular

$$d_p(f, g) \leq d_p(f, h) + d_p(h, g),$$

siendo esta consecuencia de (6.2.1(c)), pues

$$|f - g|^p \leq (|f - h| + |h - g|)^p \leq |f - h|^p + |h - g|^p.$$

6.2.3 Los espacios L_p .

En general ni las seudométricas d_p para $0 < p < 1$, son métricas, ni las seminormas $\|\cdot\|_p$ para $1 \leq p \leq \infty$, son normas, pues

$$\begin{aligned} \text{para } 0 < p < 1, \quad d_p(f, g) = 0 &\Leftrightarrow f = g \text{ c.s.,} \\ \text{para } 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_p = 0 &\Leftrightarrow f = 0 \text{ c.s.,} \\ \text{para } p = \infty, \quad \|f\|_\infty = 0 &\Leftrightarrow f = 0 \text{ l.c.s.,} \end{aligned}$$

sin embargo identificando convenientemente funciones conseguimos que lo sean y podemos dar una identificación que no depende de p .

Definición. Diremos que dos funciones medibles $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, son *equivalentes*, $f \approx g$, si $f = g$ l.c.s., es decir si $\{f \neq g\}$ es localmente nulo. Es fácil demostrar que $f \approx g$ es una relación de equivalencia. Mediante ella definimos los espacios cocientes para $0 < p \leq \infty$

$$L_p = \mathcal{L}_p / \approx .$$

Lema 6.2.7 Si $0 < p < \infty$ y $f, g \in \mathcal{L}_p$, entonces

$$f = g \quad \text{c.s.} \quad \Leftrightarrow \quad f = g \quad \text{l.c.s.}$$

Demostración. Siempre se tiene “ \Rightarrow ” y la otra implicación se sigue de que el conjunto $\{f \neq g\}$ es σ -finito, pues es unión numerable de los conjuntos $A_n = \{|f - g| > 1/n\}$ y

$$(1/n)^p \mu(A_n) \leq \int_{A_n} |f - g|^p d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(A_n) < \infty,$$

por tanto si es localmente nulo es nulo. ■

Proposición 6.2.8 (a) Para $0 < p \leq \infty$, L_p es un \mathbb{K} -espacio vectorial con las operaciones

$$\alpha[f] = [\alpha f], \quad [f] + [g] = [f + g].$$

(b) Para $0 < p < 1$, (L_p, d_p) es un espacio métrico con la distancia $d_p([f], [g]) = d_p(f, g)$.

Para $1 \leq p \leq \infty$ $(L_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado con la norma $\|[f]\|_p = \|f\|_p$.

Demostración. (a) Sean $f \approx f'$ y $g \approx g'$ de \mathcal{L}_p y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha f \approx \alpha f'$. Que la suma no depende de los representantes, es decir que $f + g \approx f' + g'$, se sigue de que

$$\{f + g \neq f' + g'\} \subset \{f \neq f'\} \cup \{g \neq g'\} \in \mathcal{N}^*.$$

(b) Para $0 < p < 1$ la distancia está bien definida pues para $f \approx f'$ y $g \approx g'$ de \mathcal{L}_p , se sigue del Lema que $d_p(f, f') = d_p(g, g') = 0$, por tanto

$$d_p(f, g) \leq d_p(f, f') + d_p(f', g') + d_p(g', g) = d_p(f', g'),$$

y la otra desigualdad por simetría, por tanto $d_p(f, g) = d_p(f', g')$. Ahora para ver que es métrica basta demostrar que si $f, g \in \mathcal{L}_p$, $d_p(f, g) = 0$ si y sólo si $f \approx g$, y esto se sigue del Lema.

Para $1 \leq p < \infty$ la norma está bien definida pues $\|f\|_p = \|f'\|_p$ ya que por el lema $f = f'$ c.s., por tanto $\|f\|_p = \|f'\|_p$. Ahora para ver que es norma falta ver que para $f \in \mathcal{L}_p$, $\|[f]\|_p = 0$ si y sólo si $[f] = [0]$, y esto se sigue del Lema pues

$$\begin{aligned} \|[f]\|_p = 0 &\Leftrightarrow \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ c.s.} \\ &\Leftrightarrow f = 0 \text{ l.c.s.} \Leftrightarrow [f] = [0], \end{aligned}$$

Para $p = \infty$ la norma está bien definida pues si $f, f' \in \mathcal{L}_\infty$ y $f \approx f'$, $\|f\|_\infty = \|f'\|_\infty$, ya que

$$\begin{aligned} \{|f| > \|f'\|_\infty\} &= (\{|f| > \|f'\|_\infty\} \cap \{f = f'\}) \\ &\cup (\{|f| > \|f'\|_\infty\} \cap \{f \neq f'\}) \\ &= (\{|f'| > \|f'\|_\infty\} \cap \{f = f'\}) \\ &\cup (\{|f| > \|f'\|_\infty\} \cap \{f \neq f'\}) \in \mathcal{N}^*, \end{aligned}$$

por tanto $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$ y la otra desigualdad por simetría. Que es norma es obvio. ■

Nota 6.2.9 Por comodidad hablaremos de L_p como de un espacio de funciones, más que de un espacio cuyos elementos son clases de equivalencia de funciones, relegando esta distinción como dice RUDIN “...al *status de un entendimiento tácito*”.

Ejemplo 6.2.10 Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es finito y μ es la medida de contar, entonces cada función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, se identifica con $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, mediante $f(\omega_i) = x_i$, en cuyo caso para $p < \infty$

$$\|f\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p, \quad \text{y} \quad (L_p, \|\cdot\|_p) = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p),$$

y para $p = \infty$, $\|f\|_\infty = \max\{|x_i|\} = \|x\|_\infty$.

Ejemplo 6.2.11 Por último en el caso particular

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu),$$

para μ la medida de contar, es habitual escribir l_p en vez de L_p y considerar sus elementos f más que como funciones, como sucesiones $f(n) = x_n \in \mathbb{K}$, en cuyos términos para $p < \infty$ l_p es el espacio de las sucesiones $f = (x_n)$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,$$

y para $p = \infty$, l_∞ es el espacio de las sucesiones acotadas.

6.2.4 Compleción de los espacios L_p .

Vamos a demostrar que toda sucesión de Cauchy en L_p es convergente, por ello conviene recordar que una cosa es la convergencia puntual $f_n(x) \rightarrow f(x)$, que a menudo hemos denotado $f_n \rightarrow f$, y otra distinta es la convergencia $f_n \rightarrow f$ en L_p , que significa

$$\text{para } 0 < p < 1, \quad d_p(f, f_n) \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0,$$

$$\text{para } 1 \leq p < \infty, \quad \|f - f_n\|_p \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0,$$

$$\text{para } p = \infty, \quad \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0.$$

Lema 6.2.12 *Sea $0 < p < \infty$ y $f_n \in \mathcal{L}_p$ una sucesión de Cauchy, entonces existe f medible y una subsucesión g_n de f_n tal que $g_n \rightarrow f$ c.s.*

Demostración. Consideremos una subsucesión g_n de f_n tal que para $n \geq 1$ $\|g_{n+1} - g_n\|_p \leq 2^{-n}$ y sea $h_1 = g_1$ y $h_n = g_n - g_{n-1}$, entonces como $g_n = \sum_{i=1}^n h_i$ basta demostrar que la serie $\sum h_i$ es absolutamente convergente c.s. Consideremos la función medible no negativa $h = \sum |h_i|$, entonces por el Lema de Fatou

$$\int |h|^p d\mu \leq \liminf \int \left(\sum_{i=1}^n |h_i| \right)^p d\mu \leq (1 + \|g_1\|_p)^p < \infty,$$

pues por la desigualdad de Minkowsky

$$\left\| \sum_{i=1}^n |h_i| \right\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|h_i\|_p \leq 1 + \|g_1\|_p,$$

por tanto h es p -integrable y por 2.4.7 finita c.s. ■

Teorema 6.2.13 *Para $1 \leq p \leq \infty$, $(L_p, \| \cdot \|_p)$ son espacios de Banach y para $0 < p < 1$ los espacios métricos (L_p, d_p) son completos.*

Demostración. Sea $0 < p < \infty$ y $f_n \in \mathcal{L}_p$ una sucesión de Cauchy, entonces tanto si $0 < p < 1$ como si $1 \leq p < \infty$, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, para el que si $m, n \geq N$

$$\int |f_n - f_m|^p d\mu \leq \epsilon,$$

ahora por el Lema anterior existe una subsucesión g_n de f_n y una función medible f tal que $g_n \rightarrow f$ c.s. Veamos que $f \in \mathcal{L}_p$ y que $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p . Por el *Lema de Fatou* tenemos para $n \geq N$ y $g_k = f_{n_k}$

$$\int |f_n - f|^p d\mu = \int \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_n - f_{n_k}|^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |f_n - f_{n_k}|^p d\mu \leq \epsilon$$

por tanto $f_n - f \in \mathcal{L}_p$, $f = f - f_n + f_n \in \mathcal{L}_p$ y por la desigualdad anterior $f_n \rightarrow f$.

Sea ahora $p = \infty$, y $f_n \in \mathcal{L}_\infty$ una sucesión de Cauchy. Consideremos el conjunto $A \in \mathcal{N}^*$, unión de los conjuntos

$$A_{nm} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\} \in \mathcal{N}^*,$$

entonces $f_n(x)$ es de Cauchy uniformemente en los $x \in A^c$, pues f_n es de Cauchy y por tanto para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, para el que si $m, n \geq N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon,$$

por tanto existe una función medible f , tal que $f = 0$ en A y para $x \in A^c$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$, además haciendo $m \rightarrow \infty$ tendremos que en A^c

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

por tanto $f_n - f \in \mathcal{L}_\infty$, de donde se sigue que $f \in \mathcal{L}_\infty$ y $\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon$, por tanto $f_n \rightarrow f$ (en \mathcal{L}_∞). ■

En la prueba anterior hemos demostrado también el siguiente resultado.

Teorema 6.2.14 *Si $f_n \in \mathcal{L}_p$ es una sucesión de Cauchy, con límite f , entonces: Para $p = \infty$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ l.c.s. y para $0 < p < \infty$, existe una subsucesión de f_n que converge c.s. a f .*

Nota 6.2.15 Denotemos con $\mathcal{S}(\Omega, \mathbb{K})$ ó con \mathcal{S} si no hay confusión, el conjunto de las funciones simples finitas

$$s: \Omega \rightarrow \mathbb{K}, \quad s = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$$

las cuales son acotadas, $\{|s| > \max\{|a_i|\}\} = \emptyset$, por tanto están en L_∞ y

$$\|s\|_\infty \leq \max\{|a_i|\} < \infty.$$

A continuación demostraremos que \mathcal{S} es denso en L_∞ y que

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{s \in \mathcal{S} : \mu\{s \neq 0\} < \infty\},$$

es denso en L_p para $0 < p < \infty$, pero antes veamos que $\tilde{\mathcal{S}} \subset L_p$ para todo p ,

$$\begin{aligned} s \in \mathcal{S} \cap L_p &\Leftrightarrow s = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}, \quad \int |s|^p d\mu = \sum |a_i|^p \mu(A_i) < \infty \\ &\Leftrightarrow s = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}, \quad \mu(A_i) < \infty \text{ para } a_i \neq 0, \\ &\Leftrightarrow s \in \mathcal{S}, \quad \mu\{s \neq 0\} < \infty \Leftrightarrow s \in \tilde{\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Proposición 6.2.16 $\tilde{\mathcal{S}}$ es denso en L_p para $0 < p < \infty$ y \mathcal{S} en L_∞ .

Demostración. Sea $0 < p \leq \infty$ y $f \in \mathcal{L}_p$, basta demostrar que existe una sucesión de funciones simples $s_n \in \mathcal{L}_p$ con $|s_n| \leq |f|$, tal que para $0 < p < 1$, $d_p(s_n, f) \rightarrow 0$ y para $1 \leq p \leq \infty$, $\|s_n - f\|_p \rightarrow 0$. Esencialmente ya lo hemos visto en (2.2.7), para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pues existe una sucesión de funciones simples $|s_n| \leq |f|$, tal que $s_n(x) \rightarrow f(x)$ y la convergencia es uniforme en cada conjunto en el que f es acotada, por tanto si $p = \infty$, como el conjunto $A^c = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ es localmente nulo y f está acotada en A por $\|f\|_\infty < \infty$, tendremos que para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que para $n \geq N$ y todo $x \in A$

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \|s_n - f\|_\infty \leq \epsilon,$$

y si $0 < p < \infty$, como $|s_n - f| \leq 2|f|$ que es p -integrable, tendremos por el Teorema de la convergencia dominada, pág.85 que $\int |s_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$.

Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se aplica a la parte real y a la imaginaria de f y se concluye por la desigualdad triangular. ■

Nota 6.2.17 Recordemos que la *compleción* de un espacio normado (métrico) \mathcal{X} , es un espacio normado (métrico) completo $\overline{\mathcal{X}}$, tal que \mathcal{X} es un subespacio denso de $\overline{\mathcal{X}}$ (el cual existe y es único, ver HEWITT–STROMBERG, p.77). En estos términos el resultado anterior nos dice que cada espacio de Banach L_p es la compleción de un mismo espacio $\tilde{\mathcal{S}}$, con la norma $\|\cdot\|_p$; y L_∞ la de \mathcal{S} , con $\|\cdot\|_\infty$.

Por último veremos, como consecuencia del *Teorema de aproximación* (1.4.9) de la página 26, un caso particular en el que L_p es *separable*, es decir contiene un subconjunto denso y numerable.

Proposición 6.2.18 Sea $0 < p < \infty$ y μ σ -finita en $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, con \mathcal{C} numerable, entonces L_p es separable.

Demostración. Sea $A_n \in \mathcal{A}$ una partición de Ω , con $\mu(A_n) < \infty$ y consideremos las siguientes extensiones de \mathcal{C}

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0 &= \mathcal{C} \cup \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\} \\ \mathcal{C}_1 &= \{A \in \mathcal{A} : A \in \mathcal{C}_0, \text{ ó } A^c \in \mathcal{C}_0\} \\ \mathcal{C}_2 &= \{B_1 \cap \dots \cap B_n : n \in \mathbb{N}, B_i \in \mathcal{C}_1\} \\ \mathcal{C}_3 &= \{C_1 \cup \dots \cup C_m : m \in \mathbb{N}, C_i \in \mathcal{C}_2\}\end{aligned}$$

las cuales son numerables y \mathcal{C}_3 es un álgebra que genera \mathcal{A} . Consideremos ahora el conjunto numerable de funciones simples de L_p

$$\mathcal{S}' = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i I_{E_i} : r_i \in \mathbb{Q}, E_i \in \mathcal{C}_3, \text{ disjuntos y } \mu(E_i) < \infty \right\},$$

(en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ consideramos los $r_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) y veamos que es denso en L_p , para lo cual aplicamos el resultado anterior y basta demostrar que dada una función simple $s = \sum_{i=1}^n a_i I_{B_i} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{L}_p$ (por tanto tal que $\mu(B_i) < \infty$), para todo $\epsilon > 0$ hay una función $f = \sum_{i=1}^n r_i I_{E_i} \in \mathcal{S}'$, tal que $\|s - f\|_p \leq \epsilon$. Haremos el caso $1 \leq p < \infty$, el caso $0 < p < 1$ es similar. Primero elegimos $r_i \in \mathbb{Q}$, próximos a a_i , tales que

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i I_{B_i} - \sum_{i=1}^n r_i I_{B_i} \right\|_p \leq \sum_{i=1}^n |a_i - r_i| \|I_{B_i}\|_p \leq \epsilon/2,$$

y ahora aplicando el *Teorema de aproximación* (1.4.9), pág.26 elegimos los E_i , tales que

$$\left\| \sum_{i=1}^n r_i I_{B_i} - \sum_{i=1}^n r_i I_{E_i} \right\|_p \leq \sum_{i=1}^n |r_i| \|I_{B_i \triangle E_i}\|_p \leq \epsilon/2. \quad \blacksquare$$

Ejercicios

Ejercicio 6.2.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita. Demostrar que

$$\{\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \lambda \ll \mu\},$$

es un subespacio vectorial cerrado del espacio de Banach $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, que es isomorfo a $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Dar un isomorfismo.

Ejercicio 6.2.2 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible. Demostrar que $\mu_f(B) = \mu[f^{-1}(B)]$ es una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, y que si $f \in L_\infty$, entonces

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \mu_f[B(z, \epsilon)] > 0, \forall \epsilon > 0\},$$

es un compacto, donde $B(z, \epsilon) = \{z' : |z' - z| < \epsilon\}$ y que

$$\|f\|_\infty = \sup\{|z| : z \in K\}.$$

Ejercicio 6.2.3 Demostrar que si $0 < r < p < s < \infty$, entonces $L_r \cap L_s \subset L_p \subset L_r + L_s$.

Ejercicio 6.2.4 Demostrar que si $0 < r < s < \infty$ y $f \in L_r \cap L_s$, entonces $f \in L_p$, para todo $p \in [r, s]$; que la función

$$\phi(p) = \log \int |f|^p d\mu,$$

es convexa en $[r, s]$ y que $\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$.

Ejercicio 6.2.5 Demostrar que un espacio normado \mathcal{E} es completo sii para cada sucesión $x_n \in \mathcal{E}$

$$\sum \|x_n\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum x_n \quad \text{es convergente.}$$

Ejercicio 6.2.6 Demostrar la desigualdad de Holder generalizada:

Si $1 \leq p_1, \dots, p_n \leq \infty$ son tales que $\sum (1/p_i) = 1/r \leq 1$ y $f_i \in L_{p_i}$, entonces

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L_r, \quad \text{y} \quad \left\| \prod_{i=1}^n f_i \right\|_r \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Ejercicio 6.2.7 Demostrar que si $f, g \in \mathcal{L}_p$ para $0 < p < 1$, entonces

$$\|f + g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$

Ejercicio 6.2.8 Demostrar que si $f \in L_p$ para algún $0 < p < \infty$, entonces $\|f\|_r \rightarrow \|f\|_\infty$, cuando $r \rightarrow \infty$.

Ejercicio 6.2.9 Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y $0 < r < s < \infty$, entonces $L_s \subset L_r$ y que para $f \in L_s$

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s \mu(\Omega)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}.$$

Ejercicio 6.2.10 Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y f_n, f son medibles, entonces:

(a) Si $f_n \rightarrow f$ c.s., entonces $f_n \rightarrow f$ en medida (es decir que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq N$, $\mu\{|f_n - f| > \epsilon\} < \epsilon$).

(b) Si $f_n \rightarrow f$ en L_p (con $1 \leq p \leq \infty$), entonces $f_n \rightarrow f$ en medida.

Ejercicio 6.2.11 Demostrar la **Desigualdad de Jensen**, es decir que si $\mu(\Omega) = 1$, $f: \Omega \rightarrow (a, b)$ es medible e integrable y $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces

$$\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f d\mu.$$

Ejercicio 6.2.12 Demostrar que si $\mu(\Omega) = 1$ y f, g son medibles y positivas y tales que $fg \geq 1$, entonces

$$\int f d\mu \cdot \int g d\mu \geq 1.$$

Ejercicio 6.2.13 Demostrar que si $0 < r < s \leq \infty$, entonces $l_r \subset l_s$.

6.3 Espacios duales

A lo largo de la lección entenderemos que \mathcal{E} , \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 son espacios normados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} .

Definición. Dada una aplicación lineal $T : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$, definimos su *norma* como

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|/\|x\| : 0 \neq x \in \mathcal{E}_1\},$$

y diremos que T es acotada si $\|T\| < \infty$.

Nota 6.3.1 Entendemos que sobre cada elemento opera la norma que le corresponde, aunque las denotemos igual por comodidad. Por otra parte en la definición anterior podemos restringirnos a los x con $\|x\| = 1$, sin que el supremo cambie, pues para $r \in \mathbb{K}$ y $x \in \mathcal{E}_1$, $\|T(rx)\| = |r|\|T(x)\|$. Por último observemos que T es *acotada* si y sólo si existe $k \in [0, \infty)$, tal que para cualquier $x \in \mathcal{E}_1$

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|,$$

y que $\|T\|$ es el ínfimo de estas constantes k .

No toda aplicación lineal entre espacios normados es continua, como tampoco tiene por qué ser acotada. A continuación vemos que sin embargo estas dos cosas son equivalentes.

Teorema 6.3.2 *Para una aplicación lineal $T : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ son equivalentes:*

- (a) T es uniformemente continua.
- (b) T es continua en un punto.
- (c) T es acotada.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Obvio.

(b) \Rightarrow (c) Supongamos que T es continua en y , entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x - y\| \leq \delta$, entonces $\|T(x - y)\| = \|T(x) - T(y)\| \leq \epsilon$, es decir que si $\|z\| \leq \delta$, entonces $\|T(z)\| \leq \epsilon$. Se sigue que para todo $x \neq 0$, si llamamos $z = \delta x/\|x\|$, $\|z\| = \delta$ y

$$\|T(x)\| = \|x\|\|T(z)\|/\delta \leq (\epsilon/\delta)\|x\|.$$

(c) \Rightarrow (a) Es obvio pues

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq \|T\|\|x - y\|. \quad \blacksquare$$

Teorema 6.3.3 *Sean \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 \mathbb{K} -espacios normados, entonces el conjunto $\mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ de las aplicaciones lineales continuas $T : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$, con la suma $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$ y el producto por escalares $(aT)(x) = aT(x)$ y el operador norma definido al principio de la lección, es un espacio normado. Además es de Banach si \mathcal{E}_2 es de Banach.*

Demostración. Si $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ entonces se tiene que $T_1 + T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, pues es lineal y acotada

$$\|(T_1 + T_2)(x)\| \leq \|T_1(x)\| + \|T_2(x)\| \leq (\|T_1\| + \|T_2\|)\|x\|,$$

y como consecuencia $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$, el resto de propiedades son también elementales. Veamos que es completo si lo es \mathcal{E}_2 , para ello sea T_n una sucesión de Cauchy, entonces

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|,$$

y por tanto $T_n(x) \in \mathcal{E}_2$ es de Cauchy y por tanto tiene límite $T(x)$, veamos que T es lineal, continua y que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Es lineal pues si $x, y \in \mathcal{E}_1$, entonces

$$\begin{aligned} \|T(x + y) - T(x) - T(y)\| &\leq \|T(x + y) - T_n(x + y)\| + \\ &+ \|T_n(x) - T(x)\| + \|T_n(y) - T(y)\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

y para $a \in \mathbb{K}$, $\|T(ax) - aT(x)\| \leq \|T(ax) - T_n(ax)\| + \|aT_n(x) - aT(x)\| \rightarrow 0$. Ahora como T_n es de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N$, $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$, por tanto

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \epsilon\|x\|,$$

para todo x y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ se sigue que para todo x y $m \geq N$, $\|T(x) - T_m(x)\| \leq \epsilon\|x\|$, por tanto $T - T_m \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, por tanto $T \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ y $\|T - T_m\| \leq \epsilon$, para todo $m \geq N$. ■

Definición. Dado un espacio normado \mathcal{E} , denotaremos con \mathcal{E}' el espacio vectorial dual algebraico de las funciones lineales $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$, y con $\mathcal{E}^* = \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ el espacio de las funciones lineales continuas, al que llamaremos *dual topológico* o simplemente dual.

Teorema 6.3.4 *El dual \mathcal{E}^* de un espacio normado \mathcal{E} es un espacio de Banach con la norma definida en él*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}.$$

Demostración. Es una simple consecuencia de (6.3.3), pues \mathbb{K} es completo. ■

Definición. Diremos que una aplicación $T : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ es una *isometría* si es lineal y para cualquier $x \in \mathcal{E}_1$

$$\|T(x)\| = \|x\|.$$

Diremos que es un *isomorfismo* si además es sobre.

Nota 6.3.5 Observemos que una isometría siempre es inyectiva, pues al ser lineal

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\|,$$

de donde también se sigue que conserva las distancias.

Nota 6.3.6 Hay una aplicación lineal y continua natural entre un espacio normado \mathcal{E} y su bidual \mathcal{E}^{**} , dada por

$$\pi: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{**}, \quad \pi(x) = \hat{x}, \quad \hat{x}(f) = f(x),$$

que está bien definida, es decir que $\hat{x} \in \mathcal{E}^{**}$, es obvio pues \hat{x} es lineal y acotada, ya que

$$|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|x\| \cdot \|f\| \quad \Rightarrow \quad \|\hat{x}\| \leq \|x\|,$$

y π es lineal y continua, pues $\|\pi(x)\| = \|\hat{x}\| \leq \|x\|$, por tanto $\|\pi\| \leq 1$. Además como consecuencia del

Teorema de Hahn–Banach 6.3.7 *Sea \mathcal{E} un espacio normado, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un subespacio y $f_0 \in \mathcal{F}^*$, entonces existe $f \in \mathcal{E}^*$, tal que $f|_{\mathcal{F}} = f_0$ y $\|f\| = \|f_0\|$.*

se tiene que π es una isometría, pues basta considerar para cada $x \neq 0$, la recta $\mathcal{F} = \{\lambda x\}$ y $f_0(\lambda x) = \lambda \|x\|$, para la que $\|f_0\| = 1$; y por el teorema existe f , extensión de f_0 con $\|f\| = 1$, por tanto

$$\|x\| = |f(x)| = |\hat{x}(f)| \leq \|\hat{x}\|.$$

Por tanto π es inyectiva, de donde se sigue que \mathcal{E} es isomorfo a $\pi(\mathcal{E})$. En general π no es sobre, pero en caso de serlo — $\pi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{**}$ —, diremos que \mathcal{E} es *reflexivo*, en cuyo caso es de Banach, pues lo es \mathcal{E}^{**} y son isomorfos. Observemos que no hemos dicho que \mathcal{E} sea reflexivo si es isomorfo a su bidual \mathcal{E}^{**} , sino “que lo sea con la aplicación natural π ”. De hecho hay un ejemplo de R.C. JAMES (ver comentarios al final del tema), de un espacio de Banach isomorfo a su bidual, pero no reflexivo. En la siguiente lección veremos que los espacios L_p , para $1 < p < \infty$ son reflexivos.

Finalizamos la lección analizando el dual topológico de un simple espacio normado como es el espacio de las funciones continuas en el intervalo $I = [a, b]$

$$\mathcal{C}(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \text{continuas}\},$$

con la norma del supremo. Con lo que veremos la profunda relación existente entre las medidas finitas en los borelianos de I y las funciones lineales y continuas en $\mathcal{C}(I)$. Estos hechos y sus generalizaciones forman la base para muchas de las aplicaciones de la Teoría de la medida.

Sea μ una medida finita en $\mathcal{B}(I)$. Entonces el funcional

$$\Lambda: \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Lambda(f) = \int f d\mu,$$

es lineal y positivo, es decir que si $f \geq 0$, entonces $\Lambda(f) \geq 0$. Veremos en el primer *Teorema de Representación de Riesz* (7.3.1), pág.249, que estos son los únicos funcionales lineales y positivos de $\mathcal{C}(I)$.

Además en este caso particular si consideramos en $\mathcal{C}(I)$ la norma del supremo, entonces Λ es continuo, pues

$$\|\Lambda(f)\| = \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu \leq \mu(I) \|f\|_\infty,$$

y $\|\Lambda\| \leq \|\mu\|$. Y si tenemos una medida real μ , podemos definir el funcional lineal y continuo

$$\Lambda(f) = \int f d\mu,$$

pues es diferencia de dos funcionales lineales y continuos

$$\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^- = \lambda^+(f) - \lambda^-(f).$$

Veremos que el segundo *Teorema de representación de Riesz* (7.3.7), pág.255, asegura que todo funcional lineal y continuo en $\mathcal{C}(I)$, es decir de $\mathcal{C}(I)^*$, es de esta forma.

6.4 El espacio dual de L_p

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean $1 \leq p, q \leq \infty$, conjugados. Entonces para cada $g \in \mathcal{L}_q$ podemos definir el funcional

$$T_g : \mathcal{L}_p \rightarrow \mathbb{K}, \quad T_g(f) = \int f g \, d\mu,$$

y puesto que si $f_1 \approx f_2$, se tiene $T_g(f_1) = T_g(f_2)$ (pues $f_1 g = f_2 g$ c.s), entonces podemos extender T_g del modo obvio a L_p

$$T_g : L_p \longrightarrow \mathbb{K},$$

la cual es lineal y continua, es decir $T_g \in L_p^*$, puesto que la *desigualdad de Hölder* nos dice que para cualquier $f \in \mathcal{L}_p$

$$|T_g(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p \quad \Rightarrow \quad \|T_g\| \leq \|g\|_q,$$

podemos entonces definir la siguiente aplicación

$$T : \mathcal{L}_q \longrightarrow L_p^*, \quad g \rightarrow T(g) = T_g,$$

pero además si $g_1, g_2 \in \mathcal{L}_q$ y $g_1 \approx g_2$, entonces $T(g_1) = T(g_2)$, pues para todo $f \in \mathcal{L}_p$, $f g_1 = f g_2$ c.s. y

$$T_{g_1}(f) = \int f g_1 \, d\mu = \int f g_2 \, d\mu = T_{g_2}(f),$$

y por tanto T induce una aplicación lineal, que llamamos igual

$$T : L_q \longrightarrow L_p^*, \quad g \rightarrow T(g) = T_g,$$

y se tiene el siguiente resultado —que es uno de aquellos a los que hacíamos referencia cuando definimos \mathcal{L}_∞ —.

Teorema 6.4.1 *Para $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados, la aplicación anterior $T : L_q \longrightarrow L_p^*$ es una isometría.*

Demostración. Tenemos que demostrar que para todo $g \in \mathcal{L}_q$, $\|T(g)\| = \|g\|_q$, pero ya hemos visto que $\|T(g)\| = \|T_g\| \leq \|g\|_q$, por tanto basta demostrar la otra desigualdad. Además si $\|g\|_q = 0$ el resultado es obvio, por tanto podemos suponer que $\|g\|_q > 0$

Para $p = 1$, $q = \infty$, tomemos $g \in \mathcal{L}_\infty$ y un $0 < \epsilon < \|g\|_\infty$, entonces el conjunto $C = \{|g(x)| > \|g\|_\infty - \epsilon\}$ no es localmente nulo, por tanto existe un medible $B \subset C$, con $0 < \mu(B) < \infty$. Consideremos la función de \mathcal{L}_1 ,

$$f = \begin{cases} \frac{\bar{g}}{|g|}, & \text{en } B, \\ 0, & \text{en } B^c, \end{cases}$$

para la que $|f| = I_B$, $\|f\|_1 = \mu(B)$ y $fg = I_B|g|$, por tanto

$$\begin{aligned} (\|g\|_\infty - \epsilon)\mu(B) &\leq \int_B |g| d\mu = \int fg d\mu \\ &= |T_g(f)| \leq \|T_g\| \|f\|_1 = \|T_g\| \mu(B), \end{aligned}$$

por tanto $\|g\|_\infty - \epsilon \leq \|T_g\|$ y como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, se tiene $\|g\|_\infty \leq \|T_g\|$ y por tanto la igualdad.

Para $p > 1$, $q < \infty$, tomemos $g \in \mathcal{L}_q$, con $\|g\|_q > 0$, por tanto $B = \{g \neq 0\}$ es σ -finito y $\mu(B) > 0$, por tanto B no es localmente nulo y $\|I_B\|_\infty = 1$. Ahora si definimos

$$f = \begin{cases} \frac{\bar{g}}{|g|^{2-q}}, & \text{si } g \neq 0, \\ 0, & \text{si } g = 0, \end{cases}$$

tendremos que $f \in L_p$, pues para $q = 1$ y $p = \infty$, $|f| = I_B$, por tanto $\|f\|_\infty = 1$ y $fg = |g|$ y para $1 < p, q < \infty$, $|f| = |g|^{q-1}$, por tanto $|f|^p = |g|^q = fg$, de donde $f \in \mathcal{L}_p$ y en cualquiera de los dos casos

$$\int |g|^q d\mu = \int fg d\mu = T_g(f) = |T_g(f)| \leq \|T_g\| \|f\|_p,$$

por tanto $\|g\|_q \leq \|T_g\|$. ■

La cuestión que nos planteamos ahora es si la isometría

$$T: L_q \hookrightarrow L_p^*,$$

del resultado anterior, es sobre y por tanto T es un isomorfismo entre L_q y L_p^* . Demostraremos que:

Para $1 < p, q < \infty$ es cierto siempre, $L_q \approx L_p^*$.

Para $p = 1$ es cierto si μ es σ -finita, $L_\infty \approx L_1^*$, (también en ciertas condiciones topológicas y nuestro espacio es Hausdorff y localmente compacto, como veremos en la lección ??, página ??, del tema de medida y topología).

Y para $p = \infty$ la contestación es negativa, T no establece en general un isomorfismo entre L_1 y L_∞^* . De hecho si μ es finita la isometría T es sobre si y sólo si L_1 es finito dimensional y si y sólo si L_∞ es finito dimensional (ver COHN, p.153, ej.3).

Pero antes de establecer estos resultados necesitamos otros previos.

Lema 6.4.2 Sean p y q conjugados con $1 \leq p < \infty$, $\phi \in L_p^*$, $g \in \mathcal{L}_q$ y $E \in \mathcal{A}$ tales que para todo $B \in \mathcal{A}$, con $\mu(B) < \infty$

$$\phi(I_{B \cap E}) = \int I_B g \, d\mu,$$

entonces $\|g\|_q \leq \|\phi\|$.

Demostración. Consideremos $\varpi, T_g: L_p \rightarrow \mathbb{K}$, definidos por

$$\begin{aligned} \varpi(f) &= \phi(f I_E), \quad T_g(f) = \int f g \, d\mu, \\ |\varpi(f)| &= |\phi(f I_E)| \leq \|\phi\| \|f I_E\|_p \leq \|\phi\| \|f\|_p, \end{aligned}$$

por tanto $\|\varpi\| \leq \|\phi\|$ es acotada, de donde $\varpi, T_g \in L_p^*$ y por hipótesis coinciden en las funciones indicador $I_B \in \tilde{\mathcal{S}}$ y por linealidad en todo $\tilde{\mathcal{S}}$ y como este es denso en L_p , $\varpi = T_g$, por tanto $\|g\|_q = \|T_g\| = \|\varpi\| \leq \|\phi\|$.

■

Lema 6.4.3 Sea $1 \leq q \leq \infty$ y sea $g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ medible para la que existen $g_n \in L_q$, tales que $|g_n| \uparrow |g|$ y $\sup \|g_n\|_q < \infty$, entonces $g \in L_q$ y $\|g_n\|_q \rightarrow \|g\|_q$.

Demostración. Para $q < \infty$ $\|g_n\|_q \leq \|g_{n+1}\|_q \uparrow \sup \|g_n\|_q$ y se sigue del Teorema de la convergencia monótona, pág.79 que

$$\int |g|^q \, d\mu = \lim \int |g_n|^q \, d\mu = \sup \|g_n\|_q^q < \infty,$$

y para $q = \infty$ como $\|g_n\|_\infty \leq \sup_m \|g_m\|_\infty = k < \infty$, $\{|g_n(x)| > k\}$ es localmente nulo, como también lo es

$$\{|g| > k\} \subset \cup \{|g_n(x)| > k\},$$

por tanto $g \in L_\infty$ y $\|g\|_\infty \leq k$. Además como $\|g_n\|_\infty \leq \|g_{n+1}\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, pues

$$\{|g_n| > c\} \subset \{|g_{n+1}| > c\} \subset \{|g| > c\},$$

(y si uno es localmente nulo también el de su izquierda), tenemos que $\|g_n\|_\infty \uparrow k = \|g\|_\infty$. ■

Lema 6.4.4 *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y para $A \in \mathcal{A}$ consideremos el espacio de medida $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$. Entonces la aplicación*

$$s: L_p(A) \longrightarrow L_p(\Omega), \quad g \longrightarrow s(g) = g_A,$$

para $g_A(x) = g(x)$ si $x \in A$ y $g_A(x) = 0$ si $x \in A^c$, es una sección de la aplicación restricción

$$r: L_p(\Omega) \longrightarrow L_p(A), \quad f \longrightarrow r(f) = f|_A,$$

($r \circ s = id$) que es una isometría, $\|g\|_p = \|g_A\|_p$. Además si $\phi \in L_p^(\Omega)$, entonces $s^*(\phi) = \phi \circ s = \phi_A \in L_p^*(A)$, que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} L_p(A) & \xrightarrow{s} & L_p(\Omega) \\ \phi_A \searrow & & \swarrow \phi \\ & \mathbb{K} & \end{array}$$

verifica $\phi_A(f) = \phi(f_A)$ y $\|\phi_A\| \leq \|\phi\|$.

Demostración. Es trivial. ■

Lema 6.4.5 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ -finito, entonces existe $h \in \mathcal{L}_1(\mu)$ positiva y una probabilidad $\lambda(A) = \int_A h d\mu$, tal que para cada $p \in [1, \infty)$*

$$\Phi_p: L_p(\lambda) \longrightarrow L_p(\mu), \quad \Phi_p(f) = h^{1/p} f,$$

son isomorfismos isométricos (para $p = \infty$, $L_\infty(\lambda) = L_\infty(\mu)$ y $\Phi_\infty = Id$).

Demostración. Sea $A_n \in \mathcal{A}$ una partición de Ω , con $0 < \mu(A_n) < \infty$, (que podemos pedir que sean positivos es simple, basta unir los de medida nula con cualquier A_n de medida positiva) y consideremos la función $h \in L_1$ estrictamente positiva y la probabilidad λ

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} I_{A_n},$$

$$\lambda(A) = \int_A h d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap A_n)}{2^n \mu(A_n)},$$

para la que $\mathcal{N}^*(\mu) = \mathcal{N}(\mu) = \mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{N}^*(\lambda)$, pues μ es σ -finita, λ finita y $\lambda \ll \mu \ll \lambda$, por tanto $L_\infty(\mu) = L_\infty(\lambda)$. Ahora para $1 \leq p < \infty$, la biyección lineal Φ_p es isometría pues

$$\int |f|^p d\lambda = \int |f|^p d\mu = \int |\Phi_p(f)|^p d\mu \Rightarrow \|f\|_p = \|\Phi_p(f)\|_p. \quad \blacksquare$$

Lema 6.4.6 *Toda aplicación lineal y continua $F: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ entre espacios normados, define otra entre los duales, a la que llamamos dual o traspuesta*

$$F^*: \mathcal{E}_2^* \rightarrow \mathcal{E}_1^*, \quad F^*(f) = f \circ F,$$

además si F es un isomorfismo isométrico F^* también lo es.

Demostración. Es un simple ejercicio. \blacksquare

Teorema 6.4.7 (a) *Para $1 < p, q < \infty$ conjugados, la isometría $T: L_q \rightarrow L_p^*$ es sobre, por tanto ambos espacios son isomorfos.*

(b) *Si el espacio es σ -finito, $T: L_\infty \rightarrow L_1^*$ es sobre, por tanto son isomorfos.*

Demostración. Queremos demostrar que T es sobre, es decir que dada $\phi \in L_p^*$, existe $g \in L_q$ tal que

$$\forall f \in L_p, \quad \phi(f) = \int fg d\mu.$$

Caso I.- Para μ finita y $1 \leq p < \infty$.

En tal caso $I_A \in L_p$ para cada $A \in \mathcal{A}$ y podemos definir

$$\lambda: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \lambda(A) = \phi(I_A),$$

la cual es aditiva, pues para $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos,

$$\lambda(A \cup B) = \phi(I_{A \cup B}) = \phi(I_A + I_B) = \lambda(A) + \lambda(B),$$

y es numerablemente aditiva por (4.3.4) de la página 140, pues dados $A_n \downarrow \emptyset$, $\lambda(A_n) \rightarrow 0$, pues

$$|\lambda(A_n)| = |\phi(I_{A_n})| \leq \|\phi\| \|I_{A_n}\|_p = \|\phi\| \mu(A_n)^{1/p} \rightarrow 0,$$

(observemos que esto es cierto para $p < \infty$), por tanto $\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$ y $\lambda \ll \mu$, pues si

$$\begin{aligned} \mu(A) = 0 &\Rightarrow I_A = 0 \text{ c.s.} \Rightarrow I_A \approx 0 \\ &\Rightarrow \lambda(A) = \phi(I_A) = 0, \end{aligned}$$

se sigue del *Teorema de Radon-Nikodym* que existe $g \in L_1$, tal que

$$\phi(I_A) = \lambda(A) = \int I_A g \, d\mu,$$

para todo A medible. Ahora si demostramos que $g \in L_q$ hemos terminado, pues en tal caso $T(g) = T_g \in L_p^*$ y $\phi(f) = T_g(f)$, para $f = I_A$, por tanto por linealidad para $f \in \tilde{\mathcal{S}}$ y por densidad para toda $f \in L_p$.

Veamos entonces que $g \in L_q$, lo cual es obvio si es acotada, pues μ es finita y por lo mismo $g_n = gI_{E_n} \in L_q$, para $E_n = \{|g| \leq n\}$. Ahora bien para cada $B \in \mathcal{A}$

$$\phi(I_{B \cap E_n}) = \int I_{B \cap E_n} g \, d\mu = \int I_B g_n \, d\mu,$$

y por el Lema (6.4.2), $\|g_n\|_q \leq \|\phi\|$, por tanto $\sup \|g_n\|_q < \infty$ y como $|g_n| \uparrow |g|$, se sigue del Lema (6.4.3) que $g \in L_q$.

Caso II.- μ es σ -finita y $1 \leq p < \infty$.

Es una simple consecuencia del caso anterior, de (6.4.5), (6.4.6) y del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L_q(\lambda) & \xrightarrow{T} & L_p(\lambda)^* \\ \Phi_q \downarrow & & \uparrow \Phi_p^* \\ L_q(\mu) & \xrightarrow{T} & L_p(\mu)^* \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g & \longrightarrow & T_g \\ \downarrow gh^{1/q} & & \uparrow \\ gh^{1/q} & \longrightarrow & T_{gh^{1/q}} \end{array}$$

pues para cada $f \in L_p(\lambda)$ y $1 < p, q < \infty$

$$\begin{aligned} \Phi_p^*[T_{gh^{1/q}}](f) &= T_{gh^{1/q}}(fh^{1/p}) = \int fh^{1/p} gh^{1/q} \, d\mu \\ &= \int fgh \, d\mu = \int fgh \, d\lambda = T_g(f), \end{aligned}$$

(para $q = \infty$, $p = 1$ y se sigue del mismo modo) y hemos demostrado (b) y parte de (a).

Caso III.- Veamos ahora el caso general de (a), para ello consideremos el conjunto

$$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{A} : (B, \mathcal{A}_B, \mu_B), \text{ es } \sigma\text{-finito}\},$$

entonces por el caso anterior y el Lema (6.4.4), para cada $A \in \mathcal{C}$, existe $g_A \in L_q$, que se anula fuera de A , tal que para toda $f \in L_p$ (para $p < \infty$)

$$\phi(fI_A) = \int f g_A d\mu, \quad \|g_A\|_q \leq \|\phi\|,$$

y si consideramos una sucesión $C_n \in \mathcal{C}$, tal que

$$\|g_{C_n}\|_q \uparrow \sup\{\|g_A\|_q : A \in \mathcal{C}\} = k \leq \|\phi\| < \infty,$$

entonces $C = \cup C_n \in \mathcal{C}$. Demostremos que las funciones g_A se solapan bien, que $\|g_C\|_q$ alcanza el supremo k y que $g_C \in L_q$ satisface el resultado.

Si $A, B \in \mathcal{C}$, $A \subset B$, entonces para cada $f \in L_p$

$$\int f g_A d\mu = \phi(fI_A) = \phi(fI_A I_B) = \int f I_A g_B d\mu,$$

por lo que $T(g_A) = T(I_A g_B)$ y como T es inyectiva, $g_A = g_B I_A$ c.s. De esto se sigue por un lado que $\|g_A\|_q \leq \|g_B\|_q$ y por tanto como $C_n \subset C$

$$\|g_{C_n}\|_q \leq \|g_C\|_q \leq k \Rightarrow \|g_C\|_q = k \Rightarrow \|g_B\|_q \leq \|g_C\|_q \quad \forall B \in \mathcal{C},$$

y por otro que para $A, D \in \mathcal{C}$ disjuntos, $g_{A \cup D} I_A = g_A$ c.s. y $g_{A \cup D} I_D = g_D$ c.s. y por tanto $g_{A \cup D} = g_A + g_D$ c.s., pero además para $q < \infty$

$$|g_{A \cup D}|^q = |g_A|^q + |g_D|^q \text{ c.s.} \Rightarrow \|g_{A \cup D}\|_q^q = \|g_A\|_q^q + \|g_D\|_q^q,$$

de donde se sigue que para todo $D \in \mathcal{C}$ disjunto con C , $g_D = 0$ c.s., pues

$$\|g_C\|_q^q \leq \|g_C\|_q^q + \|g_D\|_q^q = \|g_{C \cup D}\|_q^q \leq \|g_C\|_q^q,$$

por tanto $g_C \in L_q$ satisface el resultado, pues si $f \in L_p$ entonces

$$\phi(f) = \phi(fI_C) + \phi(fI_{C^c}) = \int f g_C d\mu,$$

pues si llamamos $h = fI_{C^c} \in L_p$, $\phi(h) = 0$, ya que $D = \{h \neq 0\}$ es σ -finito, por tanto $C, D \in \mathcal{C}$ y son disjuntos, por tanto $g_D = 0$ c.s. y

$$\phi(h) = \phi(hI_D) = \int h g_D d\mu = 0. \quad \blacksquare$$

Corolario 6.4.8 Para $1 < p < \infty$, los espacios L_p son reflexivos.

Demostración. Para q el conjugado de p , tenemos los isomorfismos $T_p: L_p \rightarrow L_q^*$ y $T_q: L_q \rightarrow L_p^*$ y para la isometría natural $\pi: L_p \rightarrow L_p^{**}$, $\pi = (T_q^*)^{-1} \circ T_p$, es decir $T_q^* \circ \pi = T_p$, pues si $f \in L_p$ y $g \in L_q$,

$$\begin{aligned} T_p(f)(g) &= \int fg \, d\mu = T_q(g)(f) = \hat{f}(T_q(g)) \Rightarrow \\ \Rightarrow T_p(f) &= \hat{f} \circ T_q = T_q^*(\hat{f}) = T_q^*[\pi(f)]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Veamos algunos contraejemplos relacionados con la isometría de (6.4.1).

Ejemplo 6.4.9 Veamos que para $p = 1$ la isometría entre L_∞ y L_1^* no es necesariamente sobre si el espacio no es σ -finito. Sea $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ con μ la medida de contar y

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ó } A^c \text{ es numerable}\},$$

en cuyo caso si $f \in L_1$, el medible $\{f \neq 0\}$ es σ -finito por (2.4.23), pág.89, por tanto finito ó numerable y para $P = (0, \infty)$ y $N_f = \{f \neq 0\}$, $P \cap N_f \in \mathcal{A}$ y podemos definir

$$\phi: L_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(f) = \int_{P \cap N_f} f \, d\mu,$$

(donde observemos que el conjunto en el que integramos debe ser medible). Veamos que ϕ es lineal

$$\begin{aligned} \phi(f + g) &= \int_{P \cap N_{f+g}} f + g = \int_{P \cap (N_f \cup N_g)} f + g \\ &= \int_{P \cap (N_f \cup N_g)} f + \int_{P \cap (N_f \cup N_g)} g = \int_{P \cap N_f} f + \int_{P \cap N_g} g, \end{aligned}$$

y continua, pues es acotada

$$|\phi(f)| \leq \int_{P \cap N_f} |f| \, d\mu \leq \|f\|_1,$$

por tanto $\|\phi\| \leq 1$. Sin embargo no existe ninguna $g \in L_\infty$, tal que

$$\phi(f) = \int fg \, d\mu,$$

pues en caso contrario tomando $f = I_{\{a\}} \in L_1$,

$$g(a) = \int fg \, d\mu = \phi(f) = \int_{P \cap \{a\}} f,$$

que vale 0 si $a \leq 0$ y 1 si $a > 0$, es decir $g = I_{(0, \infty)}$, pero $(0, \infty)$ no es medible.

Veamos ahora que para $p = \infty$ el resultado no es válido aunque el espacio sea σ -finito como lo es $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], m)$. En este caso se tiene que $\mathcal{C}[0, 1] \subset L_\infty$ y dada $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}[0, 1]^*$, $\tilde{\phi}(f) = f(0)$, existe por el Teorema de Hahn–Banach (6.3.7), pág.212, $\phi \in L_\infty^*$, tal que $\phi(f) = f(0)$ para toda $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ y para esta ϕ no puede existir $g \in L_1$, tal que $\phi(f) = \int fg \, dm$, pues tomando una sucesión $f_n \in \mathcal{C}[0, 1]$, con $f_n(0) = 1$, $f_n = 0$ en $[1/n, 1]$ y lineal en $[0, 1/n]$, tendríamos que $f_n \downarrow 0$ c.s. y por el TCD $\int f_n g \rightarrow 0$, mientras que $\phi(f_n) = 1$.

Ejercicios

Ejercicio 6.4.1 Sea $g \in L_\infty$, demostrar que para $1 \leq p < \infty$, si $f \in L_p$, $gf \in L_p$, que la aplicación $G: L_p \rightarrow L_p$, $G(f) = gf$, es lineal y continua y que $\|G\| = \|g\|_\infty$.

6.5 Tipos de convergencias

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ funciones medibles. En esta lección consideraremos distintas nociones de convergencia de f_n a f y estudiaremos sus relaciones.

Definición. Diremos que $f_n \rightarrow f$ *casi seguro* (c.s) si

$$\mu\{x \in \Omega : f_n(x) \text{ no converge a } f(x)\} = 0.$$

Diremos que $f_n \rightarrow f$ *casi uniformemente* si para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que f_n converge uniformemente a f en A y $\mu(A^c) < \epsilon$.

Diremos que $f_n \rightarrow f$ en *medida* si para todo $\epsilon > 0$

$$\mu\{|f_n - f| \geq \epsilon\} \rightarrow 0.$$

Para $0 < p \leq \infty$ diremos que $f_n \rightarrow f$ (en \mathcal{L}_p) si las $f_n, f \in \mathcal{L}_p$ y $d_p(f_n, f) \rightarrow 0$.

Definición. Diremos que f_n es de *Cauchy casi seguro* si

$$\mu\{x \in \Omega : f_n(x) \text{ no es de Cauchy}\} = 0.$$

Diremos que f_n es de *Cauchy casi uniformemente* si para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que f_n es de Cauchy uniformemente en A y $\mu(A^c) < \epsilon$.

Diremos que f_n es de *Cauchy en medida* si para todo $\epsilon > 0$

$$\mu\{|f_n - f_m| \geq \epsilon\} \rightarrow 0,$$

cuando $n, m \rightarrow \infty$.

Veamos algunas propiedades de la convergencia en medida.

Proposición 6.5.1 (Ver Munroe, p.201). (a) Si f_n converge en medida a f y a g , entonces $f = g$ c.s.

(b) Si $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$ en medida, entonces $f_n + g_n \rightarrow f + g$ en medida.

(c) Si $f_n \rightarrow 0$ y $g_n \rightarrow 0$ en medida, entonces $f_n g_n \rightarrow 0$ en medida.

(d) Si $f_n \rightarrow 0$ en medida, g es medible y $\mu(\Omega) < \infty$, entonces $f_n g \rightarrow 0$ en medida.

(e) Si $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$ en medida, y $\mu(\Omega) < \infty$, entonces $f_n g_n \rightarrow f g$ en medida.

Veamos ahora algunas de la convergencia en \mathcal{L}_p .

Proposición 6.5.2 (Ver Munroe, p.218).

(a) Si $\mu(\Omega) < \infty$, entonces para cualesquiera $1 \leq p \leq q \leq \infty$,

$$f_n \rightarrow f \text{ en } \mathcal{L}_q \Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ en } \mathcal{L}_p.$$

(b) Si $1 \leq p, q \leq \infty$ son conjugados, $f_n \rightarrow f$ (\mathcal{L}_p) y $g \in \mathcal{L}_q$, entonces $f_n g \rightarrow fg$ (\mathcal{L}_1).

El siguiente resultado es una simple consecuencia de la *desigualdad de Tchebycheff* (2.4.22), pág.89.

Proposición 6.5.3 Si $f_n \rightarrow f$ (\mathcal{L}_p), para un $0 < p < \infty$, entonces $f_n \rightarrow f$ en medida.

Ejemplo 6.5.4 Pueden existir sucesiones $f_n \in \mathcal{L}_p$ que converjan uniformemente a una $f \in \mathcal{L}_p$ y sin embargo no converjan en \mathcal{L}_p , como

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m), \quad f_n = (1/n)I_{[0,n]},$$

sin embargo si $\mu(\Omega) < \infty$, esto no ocurre.

Proposición 6.5.5 (Ver Bartle, p.67). Sea $\mu(\Omega) < \infty$, $f_n \in \mathcal{L}_p$, para un $0 < p < \infty$. Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente entonces $f \in \mathcal{L}_p$ y $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p .

Ejemplo 6.5.6 Por otra parte es posible que $f_n, f \in \mathcal{L}_p$, $f_n \rightarrow f$ puntualmente, y por tanto c.s. y sin embargo no se de la convergencia en \mathcal{L}_p —aunque $\mu(\Omega) < \infty$ —, como en

$$([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], m), \quad f_n = nI_{(0, 1/n)},$$

sin embargo si la sucesión está dominada por una función de \mathcal{L}_p , esto no ocurre.

Proposición 6.5.7 Sea $0 < p < \infty$ y $f_n \in \mathcal{L}_p$ tal que $f_n \rightarrow f$ c.s. Si existe $g \in \mathcal{L}_p$ tal que $|f_n| \leq g$, entonces $f \in \mathcal{L}_p$ y $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p .

Ejemplo 6.5.8 Cabe pensar si la convergencia en \mathcal{L}_p implica la c.s., pero no es así:

$$\begin{aligned} E_1 &= [0, 1], \quad E_2 = [0, 1/2], \quad E_3 = [1/2, 1], \quad E_4 = [0, 1/3], \\ E_5 &= [1/3, 2/3], \quad E_6 = [2/3, 1], \dots \end{aligned}$$

y consideremos la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ y las funciones

$$f = 0, \quad f_n = I_{E_n},$$

entonces aunque f_n no converge puntualmente en ningún punto, podemos tomar subsucesiones de f_n que si convergen.

Proposición 6.5.9 *Si $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente, entonces $f_n \rightarrow f$ en medida y $f_n \rightarrow f$ c.s.*

Ejemplo 6.5.10 El recíproco es falso como prueba el siguiente ejemplo (ver ASH, p.95): Consideremos en $[0, \infty)$ la medida de Lebesgue y las funciones

$$f = 0, \quad f_n = I_{[n, n+1/n]}.$$

Sin embargo si es cierto el siguiente resultado, del que la parte correspondiente a la convergencia c.s. se debe a RIESZ.

Proposición 6.5.11 *Si $f_n \rightarrow f$ en medida, entonces existe una subsucesión $f_{n_k} \rightarrow f$ casi uniformemente y por tanto $f_{n_k} \rightarrow f$ en medida y $f_{n_k} \rightarrow f$ c.s.*

Como consecuencia de esto se tiene el apartado (c) del siguiente resultado, en el que se prueba que la “completitud” vista para \mathcal{L}_p , es válida para todas las convergencias.

Teorema 6.5.12 (a) *Para $0 < p \leq \infty$, sean $f_n \in \mathcal{L}_p$, entonces f_n es de Cauchy en \mathcal{L}_p si y sólo si existe $f \in \mathcal{L}_p$ tal que $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p .*

(b) *f_n es una sucesión de Cauchy c.s. si y sólo si existe f medible tal que $f_n \rightarrow f$ c.s.*

(c) *f_n es una sucesión de Cauchy en medida si y sólo si existe f medible tal que $f_n \rightarrow f$ en medida.*

(d) *f_n es una sucesión de Cauchy casi uniformemente si y sólo si existe f medible tal que $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente.*

En (6.5.3) hemos visto que la convergencia \mathcal{L}_p implica la convergencia en medida. En general el recíproco es falso, sin embargo sí es cierto cuando la convergencia es dominada.

Esto puede probarse utilizando (6.5.7) y (6.5.11).

Teorema 6.5.13 *Sea $0 < p < \infty$ y $f_n \in \mathcal{L}_p$. Si $f_n \rightarrow f$ en medida y existe $g \in \mathcal{L}_p$ tal que $|f_n| \leq g$, entonces $f \in \mathcal{L}_p$ y $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p .*

Como consecuencia de esto a su vez tenemos una versión del teorema de la convergencia dominada, pág.85.

Teorema 6.5.14 *Sea $|f_n| \leq g$ con $g \in \mathcal{L}_1$. Si $f_n \rightarrow f$ en medida, entonces $f \in \mathcal{L}_1$ y*

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

En cuanto a la convergencia \mathcal{L}_∞ tenemos lo siguiente.

Teorema 6.5.15 *Sea $\mu(\Omega) < \infty$. Si $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_∞ , entonces $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p para todo $0 < p \leq \infty$.*

A continuación vemos unas propiedades que caracterizan la convergencia en \mathcal{L}_p . Podemos observar que las dos últimas se satisfacen cuando la sucesión f_n está dominada por una función de \mathcal{L}_p . Denotaremos para cada $f_n \in \mathcal{L}_p$

$$\lambda_n(A) = \int_A |f_n|^p d\mu.$$

Teorema De convergencia de Vitali 6.5.16 *(Ver Bartle, p.76). Sea $1 \leq p < \infty$ y $f_n, f \in \mathcal{L}_p$. Entonces $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p si y sólo si se verifican las condiciones:*

- (a) $f_n \rightarrow f$ en medida.
- (b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(B) < \infty$ y $\lambda_n(B) < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) < \delta$ entonces $\lambda_n(A) < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La siguiente es una útil caracterización de la convergencia c.s. que nos permitirá dar un recíproco parcial de (6.5.9) para μ finita.

Lema 6.5.17 Sea $\mu(\Omega) < \infty$. Entonces $f_n \rightarrow f$ c.s. si y sólo si para cada $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left[\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \epsilon\} \right] = 0.$$

Teorema 6.5.18 (a) **De Egoroff.** Sea $\mu(\Omega) < \infty$. Si $f_n \rightarrow f$ c.s. entonces $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente.

(b) Sea $|f_n| \leq g$ y $g \in \mathcal{L}_1$. Si $f_n \rightarrow f$ c.s. entonces $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente.

(c) **De Lebesgue.** Si $\mu(\Omega) < \infty$ ó existe $g \in \mathcal{L}_1$ tal que $|f_n| \leq g$, entonces $f_n \rightarrow f$ c.s. implica $f_n \rightarrow f$ en medida.

Por último damos una caracterización análoga a (6.5.17) para sucesiones de Cauchy c.s., que nos será muy útil cuando estudiemos las leyes de los grandes números.

Teorema 6.5.19 Sea $\mu(\Omega) < \infty$. Entonces f_n es de Cauchy c.s. si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left[\bigcup_{j,k=n}^{\infty} \{|f_k - f_j| \geq \epsilon\} \right] = 0.$$

6.6 Aplicaciones que conservan la medida

Definición. Sea $T : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ medible, entonces llamamos *medida imagen* por T de una medida μ en \mathcal{A} , a la medida $T_*\mu = \mu_T$ en \mathcal{A}' , tal que para cada $B \in \mathcal{A}'$

$$\mu_T(B) = \mu(T^{-1}(B)).$$

Proposición 6.6.1 Sea $T : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ medible y μ una medida en \mathcal{A} . Entonces para cada función $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ medible y cada $B \in \mathcal{A}'$ se tiene

$$\int_B f d\mu_T = \int_{T^{-1}(B)} (f \circ T) d\mu.$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

Demostración. Para indicadores se sigue de la definición, para funciones simples por aditividad, para funciones no negativas por el teorema de la convergencia monótona, pág.79 y para funciones con integral del caso anterior. ■

Volveremos sobre este resultado mas adelante a propósito del concepto de estadístico.

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Diremos que una aplicación medible $T : \Omega \rightarrow \Omega$ es una *transformación conservando la medida* si es biyectiva, su inversa es medible y $\mu = \mu_T$, es decir que para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\mu(A) = \mu[T(A)].$$

Ejemplo 6.6.2 Ejemplos de tales transformaciones en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m)$ son las traslaciones, las rotaciones, las reflexiones,...

Antes de enunciar el resultado fundamental de esta lección daremos un lema que es un paso importante hacia él.

Teorema Ergódico maximal 6.6.3 Sea T una transformación conservando la medida en $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Sea $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible e integrable y $f_{n+1} = T^*(f_n)$, para $f_1 = f$ y $T^*(f) = f \circ T$. Entonces

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : \sum_{i=1}^n f_i(x) \geq 0\}} f d\mu \geq 0.$$

Teorema Ergódico puntual 6.6.4 Sea T una transformación conservando la medida en el espacio σ -finito $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y sea $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible e integrable y $f_{n+1} = T^*(f_n)$, para $f_1 = f$ y $T^*(f) = f \circ T$. Entonces existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medible e integrable tal que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x) \rightarrow g(x) \quad c.s., \quad T^*(g) = g \quad c.s.,$$

y además si $\mu(\Omega) < \infty$ entonces $\int g d\mu = \int f d\mu$.

Veremos mas adelante que esta función g está íntimamente relacionada con el concepto de esperanza condicionada (ver PARTHASARATHY, p.254).

Definición. Diremos que una transformación T conservando la medida es *ergódica* si para cada $E \in \mathcal{A}$ tal que $T(E) = E$, se tiene que $\mu(E) = 0$ ó $\mu(E^c) = 0$.

Proposición 6.6.5 *T es ergódica si y sólo si cada $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que $T^*(f) = f$ c.s. es constante c.s.*

Como consecuencia tenemos que si T es ergódica y $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible con integral finita entonces para $f_{n+1} = T^*(f_n)$ y $f_1 = f$ se tiene, si $\mu(\Omega) < \infty$ que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x) \rightarrow 0 \quad \text{c.s.}$$

pues $g = 0$ es la única constante integrable, y si $\mu(\Omega) < \infty$ que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x) \rightarrow \frac{\int f d\mu}{\mu(\Omega)} \quad \text{c.s.}$$

expresión que se conoce con el nombre de *Hipótesis ergódica de Boltzman* (ver YOSIDA, p.380).

Observemos que en el segundo caso el límite es el valor medio de f respecto de la probabilidad que μ induce en Ω , es decir en términos probabilísticos la esperanza de f . Esta es una de las formas de las leyes de los grandes números que estudiaremos mas adelante. Volveremos a hablar de la *Teoría Ergódica* en el siguiente tema, para funciones de cuadrado integrable finito.

Por último consideraremos un resultado de muy curiosas consecuencias, aunque muy sencillo de demostrar.

Definición. Dada una transformación conservando la medida T y un $A \in \mathcal{A}$ diremos que $x \in A$ es *recurrente* a A si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) \in A$.

Teorema de Recurrencia de Poincare 6.6.6 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y T una transformación conservando la medida. Entonces para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene que casi seguro todo punto de A es recurrente.*

Demostración. Sean $B_n = \{x \in A : T^n(x) \notin A\} \in \mathcal{A}$ y $B = \cap B_n$ los puntos no recurrentes de A . Entonces los conjuntos $T^n(B)$ son disjuntos pues si $n, m \in \mathbb{N}$ y $x, y \in B$ son tales que

$$T^n(y) = T^{n+m}(x) \Rightarrow y = T^m(x) \Rightarrow y \in A^c \subset B^c,$$

y como $\mu[T^n(B)] = \mu(B)$ y $\mu(\Omega) < \infty$, $\mu(B) = 0$. ■

6.7 Bibliografía y comentarios

Para la confección del presente tema hemos hecho uso de los siguientes libros:

ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.

BARTLE, R.G.: “*The elements of integration*”. John Wiley, 1966.

COHN, D.L.: “*Measure theory*”. Birkhauser (Boston), 1980.

MUNROE, M.E.: “*Measure and integration*”, Addison Wesley, 1971.

TAYLOR, S.J.: “*Introduction to measure and integration*”. Cambridge Univ. Press, 1973.

CORNFELD, I.P.; FOMIN, S.V.; SINAY, Y.G.: “*Ergodic Theory*”. Springer-Verlag, 1982.

El primer espacio L_p que se estudió fue, en el contexto de la recién creada Teoría de integración de Lebesgue, $L_2[a, b]$ para $[a, b] \subset \mathbb{R}$, del que F. RIESZ y E. FISCHER demostraron en 1907 que era completo e isomorfo a l_2 . Las propiedades fundamentales de todos los espacios $L_p[a, b]$ (incluido el teorema del isomorfismo $L_q \sim L_p^*$), para $1 < p < \infty$, lo estudió en 1910

RIESZ, F.: “*Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*”. Math. Annalen, **69**, 449–497, 1910.

El primero en demostrar el teorema de isomorfismo $L_\infty[a, b] \sim L_1[a, b]^*$, fue en 1919

STEINHAUS, H.: “*Additive und stetige Funktionaloperationen*”, Math. Zeit., **5**, 186–221, 1919.

En 1773 el francés LAGRANGE (1736–1813) dio una primera versión de la desigualdad de Hölder, en el caso $p = q = 2$ y para sumas finitas ($n=3$), el caso finito para n arbitrario la probó en 1821 el francés A. CAUCHY (1789–1857). La versión para integrales de este mismo caso $p = q = 2$ fue probada en 1859 por BUNIAKOWSKY y en 1885 por el alemán K.H.A. SCHWARZ (1843–1921) (en particular este caso $p = q = 2$ se conoce como *desigualdad de Cauchy–Schwarz* y expresa la propiedad geométrica de que la esfera unidad de una norma que deriva de un producto interior es, en cada plano pasando por el origen, una elipse). El caso general, para p, q conjugados, lo obtuvieron de forma independiente HÖLDER y ROGERS para sumas

HÖLDER, O.: “Über einen Mittelwertsatz”. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl., 38–47, 1889.

y para integrales F.RIESZ en 1910. (Para los datos anteriores y otros remitimos al lector a las páginas 372 y 387 del

DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “Linear operators, Vol,I”. John Wiley–Interscience Pub., 1958.

En (6.5.3) hemos visto que la convergencia en \mathcal{L}_p implica la convergencia en medida. Un resultado inverso lo hemos visto en (6.5.13) y como consecuencia en (6.5.14) hemos probado una generalización del teorema de la convergencia dominada, pág.85. Respecto de esto vamos a hacer un par de comentarios.

Por una parte dijimos que el teorema de la convergencia dominada era uno de esos resultados que distinguían el uso de las medidas aditivas frente a las σ -aditivas, pues en las primeras no es cierto en general. Sin embargo sí es cierto el siguiente teorema de la convergencia dominada que puede verse en la página 125 del

DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “Linear operators, Vol,I”. John Wiley–Interscience Pub., 1958.

para medidas aditivas y funciones medibles que valoran en un espacio de Banach.

Teorema 6.7.1 Para $1 \leq p < \infty$ y $g \in \mathcal{L}_p$ se tiene que si $f_n \in \mathcal{L}_p$ y $|f_n| \leq g$, entonces $f_n \rightarrow f$ en medida si y sólo si $f \in \mathcal{L}_p$ y $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p .

Por otra parte fue VITALI el primero en investigar el resultado mas general que tuviera como consecuencia la permutación de límite e integral de una sucesión de funciones medibles. En 1907 publica el trabajo

VITALI, G.: “Sull'integrazione per serie”. Rend. Circ. Mat. de Palermo, 23, 137–155, 1907.

en el que se encuentra (6.5.16) y el siguiente resultado cuya demostración puede encontrarse en la p.212 del MUNROE ó en la p.178 del TAYLOR.

Teorema 6.7.2 Sean $f, f_n \in \mathcal{L}_1$. Entonces $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_1 si y sólo si

(a) $f_n \rightarrow f$ en medida.

(b) Dada $A_n \in \mathcal{A}$, con $A_n \downarrow \emptyset$, se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{A_n} |f_m| d\mu < \epsilon.$$

En cuanto a la convergencia en medida, llamada en *probabilidad o estocástica* en Teoría de Probabilidades, es una noción clásica en Matemáticas, apareciendo implícitamente en los primeros resultados sobre probabilidades. Esta convergencia es la correspondiente a una topología que vamos a analizar.

Denotemos con \mathcal{L} el espacio de las funciones medibles y con L el de las clases de equivalencia de funciones que coinciden casi seguro. Consideremos en L las siguientes topologías:

Un conjunto $C \subset L$ es *cerrado* si dados $f_n \rightarrow f$ c.s., tales que $f_n \in C$, entonces $f \in C$. A esta la llamaremos de la *convergencia puntual*.

En el resultado siguiente definimos otra topología que llamaremos de la convergencia en medida.

Teorema 6.7.3 Dado un espacio $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y L existe una base de entornos para una topología en L definidos para cada $f \in L$, $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) < \infty$, y $\epsilon, \delta > 0$, de la forma

$$V(f, E, \epsilon, \delta) = \{g \in L : \mu\{x \in E : |f - g| \geq \epsilon\} \leq \delta\}.$$

Además si μ es σ -finita se obtiene la misma topología si cambiamos μ por otra medida σ -finita con los mismos conjuntos nulos que μ .

El siguiente resultado nos da la relación entre ambas topologías —no de las convergencias c.s. y en medida— y complementa a (6.2.13).

Teorema 6.7.4 Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es σ -finito, entonces las dos topologías anteriores definidas en L coinciden, y pueden definirse por una métrica respecto de la que L es completo.

De la demostración de este se sigue fácilmente el siguiente, que nos explica por qué lleva el nombre que lleva la segunda topología definida en L .

Corolario 6.7.5 Si $\mu(\Omega) < \infty$ y d es la métrica que se construye en el resultado anterior, que en este caso es

$$d(f, g) = \int \left[\frac{|f - g|}{1 + |f - g|} \right] d\mu,$$

entonces $d(f_n, f) \rightarrow 0$ si y sólo si $f_n \rightarrow f$ en medida.

Para estos tres resultados remitimos al lector a las páginas 98–100 del libro

SEGAL, I.E. AND KUNZE, R.A.: “*Integrals and operators*”. Springer–Verlag, 1978.

El teorema de Egoroff aparece en el trabajo de

EGOROFF, P.TH.: “*Sur les suites des fonctions mesurables*”. C.R. Acad.Sci. Paris, 152, 244–246, 1911.

Este resultado tiene otra forma debida a LUSIN que puede encontrarse en la p.19 del libro

SACKS, S.: “*Theory of the integral*”, 1937. Dover, 1964.

El ejemplo citado en el tema, de un espacio de Banach isomorfo a su bidual pero no reflexivo, es de JAMES, R.C. y se encuentra en la p. 25 del libro

LINDENSTRAUSS, J. AND TZAFRIRI, L.: “*Classical Banach Spaces I y II*”. Springer–Verlag, 1996.

El estudio de las transformaciones conservando la medida, surgió a consecuencia de ciertas consideraciones en mecánica estadística: Supongamos que tenemos un sistema de k partículas cuyo estado queda descrito por un punto de una variedad \mathcal{V} de dimensión $6k$ —cada partícula viene determinada por su posición (3 coordenadas) y su velocidad o su momento (otras 3 coordenadas)—. De este modo la historia de las k partículas es una trayectoria en \mathcal{V} , la cual es una curva integral de un cierto campo tangente definido sobre dicha variedad. El flujo T_t de dicho campo nos da para cada punto x de la variedad y cada instante t , el punto $T_t(x)$ en el que se encuentra el punto x después del tiempo t . Uno de los resultados básicos en mecánica estadística, debido a LIOUVILLE establece

que en esa variedad tenemos una medida canónica que el flujo T_t deja invariante.

En la práctica k es tan grande que no es posible observar en todo momento todas las partículas del sistema, por lo que preguntamos si es posible dar la probabilidad de que en el instante t el estado del sistema pertenezca a un cierto subconjunto $E \subset V$.

Para ser mas precisos T_t es un grupo uniparamétrico, por tanto

$$T_0 = id, \quad T_{t+r} = T_t \circ T_r,$$

y aunque dado un $x \in \mathcal{V}$ es imposible en la práctica conocer todos los $T_t(x)$, para los t de un intervalo, sí es posible conocer los puntos cada cierto tiempo r , es decir si llamamos $x_1 = x$ es posible conocer los puntos

$$x_2 = T_r(x), \quad x_3 = T_{2r}(x) = T_r[T_r(x)] = T_r(x_2), \dots$$

que si llamamos $T = T_r$ no es otra cosa que la sucesión

$$x_{n+1} = T_{nr}(x) = T(x_n),$$

y T es una transformación conservando la medida. Ahora si para cada $n \in \mathbb{N}$ contamos cuantos de los x_1, \dots, x_n están en E y llamamos a este número $x(n)$, entonces si consideramos que el recinto en el que se desarrollan las partículas es acotado (por ejemplo que se mantienen en la atmósfera terrestre, es decir en la capa gaseosa que rodea la tierra) y consideramos fija la energía total de las partículas (en particular las velocidades de las partículas están acotadas), el espacio de fases está en un compacto y por tanto tiene medida finita, en cuyo caso si T es ergódica podemos estimar la probabilidad de que las partículas definan un punto que esté en E , pues

$$\frac{x(n)}{n} \rightarrow P(E).$$

Del mismo modo si consideramos una función f medible en el espacio de fases, que representa alguna medición física de las partículas, podemos conocer su valor medio sin mas que considerar su valor medio discreto, pues

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f[T^i(x)] \rightarrow \frac{\int f d\mu}{\mu(\Omega)} \quad \text{c.s.}$$

El teorema ergódico puntual (6.6.4) fue demostrado por

BIRKHOFF, G.D.: “*Proof of the ergodic theorem*”. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 17, 656–660, 1931.

y supuso el que la *Hipótesis Ergódica de Maxwell–Boltzman* de la teoría cinética de los gases, se convirtiera en una consecuencia rigurosa en el marco de la Teoría de la medida.

Otros textos que tratan esta teoría son:

YOSIDA, K.: “*Functional Analysis*”. Springer–Verlag, 1974.

que lo estudia en el marco de los procesos de Markov. El

CORNFELD, I.P.; FOMIN, S.V.; SINAY, Y.G.: “*Ergodic Theory*”. Springer–Verlag, 1982.

que lo hace en el marco de las variedades diferenciables. Y el

PETERSEN, K.: “*Ergodic Theory*”. Cambridge Univ.Press, 1983.

Por último remitimos al lector a la p.94 del

ARNOLD, V.I.: “*Mecánica clásica, métodos matemáticos*”. Ed. Paraninfo, 1983.

en la que se da otra versión del *teorema de Recurrencia de Poincare* y se comenta la siguiente paradójica consecuencia de este y el *teorema de Liouville*:

“ *Si abrimos un tabique que separe una cámara que contiene un gas y una cámara en la que se ha hecho el vacío, entonces después de un cierto tiempo, las moléculas del gas se reunirán en la primera cámara*”.

Fin del Tema VI

Capítulo 7

Medida y topología

7.1 Espacios Hausdorff LC

En esta lección estudiaremos algunas cuestiones relativas a una de las propiedades topológicas mas importantes y características de los espacios euclídeos, la compacidad local. La razón de incluir esta lección en el programa es que trata un concepto no desarrollado habitualmente en los textos de topología general, al menos en cuanto a los resultados que son de interés para nosotros.

Definición. Diremos que un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ —a partir de ahora sólo \mathcal{X} — es *localmente compacto* (LC) si para cada $x \in \mathcal{X}$ y U abierto entorno de x , existe¹ un entorno compacto de x en U . Diremos que el espacio es *σ -compacto* si es unión numerable de compactos. Recordemos que \mathcal{X} es *Hausdorff* si dados $x, y \in \mathcal{X}$ distintos tienen entornos disjuntos. Diremos que un espacio es HLC si es Hausdorff y localmente compacto.

Los siguientes resultados se siguen prácticamente de las definiciones.

¹Esta no es la definición de autores como: Ash, Rudin ó Folland; que dan la (c) de (7.1.3). En ese resultado probamos que son equivalentes si el espacio es Hausdorff. Para la que damos aquí es válido que un abierto de un espacio LC es LC, mientras que para la otra en general no, y por tanto no es una buena definición local.

Proposición 7.1.1 *Sea \mathcal{X} un espacio topológico, entonces:*

- (a) *Si $F \subset K \subset \mathcal{X}$, F es cerrado y K compacto entonces F es compacto.*
- (b) *Si \mathcal{X} es Hausdorff, $K \subset \mathcal{X}$ compacto y $x \notin K$, entonces existen abiertos U y V disjuntos tales que $x \in U$ y $K \subset V$.*
- (c) *Si \mathcal{X} es Hausdorff y $K \subset \mathcal{X}$ compacto entonces K es cerrado.*
- (d) *Si \mathcal{X} es Hausdorff, $F \subset \mathcal{X}$ cerrado y $K \subset \mathcal{X}$ compacto entonces $F \cap K$ es compacto.*

Se sigue de la definición y del resultado anterior, que en un espacio HLC los *abiertos relativamente compactos*, es decir con adherencia compacta, forman una base para la topología (recordemos que una base de la topología es una colección de abiertos tal que cualquier abierto del espacio se puede poner como unión de abiertos básicos).

Proposición 7.1.2 *Todo abierto de un espacio HLC, con una base numerable es σ -compacto.*

Demostración. Todo punto del abierto tiene un entorno compacto en el abierto y este uno de la base con adherencia compacta y estos son numerables. ■

Teorema 7.1.3 *Sea \mathcal{X} Hausdorff, entonces son equivalentes:*

- (a) *\mathcal{X} es localmente compacto.*
- (b) *Si K es compacto, U abierto y $K \subset U$, entonces hay un abierto V relativamente compacto, tal que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*
- (c) *Cada $x \in \mathcal{X}$ tiene un entorno compacto.*

Demostración. (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) son obvias.

Veamos (c) \Rightarrow (a): Sea $x \in U$ con U abierto y consideremos un entorno abierto de x , W con adherencia compacta $K = \overline{W}$. Consideremos el cerrado $E = U^c$ y para cada $y \in E$ abiertos disjuntos U_y entorno de x y E_y entorno de y (por ser el espacio Hausdorff), por tanto tales que $y \notin \overline{U_y}$. Entonces los compactos $K_y = E \cap K \cap \overline{U_y}$ tienen intersección $\bigcap_{y \in E} K_y = \emptyset$ y se sigue de (1.6.3), pág.34, que una colección finita de ellos también, $K_{y_1} \cap \cdots \cap K_{y_n} = \emptyset$ y el abierto

$$V = W \cap U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n},$$

satisface el resultado pues $\overline{V} \subset K \cap \overline{U_{y_1}} \cap \cdots \cap \overline{U_{y_n}} \subset U$. ■

Proposición 7.1.4 Sea \mathcal{X} un espacio HLC y $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{p\}$, donde $p \notin \mathcal{X}$. Los abiertos de \mathcal{X} junto con los complementarios en $\bar{\mathcal{X}}$, de los compactos² de \mathcal{X} , forman una topología en $\bar{\mathcal{X}}$ para la que la inclusión $\mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$ es continua y $\bar{\mathcal{X}}$ es Hausdorff y compacto.

Demostración. Veamos que es topología:

(i) \emptyset y $\bar{\mathcal{X}}$ son abiertos.

(ii) Si A, B son abiertos de \mathcal{X} , $A \cap B$ también. Si A lo es de \mathcal{X} y $B = \bar{\mathcal{X}} \setminus K$ es entorno de p , entonces $A \cap B \subset \mathcal{X}$ y es abierto pues es el complementario en \mathcal{X} del cerrado $(\mathcal{X} \setminus A) \cap K$. Si $A = \bar{\mathcal{X}} \setminus K_1$ y $B = \bar{\mathcal{X}} \setminus K_2$ son entornos de p , su intersección también pues es el complementario del compacto $K_1 \cup K_2$.

(iii) Si A_i son abiertos de \mathcal{X} su unión A es abierto de \mathcal{X} ; si $B_j = \bar{\mathcal{X}} \setminus K_j$ son entornos de p , su unión $\bar{\mathcal{X}} \setminus K$, para el compacto $K = \bigcap K_j$ es entorno de p y la unión de todos estos abiertos es $A \cup (\bar{\mathcal{X}} \setminus K)$ que es un entorno de p , complementario del compacto $(\mathcal{X} \setminus A) \cap K \subset \mathcal{X}$.

Para ver que $\bar{\mathcal{X}}$ es compacto sea V_i un recubrimiento por abiertos y sea $\bar{\mathcal{X}} \setminus K = V_k$ uno que contenga a p , entonces

$$\bar{\mathcal{X}} = (\bar{\mathcal{X}} \setminus K) \cup (\cup_{i \neq k} V_i) \Rightarrow K \subset \cup_{i \neq k} V_i \Rightarrow K \subset \cup_{i \neq k} V_i \setminus \{p\}$$

y podemos extraer un subrecubrimiento finito pues los $V_i \setminus \{p\}$ son abiertos de \mathcal{X} .

Para ver que es Hausdorff basta verlo para $x \in \mathcal{X}$ y p . Tomando un entorno compacto K de x y un entorno abierto de x , $U \subset K$, U y $\bar{\mathcal{X}} \setminus K$ son abiertos disjuntos que separan los puntos. ■

Este resultado nos permite dar la siguiente definición.

Definición. Sea \mathcal{X} un espacio topológico HLC, llamamos *compactificación de \mathcal{X} por un punto* (ó *de Alexandrov*) al espacio topológico compacto $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{p\}$, formado por su unión (disjunta) con un punto $p \notin \mathcal{X}$ y considerando la topología en la que los abiertos son los de \mathcal{X} y los complementarios en $\bar{\mathcal{X}}$, de los compactos de \mathcal{X} (que son los abiertos entornos de p).

Definición. Sea \mathcal{X} un espacio topológico y $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$ una función, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} . Llamamos *sopORTE de f* al conjunto

$$\text{sop}(f) = \overline{\{x \in \mathcal{X} : f(x) \neq 0\}},$$

²que serán los entornos de p

y denotaremos con $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ el \mathbb{K} -espacio vectorial de las funciones $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$ continuas de soporte compacto. Es obvio que si $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, entonces $f(\mathcal{X})$ es un compacto de \mathbb{K} .

A continuación vamos a exponer una de las propiedades mas importantes del espacio $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ para el desarrollo de la teoría de la medida en un espacio HLC. Pero antes veamos algunos resultados sobre funciones semicontinuas.

Definición. Diremos que una función $f: \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty]$ es *semicontinua inferiormente* si para cada $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}[-\infty, a] = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq a\}$ es cerrado. Diremos que es *semicontinua superiormente* si $f^{-1}[a, \infty]$ es cerrado ó equivalentemente $-f$ es semicontinua inferiormente.

Proposición 7.1.5 (a) $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua sii es semicontinua inferior y superiormente.

(b) El supremo de cualquier colección de funciones semicontinuas inferiormente también lo es y el mínimo de las colecciones finitas. El ínfimo de cualquier colección de funciones semicontinuas superiormente también lo es y el máximo de las colecciones finitas.

(c) Si V es abierto I_V es semicontinua inferiormente. Si C es cerrado I_C es semicontinua superiormente.

Lema de Urysohn 7.1.6 Sea (\mathcal{X}, T) un espacio topológico HLC y sean $K \subset V$, con K compacto y V abierto, entonces existe $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, tal que $\text{sop}(f) \subset V$ e $I_K \leq f \leq I_V$.

Demostración. Sea $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_0, r_1, r_2, \dots\}$, con $r_0 = 0$, $r_1 = 1$ y $r_n \in (0, 1)$. Por (7.1.3) existe un abierto V_0 con adherencia compacta y después un abierto V_1 con adherencia compacta tales que

$$K \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_0 \subset \overline{V_0} \subset V,$$

ahora como $r_0 = 0 < r_2 < 1 = r_1$ aplicamos de nuevo (7.1.3) y existe un abierto V_2 con adherencia compacta tal que

$$\overline{V_1} \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset V_0,$$

y procedemos por inducción de tal forma que para r_0, \dots, r_n los abiertos V_i correspondientes satisfacen

$$r_i < r_j \quad \Rightarrow \quad \overline{V_j} \subset V_i,$$

y el abierto V_{n+1} con adherencia compacta, correspondiente a r_{n+1} , se construye considerando $r_i < r_{n+1} < r_j$ con

$$\begin{aligned} r_i &= \max\{r_k : k = 0, 1, \dots, n; r_k < r_{n+1}\}, \\ r_j &= \min\{r_k : k = 0, 1, \dots, n; r_k > r_{n+1}\}, \end{aligned}$$

ahora aplicando (7.1.3) existe V_{n+1} tal que

$$\overline{V_j} \subset V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset V_i,$$

de este modo construimos una sucesión de abiertos V_n uno para cada racional r_n de $[0, 1]$, tales que si $r_n < r_m$, $\overline{V_m} \subset V_n$. Ahora consideramos las funciones semicontinuas inferior y superiormente respectivamente

$$f_n(x) = \begin{cases} r_n & \text{si } x \in V_n, \\ 0 & \text{si } x \notin V_n, \end{cases} \quad g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{V_n}, \\ r_n & \text{si } x \notin \overline{V_n}, \end{cases}$$

y las funciones, semicontinua inferiormente la $f = \sup\{f_n\}$, y semicontinua superiormente la $g = \inf\{g_n\}$, para las que $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 1$ para $x \in K$ y $\text{sop}(f) \subset \overline{V_0}$. Ahora basta demostrar que $f = g$.

Por una parte $f \leq g$, pues para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $f_n \leq g_m$, ya que

$$\begin{aligned} r_n \leq r_m &\Rightarrow f_n \leq r_n \leq r_m \leq g_m, \\ r_n > r_m &\Rightarrow \overline{V_n} \subset V_m \Rightarrow f_n \leq g_m, \end{aligned}$$

y si para un x es $f(x) < g(x)$, existen $r_n, r_m \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ tales que

$$f_n(x) \leq f(x) < r_n < r_m < g(x) \leq g_m(x),$$

lo cual implica por una parte que $\overline{V_m} \subset V_n$ y por otra que

$$f_n(x) = 0 \text{ y } g_m(x) = 1 \Rightarrow x \in V_n^c \cap \overline{V_m},$$

y llegamos a un absurdo. ■

Como consecuencia podemos construir particiones de la unidad en un espacio Hausdorff localmente compacto. Esta herramienta fundamental que habitualmente se utiliza para reducir un problema de naturaleza global a uno local, la vamos a usar en el teorema de representación de Riesz.

Teorema de Particiones de la unidad 7.1.7 Sea \mathcal{X} HLC, $K \subset \mathcal{X}$ compacto y V_1, \dots, V_n abiertos que recubren a K . Entonces existen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, tales que $f_i(\mathcal{X}) \subset [0, 1]$, $\text{sop}(f_i) \subset V_i$ y en K la $\sum_{i=1}^n f_i = 1$.

Demostración. Para cada $i = 1, \dots, n$, existen abiertos U_i con $\overline{U_i}$ compacto, tales que $K \subset \cup_{i=1}^n U_i$ y $U_i \subset \overline{U_i} \subset V_i$, para ello basta considerar por (7.1.3), para cada $x \in K$ e i tal que $x \in V_i$, un entorno abierto $U_x \subset \overline{U_x} \subset V_i$, y extraer un subrecubrimiento finito, U_{x_j} y para cada i unir los que satisfacen $\overline{U_{x_j}} \subset V_i$. Ahora por el Lema de Urysohn existen $g_i \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $I_{\overline{U_i}} \leq g_i \leq I_{V_i}$ y $\text{sop } g_i \subset V_i$. Consideremos ahora las funciones de $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$

$$f_1 = g_1, \quad f_2 = (1 - g_1)g_2, \quad \dots, \quad f_n = (1 - g_1) \cdots (1 - g_{n-1})g_n,$$

para las que $\{f_i \neq 0\} \subset \{g_i \neq 0\}$, por tanto $\text{sop } f_i \subset V_i$, $f_i \leq I_{V_i}$ y por inducción se demuestra que

$$f_1 + \cdots + f_n = 1 - (1 - g_1) \cdots (1 - g_n),$$

por tanto en K , $f_1 + \cdots + f_n = 1$ pues $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$. ■

7.2 Medidas regulares

A lo largo de toda la lección supondremos que $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y que \mathcal{A} es una σ -álgebra que contiene a los borelianos $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. En la lección (1.6.4), pág.44, hemos estudiado las propiedades de regularidad en las medidas de \mathbb{R}^n . Ahora las volvemos a estudiar en estos espacios.

Definición. Diremos que μ es *cuasi-regular* en $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ si μ es finita en los compactos de \mathcal{X} , es *regular exterior* en cada $E \in \mathcal{A}$, es decir

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ abierto}\},$$

y es *regular interior* en los abiertos y en los $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) < \infty$, es decir tal que en este tipo de conjuntos

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Un espacio $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ en estas condiciones será llamado *cuasi-regular*. Diremos que μ es *regular* si es finita en los compactos, regular exterior y regular interior en todo $E \in \mathcal{A}$ y en tal caso diremos que el espacio de medida es regular.

Como un ejemplo hemos visto en (1.6.23), pág.46, que los espacios $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ con μ finita en los compactos (i.e. de Lebesgue–Stieltjes) son regulares, en particular para $\mu = m$ la medida de Lebesgue. La base de ese resultado radica en que todo abierto de \mathbb{R}^n es σ -compacto. Veremos a continuación que el resultado sigue siendo válido en los espacios con esta propiedad (recordemos que por (7.1.2), pág.238, si el espacio tiene base numerable todo abierto suyo es σ -compacto).

Teorema 7.2.1 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ Hausdorff localmente compacto, tal que todo abierto es σ -compacto. Entonces toda medida μ en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ finita en los compactos es regular.*

Demostración. La demostración es como en (1.6.23), pág.46, modificando ligeramente el final, donde utilizabamos la existencia de abiertos V_n , con adherencia compacta (por tanto con $\mu(V_n) < \infty$) y tales que $V_n \uparrow \mathcal{X}$. En nuestro caso esto se sigue de (7.1.3b), pág.238, pues basta considerar un recubrimiento numerable del espacio por compactos K_n , considerar para cada uno un abierto relativamente compacto $U_n \supset K_n$ y definir los abiertos $V_n = \cup_{i=1}^n U_i$. ■

Como decíamos al principio de la lección supondremos que $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y que \mathcal{A} es una σ -álgebra que contiene a los borelianos $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Proposición 7.2.2 *Sea μ una medida en $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ finita en los compactos de \mathcal{X} , regular exterior en cada $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y regular interior en los abiertos, entonces es cuasi-regular.*

Demostración. Falta ver que μ es regular interior en cada boreliano E con $\mu(E) < \infty$. Por ser μ regular exterior en E , para cada $\epsilon > 0$ existe un abierto $V \supset E$, tal que $\mu(V \cap E^c) < \epsilon$ y por lo mismo existe otro abierto $U \supset V \cap E^c$, tal que $\mu(U) < \epsilon$. Ahora por ser regular interior en V y $\mu(V) < \infty$, existe un compacto $K \subset V$, tal que $\mu(V \cap K^c) < \epsilon$ y el compacto $K \cap U^c \subset E$ verifica que

$$\begin{aligned} \mu[E \cap (K^c \cup U)] &\leq \mu(E \cap K^c) + \mu(E \cap U) \\ &\leq \mu(V \cap K^c) + \mu(U) < 2\epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 7.2.3 (a) Una medida cuasi-regular y σ -finita es regular.
 (b) Si \mathcal{X} es σ -compacto toda medida cuasi-regular es regular.

Demostración. (a) Falta ver que μ es regular interior en los $E \in \mathcal{A}$, con $\mu(E) = \infty$, pero como existe una sucesión de medibles $A_n \uparrow \mathcal{X}$, con $\mu(A_n) < \infty$, tendremos que $\mu(E \cap A_n) \uparrow \mu(E) = \infty$, por tanto para cada $k > 0$, existe un n , tal que

$$k < \mu(E \cap A_n) \leq \mu(A_n) < \infty$$

y por regularidad interior existe un compacto $K \subset E \cap A_n \subset E$, tal que $k < \mu(K)$.

(b) Se sigue de (a) pues μ es finita en los compactos, por tanto σ -finita. ■

Definición. Diremos que una medida (real para $\mu_2 = 0$ ó en general compleja)

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2 = \mu_1^+ - \mu_1^- + i\mu_2^+ - i\mu_2^- \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathbb{K}),$$

es *regular* si las cuatro medidas finitas μ_i^\pm son regulares. Denotaremos estas medidas con $\mathcal{M}_r(\mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathbb{K})$ ó con \mathcal{M}_r si no hay confusión. Recordemos que \mathcal{M} es un \mathbb{K} -espacio de Banach con la norma $\|\mu\| = |\mu|(\mathcal{X})$.

Proposición 7.2.4 $\mu \in \mathcal{M}$ es regular sii lo es su variación $|\mu|$. Además \mathcal{M}_r es un subespacio cerrado de \mathcal{M} .

Demostración. Como una medida positiva λ finita es regular sii para cada $E \in \mathcal{B}(\Omega)$ y $\epsilon > 0$, existe un compacto K y un abierto U tales que $K \subset E \subset U$ y $\lambda(U \setminus K) < \epsilon$, se tiene que si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ son medidas positivas y λ_2 es regular, entonces también lo es λ_1 y que la suma de medidas positivas regulares también lo es, de esto se sigue que $\mu = \mu_1 + i\mu_2 = \mu_1^+ - \mu_1^- + i\mu_2^+ - i\mu_2^-$, es regular sii lo es $|\mu|$, pues

$$\mu_i^\pm \leq |\mu| \leq \mu_1^+ + \mu_1^- + \mu_2^+ + \mu_2^-,$$

y que \mathcal{M}_r es un subespacio de \mathcal{M} . Veamos que es cerrado, si $\mu_n \in \mathcal{M}_r$ y $\|\mu - \mu_n\| \rightarrow 0$, entonces $\mu \in \mathcal{M}_r$ pues si $K \subset U$, entonces

$$|\mu|(U \setminus K) \leq |\mu - \mu_n|(U \setminus K) + |\mu_n|(U \setminus K) \leq \|\mu - \mu_n\| + |\mu_n|(U \setminus K),$$

por tanto \mathcal{M}_r es un espacio de Banach. ■

7.2.1 Funciones continuas y funciones medibles

Veamos ahora algunos resultados fundamentales que nos relacionan las funciones medibles con las funciones continuas, en particular veremos que una función medible puede convertirse en una función continua variando sus valores en un conjunto de medida tan pequeña como queramos.

Teorema de Lusin 7.2.5 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ cuasi-regular y $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$ medible con $\mu\{f \neq 0\} < \infty$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ tal que*

$$\mu\{x \in \mathcal{X} : f(x) \neq g(x)\} < \epsilon.$$

además g puede obtenerse verificando $\|g\|'_\infty = \sup |g| \leq \|f\|'_\infty = \sup |f|$.

Demostración. (a) Supongamos primero que $0 \leq f < 1$ y que existe $A \supset F = \{f \neq 0\}$ compacto, por tanto existe un abierto V con $A \subset V$ y \bar{V} compacto. Consideremos la sucesión de funciones simples que construimos en (2.2.7), pág.68,

$$s_n = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n} I_{f^{-1}[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})},$$

con $s_n \uparrow f$. Sea ahora $t_1 = s_1$ y para $n \geq 2$, $t_n = s_n - s_{n-1}$, las cuales toman sólo dos valores 0 y $1/2^n$, pues si $f(x) \in [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}) = [\frac{2j-2}{2^n}, \frac{2j}{2^n})$,

$$s_{n-1}(x) = \frac{2j-2}{2^n} \quad \text{y} \quad s_n(x) = \begin{cases} \frac{2j-2}{2^n}, & \text{si } f(x) \in [\frac{2j-2}{2^n}, \frac{2j-1}{2^n}), \\ \frac{2j-1}{2^n} & \text{si } f(x) \in [\frac{2j-1}{2^n}, \frac{2j}{2^n}), \end{cases}$$

por tanto $2^n t_n = I_{C_n}$, con $C_n \subset A$ y $\sum t_n = \lim s_n = f$. Ahora por la regularidad de μ en C_n existen abiertos $V_n \subset V$ y compactos K_n con $K_n \subset C_n \subset V_n$ tales que $\mu(V_n \setminus K_n) < 2^{-n}\epsilon$ y por el Lema de Urysohn existen $h_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $I_{K_n} \leq h_n \leq I_{V_n}$ y $\text{sop } h_n \subset V_n$, por tanto $h_n = I_{C_n}$ salvo en $V_n \setminus K_n$. Ahora la serie $g = \sum 2^{-n} h_n$ converge uniformemente, por tanto g es continua y de soporte compacto pues

$$\{g \neq 0\} \subset \cup \text{sop } h_n \subset \cup V_n \subset \bar{V},$$

por tanto $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ y $f = \sum t_n = \sum 2^{-n} h_n = g$ excepto en $E = \cup V_n \setminus K_n$ y $\mu(E) < \epsilon$.

(b) Si f es medible no negativa y acotada, $0 \leq f < M$, y A compacto el resultado se sigue aplicando (a) a $f' = f/M$.

(c) Si f es medible real y acotada y A compacto aplicamos (b) a f^+ y a f^- .

(d) Si f es medible real y acotada pero no existe el compacto A , por regularidad interior en F existe un compacto $K \subset F$, con $\mu(F \setminus K) < \epsilon/2$ y aplicamos (c) a $f' = fI_K$, observando que $f = f'$ salvo en $F \setminus K$ y que $\{f' = g\} \cap \{f = f'\} \subset \{f = g\}$, y el resultado se sigue pasando a los complementarios.

(e) Si f es medible real, consideramos $A_n = \{|f| > n\} \subset F$, siendo $A_n \downarrow \emptyset$, por tanto $\mu(A_n) \downarrow 0$ y aplicamos (d) a $f' = fI_{A_n^c}$ que es acotada y $f = f'$ salvo en A_n . Si f es compleja consideramos la parte real y la imaginaria.

Por último si $\sup |f| = a < \infty$, consideramos la aplicación continua $\phi(z) = z$ si $|z| < a$ y $\phi(z) = az/|z|$ si $|z| \geq a$, entonces $\phi \circ g$ satisface los dos apartados, pues $\{\phi \circ g \neq f\} \subset \{g \neq f\}$. ■

Como consecuencia de este resultado y del Lema de Borel–Cantelli, tenemos que las funciones medibles acotadas, son límite c.s. de funciones continuas.

Corolario 7.2.6 *En las condiciones del Teorema de Lusin supongamos que $|f| \leq 1$, entonces existen $g_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $|g_n| \leq 1$, tales que $f(x) = \lim g_n(x)$ c.s.*

Demostración. Por el Teorema de Lusin para cada n existe $g_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $|g_n| \leq 1$ y $\mu\{g_n \neq f\} < 2^{-n}$. Ahora por el Lema de Borel–Cantelli, ver ejercicio (1.3.6) de la página 19,

$$\sum \mu\{g_n \neq f\} = 1 < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\limsup\{g_n \neq f\}) = 0,$$

y fuera de este conjunto $g_n(x) = f(x)$ a partir de un n . ■

Corolario 7.2.7 *En un espacio de medida cuasi-regular $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ es denso en L_p , para $0 < p < \infty$.*

Demostración. Dada $f \in L_p$ y $\epsilon > 0$ sabemos por 6.2.16 (página 206), que existe una $s \in \tilde{\mathcal{S}}$ tal que $\|f - s\|_p \leq \epsilon$, y por el Teorema de Lusin una función $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $|g| \leq \|s\|'_\infty$, tal que $g = s$ salvo en un boreliano E con $\mu(E) < (\epsilon/2\|s\|'_\infty)^p$, por tanto

$$\|s - g\|_p = \left(\int_E |s - g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq 2\|s\|'_\infty \mu(E)^{1/p} < \epsilon,$$

y $\|f - g\|_p \leq 2\epsilon$. ■

Nota 7.2.8 Comentemos brevemente el significado particular de este último resultado cuando

$$(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m).$$

En $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ tenemos que para cada $0 < p \leq \infty$, las pseudométricas d_p definidas en \mathcal{L}_p , son realmente métricas, pues si $f(x) \neq g(x)$, para $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces y sólo entonces existe un abierto V en \mathbb{R}^n en el que $f \neq g$, y esto equivale a que

$$\int |f - g|^p dm > 0 \quad \text{ó para } p = \infty \quad \|f - g\|_\infty > 0,$$

además también se tiene que

$$\|f\|_\infty = \|f\|'_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\},$$

pues $\{|f| > \|f\|'_\infty\} = \emptyset$, por tanto $\|f\|_\infty \leq \|f\|'_\infty$ y para todo $\epsilon > 0$, $\{|f| > \|f\|'_\infty - \epsilon\}$ es un abierto no vacío y por tanto no es localmente nulo, de donde $\|f\|_\infty \geq \|f\|'_\infty - \epsilon$.

Por (7.2.7) sabemos que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L_p(\mathbb{R}^n)$ que es completo, por tanto $L_p(\mathbb{R}^n)$ es la completación del espacio métrico $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n), d_p)$. En particular, para $p = n = 1$, si definimos la distancia entre dos funciones continuas f y g de soporte compacto en \mathbb{R} como la integral de Riemann $\int |f(x) - g(x)| dx$, entonces la completación del correspondiente espacio métrico consiste en las funciones Lebesgue integrables en \mathbb{R} (siempre que identifiquemos cada dos que difieran en un conjunto de medida nula).

La importancia de estos casos estriba en que la completación del espacio métrico de funciones $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, no es necesario verla como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy —como habitualmente ocurre—, sino como un espacio de funciones de \mathbb{R}^n mas amplio (con la identificación de las que difieran en un conjunto nulo). El caso $p = \infty$ es distinto de los demás casos, pues la completación de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, con la métrica d_∞ no es $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, sino el espacio $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ de las funciones continuas en \mathbb{R}^n que se anulan en el ∞ , como veremos a continuación.

Definición. Diremos que una función $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$ se anula en el ∞ si para cada $\epsilon > 0$ existe un compacto $K \subset \mathcal{X}$, tal que para cada $x \in K^c$ se tiene $|f(x)| < \epsilon$. Denotaremos con $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ el \mathbb{K} —espacio vectorial de las funciones continuas f que se anulan en el ∞ .

Trivialmente se tiene que $\mathcal{C}_c(\mathcal{X}) \subset \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$, y si \mathcal{X} es compacto entonces se da la igualdad, en cuyo caso escribiremos

$$\mathcal{C}(\mathcal{X}) = \mathcal{C}_c(\mathcal{X}) = \mathcal{C}_0(\mathcal{X}).$$

Nota 7.2.9 Sea \mathcal{X} Hausdorff localmente compacto y $\bar{\mathcal{X}}$ su compactificación por un punto p (ver (7.1.4), pág.239). Entonces se tiene la inclusión isométrica

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_0(\mathcal{X}) & \hookrightarrow & \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}}) \\ f & \rightarrow & \bar{f} \end{array} \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{X} \\ 0 & \text{si } x = p \end{cases}$$

y mediante esta aplicación $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ es isomorfa a su imagen que es el hiperplano cerrado de $\mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$

$$\ker \hat{p} = \{f \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}}) : f(p) = 0\}.$$

Del mismo modo su subespacio $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ es isomorfo a su imagen que es el subespacio de $\mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$ de las funciones cuyo germen en p es nulo, es decir que se anulan en un entorno del p .

Podemos considerar el cociente³ $\mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})/\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$, considerando en $\mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$ la relación de equivalencia $f \sim g$ sii $f - g \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ ó equivalentemente $f(p) = g(p)$ y tenemos la sucesión exacta

$$(7.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{C}_0(\mathcal{X}) & \rightarrow & \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}}) & \rightarrow & \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})/\mathcal{C}_0(\mathcal{X}) \equiv \mathbb{K} \rightarrow 0 \\ & & f & \rightsquigarrow & f & \rightsquigarrow & [f] \equiv \hat{p}(f) = f(p) \end{array}$$

que usaremos mas adelante en la pág.255. Observemos que además el isomorfismo $\hat{p}: \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})/\mathcal{C}_0(\mathcal{X}) \equiv \mathbb{K}$, $\hat{p}([f]) = f(p)$ es isometría de espacios normados, pues para la función constante $g \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$, $g(x) = f(p)$ se tiene $f \sim g$ y para cualquier $h \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$, tal que $h(p) = f(p)$ se tiene $|f(p)| = \|g\| \leq \|h\| = \sup |h(x)|$, por tanto $\|[f]\| = \|g\| = |f(p)|$.

Teorema 7.2.10 Sea \mathcal{X} HLC, entonces $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ es de Banach con la norma

$$\|f\|'_\infty = \sup_{x \in \mathcal{X}} |f(x)|,$$

y $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ es denso en él.

Demostración. Por la nota anterior basta demostrar que $\mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$ es completo, pues $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ es un cerrado suyo. Sea $f_n \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$ una sucesión

³Dado un espacio normado E y un subespacio cerrado suyo M consideramos el espacio normado cociente, $E/M = \{[x] = x + M : x \in E\}$, con las operaciones y norma

$$[x] + [y] = [x + y], \quad \lambda[x] = [\lambda x], \quad \|[x]\| = \inf\{\|y\| : y \in x + M\}.$$

Además si E es de Banach, también lo es el cociente (ver Hewitt-Stromberg, pág.222).

de Cauchy, entonces $f_n(x)$ es de Cauchy uniformemente en $\bar{\mathcal{X}}$, por tanto existe $f(x) = \lim f_n(x)$ y es continua pues f_n lo es y

$$|f(x) - f(y)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Ahora veamos la densidad, dada $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ y $\epsilon > 0$ hay un compacto $K \subset \mathcal{X}$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ fuera de K y por el Lema de Urysohn existe una función $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $0 \leq g \leq 1$ y $g = 1$ en K , entonces $h = fg \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ y $\|f - h\|'_\infty \leq \epsilon$. ■

7.3 Teoremas de representación de Riesz

Es fácil ver que si μ es una medida en $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, tal que $\mu(K) < \infty$ para cada compacto K , entonces podemos definir el funcional lineal

$$\Lambda : \mathcal{C}_c(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \Lambda(f) = \int f d\mu,$$

pues si f es continua entonces es medible y si es de soporte compacto es integrable, ya que es acotada $\|f\|'_\infty = \sup\{|f| \} < \infty$, por ser continua, y $\int |f| \leq \|f\|'_\infty \mu[\text{sop}(f)] < \infty$. Además Λ es positivo en el sentido de que si $f \geq 0$, $\Lambda(f) \geq 0$. Observemos que además si μ es finita, entonces Λ es continua y $\|\Lambda\| \leq \mu(\mathcal{X}) = \|\mu\|$.

Ahora nos planteamos la siguiente cuestión: ¿son de esta forma todos los funcionales lineales y positivos en $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$? Veremos que sí, además de modo único si imponemos que μ sea *cuasi-regular*. Observemos que para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si $\Lambda : \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ es lineal y positivo, entonces está determinado sobre $\mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, pues si $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, $f = f_1 + if_2$, con las $f_i \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ y $\Lambda(f) = \Lambda(f_1) + i\Lambda(f_2)$, además si $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, $\Lambda(f) \in \mathbb{R}$, pues $\Lambda(f) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-)$ y $\Lambda(f^+), \Lambda(f^-) \geq 0$.

Teorema de Representación de Riesz I 7.3.1 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico HLC y Λ un funcional lineal y positivo en $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, entonces existe una única medida μ , cuasi-regular en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, tal que para cada $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$.*

$$\Lambda(f) = \int f d\mu.$$

Demostración. Unicidad. Si μ es cuasi-regular y satisface el resultado entonces para cada abierto $U \in \mathcal{T}$ y $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $\text{sop}(f) \subset U$ y $0 \leq f \leq I_U$,

$$\Lambda(f) = \int f d\mu \leq \mu(U),$$

por otra parte para cada compacto $K \subset U$, existe $h \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, por el Lema de Urysohn (7.1.6), con $\text{sop}(h) \subset U$ y $I_K \leq h \leq I_U$, por lo que $\mu(K) \leq \Lambda(h) \leq \mu(U)$, y como μ es regular interior en el abierto U tendremos que

$$(7.2) \quad \mu(U) = \sup\{\Lambda(f) : f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}), \text{sop}(f) \subset U, 0 \leq f \leq I_U\},$$

y por tanto μ está determinada de modo único en los abiertos y como es regular exterior en todo conjunto, es única.

Existencia. De existir μ , la igualdad (7.2) nos indica la única forma de definirla en \mathcal{T} y tiene las propiedades: (a) $\mu(\emptyset) = 0$; (b) $\mu(U) \geq 0$ para todo abierto U , por ser Λ positivo; (c) $\mu(E) \leq \mu(U)$ para $E \subset U$ abiertos.

Ahora la demostración consiste en:

- (1) Construir una medida exterior μ^* que extienda a μ .
- (2) Demostrar que $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{A}_*$.
- (3) Demostrar que $\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}$ es cuasi-regular.
- (4) Demostrar que $\Lambda(f) = \int f d\mu$, para toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$.

(1) Por (1.4.3), pág.21, podemos definir la medida exterior

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : E \subset \cup A_i, A_i \text{ abiertos}\right\},$$

la cual verifica

$$(7.3) \quad \mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \in \mathcal{T}\}.$$

(lo cual nos dará automáticamente la regularidad exterior) para lo cual basta demostrar que si $U_n \in \mathcal{T}$ y $U = \cup U_n$, que es abierto, entonces $\mu(U) \leq \sum \mu(U_n)$. Sea $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $\text{sop}(f) \subset U$ y $0 \leq f \leq I_U$, entonces por ser $\text{sop}(f)$ compacto tendremos que existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $\text{sop}(f) \subset \cup_{i=1}^m U_i$, ahora por (7.1.7) existe una partición de la unidad $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $\text{sop}(g_i) \subset U_i$, $0 \leq g_i \leq I_{U_i}$ y $1 = \sum g_i$ en $\text{sop}(f)$. Entonces $f = \sum f g_i$, $\text{sop}(f g_i) \subset U_i$ y $0 \leq f g_i \leq I_{U_i}$, por tanto

$$\Lambda(f) = \sum_{i=1}^m \Lambda(f g_i) \leq \sum_{i=1}^m \mu(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i),$$

y tomando supremo se sigue por (7.2) $\mu(U) \leq \sum \mu(U_n)$ y por tanto la igualdad (7.3). Ahora bien por esta igualdad y la propiedad (c) anterior se sigue que μ^* extiende a μ , es decir que si E es abierto $\mu^*(E) = \mu(E)$.

(2) Sea U abierto y veamos que es \mathcal{A}_* -medible, para lo cual basta ver que si $E \subset \mathcal{X}$, con $\mu^*(E) < \infty$, entonces

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^c).$$

Supongamos primero que E es abierto, entonces por la definición (7.2) de $\mu(U \cap E)$, para cada $\epsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $\text{sop}(f) \subset U \cap E$, $0 \leq f \leq I_{U \cap E}$ y $\Lambda(f) > \mu(U \cap E) - \epsilon$ y como $V = E \cap \text{sop}(f)^c$ también es abierto, existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ con $\text{sop}(g) \subset V$, $0 \leq g \leq I_V$ y $\Lambda(g) > \mu(V) - \epsilon$, además $\text{sop}(f + g) \subset E$ y como $g = 0$ en V^c y $f = 0$ en V , entonces $0 \leq f + g \leq I_E$ y

$$\begin{aligned} \mu(E) &\geq \Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g) > \mu(U \cap E) + \mu(V) - 2\epsilon \\ &\geq \mu^*(U \cap E) + \mu^*(U^c \cap E) - 2\epsilon, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue haciendo $\epsilon \rightarrow 0$. Consideremos ahora que E es arbitrario y que $\mu^*(E) < \infty$, entonces por (7.3) para cada $\epsilon > 0$ existe un abierto $V \supset E$, tal que $\mu(V) < \mu^*(E) + \epsilon$, por tanto

$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \epsilon &> \mu(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^c). \end{aligned}$$

(3) $\mu = \mu|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}$ es cuasi-regular: Es regular exterior por definición.

Veamos que es finita en cada compacto K : si $I_K \leq f$ para $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ (que existe por el Lema de Urysohn) y elegimos un $t > 1$ tendremos que $K \subset \{f > 1/t\} = U_t$, por tanto $\mu(K) \leq \mu(U_t)$, pero además U_t es abierto y por (7.2) $\mu(U_t) \leq t\Lambda(f)$, pues para toda $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $\text{sop}(g) \subset U_t$ y $0 \leq g \leq I_{U_t}$, tendremos que $g \leq tf$ y por ser Λ positivo $\Lambda(g) \leq t\Lambda(f)$. Ahora haciendo $t \rightarrow 1$, $\mu(K) \leq \Lambda(f) < \infty$ y μ es finita en los compactos. Ahora si $U \supset K$ es un abierto, por el Lema de Urysohn existe $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $I_K \leq f \leq I_U$ y $\text{sop}(f) \subset U$, por tanto

$$\mu(K) \leq \Lambda(f) \leq \mu(U),$$

y por ser μ regular exterior tendremos

$$(7.4) \quad \mu(K) = \inf\{\Lambda(f) : f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}), I_K \leq f\}.$$

Veamos ahora que μ es regular interior en cada abierto U , para ello sea $r < \mu(U)$ entonces por (7.2) existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $g \leq I_U$, $K = \text{sop}(g) \subset$

U , tal que $r < \Lambda(g) < \mu(U)$, y para toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $I_K \leq f$, tendremos que $g \leq f$, por tanto $\Lambda(g) \leq \Lambda(f)$ y por (7.4) $\Lambda(g) \leq \mu(K)$, por tanto $r < \mu(K) \leq \mu(U)$ y se tiene el resultado.

(4) Por linealidad basta ver que $\Lambda(f) = \int f d\mu$, para $f \geq 0$. Sea $\epsilon > 0$ y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) < (n-1)\epsilon, \\ f(x) - (n-1)\epsilon, & \text{si } (n-1)\epsilon \leq f(x) < n\epsilon, \\ \epsilon, & \text{si } n\epsilon \leq f(x), \end{cases}$$

entonces $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ pues para $K_0 = \text{sop}(f)$ y $K_n = \{n\epsilon \leq f\}$, $\text{sop}(f_n) \subset K_{n-1}$ y todas son nulas salvo un número finito, pues para un m suficientemente grande $f(x) \leq m\epsilon$, ya que f es acotada. Además $f = \sum_{n=1}^m f_n$ y $\epsilon I_{K_n} \leq f_n \leq \epsilon I_{K_{n-1}}$, por tanto integrando se obtiene la primera de las desigualdades

$$\begin{aligned} \epsilon \mu(K_n) &\leq \int f_n d\mu \leq \epsilon \mu(K_{n-1}), \\ \epsilon \mu(K_n) &\leq \Lambda(f_n) \leq \epsilon \mu(K_{n-1}), \end{aligned}$$

y la de la izquierda en la segunda se sigue de (7.4) y $\epsilon I_{K_n} \leq f_n$ y la de la derecha también de (7.4), pues para cada $g \in \mathcal{C}_c$, con $I_{K_{n-1}} \leq g$, es $f_n \leq \epsilon g$, ya que $f_n \leq \epsilon I_{K_{n-1}}$, por tanto $\Lambda(f_n)/\epsilon \leq \Lambda(g)$. Ahora sumando en ambas desigualdades se tiene que

$$\epsilon \sum_{n=1}^m \mu(K_n) \leq \int f d\mu, \quad \Lambda(f) \leq \epsilon \sum_{n=0}^{m-1} \mu(K_n),$$

y por tanto

$$\left| \int f d\mu - \Lambda(f) \right| \leq \epsilon [\mu(K_0) - \mu(K_m)] \leq \epsilon \mu(K_0),$$

pues $K_m \subset K_0$ y $\mu(K_m) \leq \mu(K_0)$. ■

Nota 7.3.2 Observemos que el enunciado del Teorema de Riesz se puede cambiar en los siguientes casos:

Si \mathcal{X} es σ -compacto, poniendo regular en vez de cuasi-regular, por (7.2.3), pág.244.

Si todo abierto de \mathcal{X} es σ -compacto, poniendo simplemente finita en los compactos en vez de cuasi-regular, que por (7.2.1), pág.243 equivale a ser regular.

Corolario 7.3.3 *En las condiciones del Teorema anterior si además Λ es continua, entonces la medida μ es regular y finita y $\|\mu\| = \mu(\mathcal{X}) = \|\Lambda\|$.*

Demostración. Por (7.2) se tiene la igualdad en

$$\|\Lambda\| \leq \mu(\mathcal{X}) = \sup\{\Lambda(f) : f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}), 0 \leq f \leq 1\} \leq \|\Lambda\|. \quad \blacksquare$$

Nota 7.3.4 Si denotamos con \mathcal{M}_r^+ el subconjunto de las medidas positivas de \mathcal{M}_r (ver definición 7.2, pág.244) y con $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})^{*+}$ los funcionales lineales continuos y positivos en $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, el resultado anterior nos dice que hay una biyección isométrica entre ellos, que entenderemos mejor en el segundo **Teorema de Representación de Riesz** (7.3.7), pág.255, en el que nos preguntamos si hay un resultado análogo para $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})^*$, es decir para los funcionales lineales continuos sin que sean necesariamente positivos.

En este sentido lo primero que observamos es que la aplicación restricción

$$\mathcal{C}_0(\mathcal{X})^* \rightarrow \mathcal{C}_c(\mathcal{X})^*,$$

es un isomorfismo isométrico, pues es inyectiva por ser $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ denso en $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ (ver (7.2.10), pág.248); y es sobre y conserva la norma por el Teorema de Hahn–Banach (6.3.7), pág.212.

Por otra parte cada funcional lineal y continuo complejo $I \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{C})^*$, está determinado por su restricción J a $\mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, pues para cada $f = f_1 + if_2 \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, $I(f) = I(f_1) + iI(f_2) = J(f_1) + iJ(f_2)$ y $J = J_1 + iJ_2$, para $J_i \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})^*$, funcionales lineales y continuos reales. Veamos que cada $J_i \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})^*$ tiene una *descomposición de Jordan*.

Teorema 7.3.5 *Si $J \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})^*$, existen funcionales lineales continuos y positivos $J^+, J^- \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})^*$, tales que $J = J^+ - J^-$.*

Demostración. Para cada $f \geq 0$, $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, definimos

$$J^+(f) = \sup\{J(g) : g \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}), 0 \leq g \leq f\},$$

el cual es finito pues para cada g del conjunto $|J(g)| \leq \|J\| \|f\|_\infty$, por tanto $0 \leq J^+(f) \leq \|J\| \|f\|_\infty$. Además para cada $c \geq 0$, $J^+(cf) = cJ^+(f)$ y si $f_1, f_2 \geq 0$, $f_i \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, entonces

$$(7.5) \quad J^+(f_1 + f_2) = J^+(f_1) + J^+(f_2),$$

pues por una parte si $0 \leq g_i \leq f_i$ y $g_i \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$ siendo $J^+(f_1 + f_2) \geq J(g_1 + g_2) = J(g_1) + J(g_2)$ y tomando supremos

$J^+(f_1 + f_2) \geq J^+(f_1) + J^+(f_2)$; y por otra parte si $0 \leq g \leq f_1 + f_2$ y $g \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, considerando $g_1 = \min(g, f_1)$ y $g_2 = g - g_1$, tendremos que $g_i \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, $0 \leq g_1 \leq f_1$ y $0 \leq g_2 \leq f_2$, por tanto

$$J(g) = J(g_1) + J(g_2) \leq J^+(f_1) + J^+(f_2),$$

y tomando supremos tenemos la otra desigualdad.

Ahora para cada $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, consideramos $f = f^+ - f^-$ y definimos

$$J^+(f) = J^+(f^+) - J^+(f^-),$$

observando que si $g, h \geq 0$, $g, h \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ y $f = g - h$, entonces también $J^+(f) = J^+(g) - J^+(h)$, pues $f^+ + h = g + f^-$ y por (7.5)

$$J^+(f^+) + J^+(h) = J^+(g) + J^+(f^-) \Rightarrow$$

$$J^+(f^+) - J^-(f^-) = J^+(g) - J^+(h).$$

De esto se sigue que J^+ es lineal, pues para $f, g \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ como $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$, tendremos que

$$J^+(f + g) = J^+(f^+ + g^+) - J^+(f^- + g^-) = J^+(f) + J^+(g),$$

y para $c \in \mathbb{R}$, $J^+(cf) = cJ^+(f)$. Además es positivo y continuo, pues es acotado ya que para cada $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |J^+(f)| &\leq \max\{J^+(f^+), J^+(f^-)\} \\ &\leq \|J\| \cdot \max\{\|f^+\|_\infty, \|f^-\|_\infty\} = \|J\| \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

y $\|J^+\| \leq \|J\|$. Por último definimos $J^-(f) = J^+(f) - J(f)$, el cual es lineal, continuo y positivo y se tiene el resultado. ■

Corolario 7.3.6 *Para cada funcional lineal y continuo complejo $I \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{C})^*$, existen cuatro medidas finitas y regulares μ_i^\pm , con $i = 1, 2$, tales que para $\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i\mu_2^+ - i\mu_2^- \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathbb{C})$,*

$$I(f) = \int f d\mu.$$

Demostración. Se sigue de los resultados anteriores pues para cada $f = f_1 + if_2 \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, $J_i^\pm(f) = \int f d\mu_i^\pm$ y

$$\begin{aligned} I(f) &= I(f_1) + iI(f_2) = J(f_1) + iJ(f_2) \\ &= J_1(f_1) + iJ_2(f_1) + i(J_1(f_2) + iJ_2(f_2)) \\ &= J_1^+(f_1) - J_1^-(f_1) + i(J_2^+(f_1) - J_2^-(f_1)) \\ &\quad + i[J_1^+(f_2) - J_1^-(f_2) + i(J_2^+(f_2) - J_2^-(f_2))]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dada $\mu \in \mathcal{M}_r$ el funcional

$$\Lambda: \mathcal{C}_0(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \Lambda(f) = \int f d\mu,$$

es lineal y continuo pues

$$|\Lambda(f)| = \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d|\mu| \leq \|f\|'_\infty \|\mu\|,$$

y $\|\Lambda\| \leq \|\mu\|$. El siguiente teorema nos asegura que todos los funcionales lineales y continuos en $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ son de esta forma y que además $\|\Lambda\| = \|\mu\|$.

Teorema de Representación de Riesz II 7.3.7 *La aplicación*

$$\mathcal{M}_r \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathcal{X})^*, \quad \mu \rightarrow \Lambda, \quad \Lambda(f) = \int f d\mu,$$

es un isomorfismo isométrico.

Demostración. Que es sobre lo hemos visto en (7.3.6). Veamos que es isometría, es decir que si $\mu \in \mathcal{M}_r$ y $\Lambda(f) = \int f d\mu$, entonces $\|\Lambda\| = \|\mu\|$. La desigualdad $\|\Lambda\| \leq \|\mu\|$ acabamos de verla y por otro lado si consideramos la representación polar de μ , $h = d\mu/d|\mu|$, con $|h| = 1$ (ver (4.4.8), pág.149) y cualquier $\epsilon > 0$, tendremos por el Teorema de Lusin (7.2.5), pág.245, que existe $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $\|f\|'_\infty \leq 1$ y $f = \bar{h}$ salvo en un boreliano E con $|\mu|(E) < \epsilon/2$. Por tanto

$$\begin{aligned} \|\mu\| &= |\mu|(\mathcal{X}) = \int \bar{h} h d|\mu| = \int \bar{h} d\mu = \left| \int (f + \bar{h} - f) d\mu \right| \\ &\leq \left| \int f d\mu \right| + \left| \int (\bar{h} - f) d\mu \right| \leq |\Lambda(f)| + 2|\mu|(E) \leq \|\Lambda\| + \epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 7.3.8 El caso compacto de este Teorema es aparentemente un caso particular, sin embargo es el general, pues tomando duales en la sucesión exacta (7.1), pág.248, tendremos la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{K} & \rightarrow & \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})^* & \rightarrow & \mathcal{C}_0(\mathcal{X})^* \rightarrow 0 \\ & & & & \Lambda & \rightsquigarrow & \Lambda|_{\mathcal{C}_0} \\ & & a & \rightsquigarrow & a\hat{p} & \rightsquigarrow & 0 \end{array}$$

siendo la norma del espacio $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})^*$ la cociente, es decir

$$\|\Lambda|_{\mathcal{C}_0}\| = \inf\{\|\Gamma\| : \Gamma \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})^*, \Gamma = \Lambda \text{ en } \mathcal{C}_0\},$$

pues por un lado se tiene la desigualdad \geq por el Teorema de Hahn–Banach, (6.3.7), pág.212, ya que existe $\Gamma \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})^*$, verificando $\Gamma = \Lambda$ en \mathcal{C}_0 y $\|\Gamma\| = \|\Lambda|_{\mathcal{C}_0}\|$ y por otro lado la \leq , pues para cualquier Γ del conjunto

$$\begin{aligned}\|\Lambda|_{\mathcal{C}_0}\| &= \sup\{|\Lambda(f)| : f \in \mathcal{C}_0, \|f\| = 1\} \\ &= \sup\{|\Gamma(f)| : f \in \mathcal{C}_0, \|f\| = 1\} \leq \|\Gamma\|.\end{aligned}$$

Y por otro lado tenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc}0 & \rightarrow & \mathbb{K} & \rightarrow & \mathcal{M}_r(\bar{\mathcal{X}}) & \rightarrow & \mathcal{M}_r(\mathcal{X}) \rightarrow 0 \\ & & & & \mu & \rightsquigarrow & \mu|_{\mathcal{X}} \\ & & a & \rightsquigarrow & a\delta_p & \rightsquigarrow & 0\end{array}$$

con lo que el isomorfismo isométrico en el caso compacto implica el caso localmente compacto

$$\mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})^* \simeq \mathcal{M}_r(\bar{\mathcal{X}}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}_0(\mathcal{X})^* \simeq \mathcal{M}_r(\mathcal{X}).$$

7.4 Bibliografía y comentarios

Este capítulo es una especie de cajón de sastre en el que hemos colocado aquellos resultados, a nuestro entender mas importantes, en los que se relacionan la topología y la medida. No obstante hay muchas cuestiones relativas a este tópico que no hemos incluido y que esperamos cubrir con las referencias y comentarios que a continuación detallamos. Por lo que respecta a la confección directa del tema, la bibliografía básica es la siguiente:

ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.

COHN, D.L.: “*Measure theory*”. Birkhauser (Boston), 1980.

LANG, S.: “*Real Analysis*”. Addison–Wesley, 1969.

MUHKERJEA, A. AND POTHOVEN, K.: “*Real and functional Analysis*”. Plenum Press, 1978.

ROYDEN, H.L.: “*Real Analysis*”. McMillan Pub., 1968.

RUDIN, W.: “*Real and complex analysis*”, Tata McGraw–Hill, 1974.

SEGAL, I.E. AND KUNZE, R.A.: “*Integrals and operators*”. Springer–Verlag, 1978.

TJUR, T.: “*Probability based on Radon Measures*”. J.Wiley, 1980.

WEIR, A.J.: “*General integration and measure. Vol.II*”. Cambridge Univ. Press, 1974.

Como bibliografía complementaria consideramos el

DINCULEANU, N.: “*Integration on locally compact spaces*”. Noordhoff, 1974.

que es un grueso tratado, continuación del libro del mismo autor “*Vector measures*”, y en el que se estudia la integración de funciones $f: \mathcal{X} \rightarrow E$ donde \mathcal{X} es Hausdorff localmente compacto y E es de Banach. La importancia de los espacios localmente compactos en la teoría de la medida queda justificada, en palabras de este autor en el prefacio de su libro, por las siguientes tres razones:

1.- Los espacios localmente compactos tienen la propiedad de que las medidas definidas sobre ellos poseen propiedades similares a las de la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Una de las características principales de estos espacios es la existencia de una rica clase de subconjuntos con propiedades muy importantes: Los compactos. Otra importante característica es la existencia de una familia localmente numerable (ver p.190 del libro) de compactos disjuntos cuya unión es casi igual a todo el espacio. Esto permite establecer teoremas clásicos como Radón—Nikodym ó Fubini sin hacer restricciones sobre la medida.

2.- Los espacios localmente compactos son al mismo tiempo suficientemente generales como para que una teoría de integración, desarrollada en ellos, sea aplicable en distintas áreas del Análisis, como por ejemplo en Análisis armónico o la teoría potencial.

3.- Por último, la integración sobre espacios abstractos puede siempre ser reducida a la integración sobre espacios localmente compactos.

Esta última razón puede leerse también en la p.2 del libro

NACHBIN, L.: “*The Haar integral*”. Krieger, 1976.

en la que añade su autor que tal reducción puede hacerse en cierto sentido en base a un cierto resultado de KAKUTANI del que no da referencia. Desconocemos tal resultado, no obstante remitimos al lector al capítulo VIII, p.233 del libro de SEGAL—KUNZE, sobre teoría de integración algebraica, en la que se da un resultado en esta línea de interés en teoría de probabilidades. Tal resultado se basa en las ideas de GELFAND de representación de un anillo conmutativo como un espacio de funciones continuas sobre su espectro.

En los libros de TJUR, p.23 y LANG, p.339, podemos encontrar un interesante resultado válido en los espacios localmente compactos, en el que se construye una (única) medida en todo el espacio, a partir de una familia de medidas en abiertos del espacio que lo recubren, con la pro-

piedad de que en la intersección de dos abiertos de la familia las correspondientes medidas coinciden, de tal manera que la medida obtenida restringida a cada abierto nos da la del abierto. En el SEGAL—KUNZE, p.132, se demuestra un teorema de la medida producto para σ -anillos de Baire, que complementa el dado por nosotros en (??). En este teorema se establece que el producto de σ -anillos de Baire es un σ -anillo de Baire —ver también HALMOS, p.222—, y que el producto de medidas regulares es regular. Su prueba hace uso, como comentamos en la lección 7, del teorema de Stone-Weierstrass. Si el espacio tiene una base numerable para su topología, entonces los σ -anillos de Borel y de Baire coinciden (ver SEGAL—KUNZE, p.54). En el ROYDEN, p.314 se demuestra que toda medida de Baire regular puede extenderse a una medida de Borel cuasi-regular, tal que cada Borel de medida finita puede ponerse como diferencia simétrica de un Baire y un Borel de medida nula.

En el libro de SEGAL—KUNZE, “*se sugiere...*”, en palabras de CONSTANTINESCU—WEBER, “... *pero no se desarrolla, la definición abstracta de integral...*”, que utilizan en su libro

CONSTANTINESCU, C. AND WEBER, K.: “*Integration theory, Vol. I, Measure and integral*”. J. Wiley, 1985.

en el que la intención de sus autores es unificar los dos aspectos en los que se ha venido considerando la teoría de la integración en la segunda mitad del siglo XX: el abstracto y el topológico. Hemos visto en algunos resultados del tema, y lo comentábamos a propósito de las razones de DINCULEANU sobre su preferencia de la teoría topológica, que cuando el espacio tiene buenas propiedades topológicas, ambas teorías llevan prácticamente a los mismos resultados esenciales. Pero para espacios topológicos mas complicados la teoría topológica lleva a resultados mas fuertes. La unificación de estas dos vías propuesta por estos autores se basa en una definición alternativa para la integral de la teoría abstracta, de tal manera que incluye a la antigua, en el sentido de que aumentan las funciones integrables y las que antes lo eran siguen teniendo la misma integral. Además ambas definiciones coinciden si el espacio es σ -finito. El libro desarrolla los conceptos siguiendo el marco de ideas de Daniell.

En el libro de

OXTOBY, J. C.: “*Measure and Category*”. Springer-Verlag, 1971.

hay dos temas principales —ambos relacionando la topología con la medida—, que son: El **teorema de la categoría de Baire**, como un método para probar la existencia (ver la lección de análisis de Fou-

rier en $\mathcal{C}(T)$). Y la dualidad entre categoría (en el sentido topológico) y medida.

Hagamos un poco de historia sobre los resultados mas importantes del tema. En 1903 HADAMARD propone en la nota

HADAMARD: “*Sur les operations fonctionelles*”. C.R.Acad.Sci. Paris, 1903.

el problema de encontrar una expresión analítica para los funcionales lineales y continuos de $\mathcal{C}[a, b]$. Él mismo contesta la cuestión del siguiente modo:

“Dado $\Lambda : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continuo puede ponerse de la forma

$$\Lambda(f) = \lim_{y \rightarrow \infty} \int F(x, y) f(x) dx,$$

para F continua”.

Sin embargo esta representación no es única. En 1909 RIESZ da la solución definitiva en

RIESZ, F.: “*Sur les operations fonctionelles lineaires*”. C.R.Acad.Sci. Paris, **149**, 974–977, 1909.

utilizando la integral definida por Stieltjes y probando el **Primer Teorema de Representación de Riesz** (ver BENEDETTO, p.255):

$\Lambda \in \mathcal{C}^*[a, b]$ si existe $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada, tal que $\|\Lambda\| = v_g(b)$ y para cada $f \in \mathcal{C}[a, b]$ se tiene $\Lambda(f) = \int f dg$. Además g es única si identificamos las funciones de variación acotada con los mismos puntos de continuidad y en ellos se diferencien en una constante”.

El nombre de *medida de Radón* se debe al hecho de que el autor del artículo

RADON, J.: “*Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunctionen*”. S.B. Akad. Wiss. Wien, **122**, 1295–1438, 1913.

da una correspondencia biunívoca entre las medidas sobre un compacto \mathcal{X} de \mathbb{R}^n y los funcionales lineales y positivos en $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ (no se en que términos). En 1937 S.BANACH, en un apéndice titulado “*The Lebesgue integral in abstract spaces*”, en las pp. 320-330, del libro

SACKS, S.: “*Theory of the integral*”, 1937. Dover, 1964.

extiende el resultado al caso de un espacio métrico compacto y lo hace no considerando una medida, sino extendiendo el funcional a un espacio de funciones que contiene a todas las borel medibles acotadas (la medida de un boreliano A es entonces el funcional aplicado al I_A). En 1941 es

KAKUTANI, S.: “Concrete representation of abstract (M) -Spaces. A characterization of the space of continuous functions”. *Ann. of Math.*, **2**, 42, 994–1024, 1941.

quien lo extiende al caso de un espacio Hausdorff compacto, considerando medidas reales en vez de medidas positivas. Recientemente han contribuido en este tema,

HALMOS, P.R.: “*Measure Theory*”. Springer-Verlag, 1974.

HEWITT, E.: “Linear functionals on spaces of continuous functions”. *Fund. Math.*, **37**, 161–189, 1950.

EDWARDS, R.E.: “A theory of Radon measures on locally compact spaces”. *Acta Math.*, **89**, 133–164, 1953.

Sin embargo una introducción completa a la teoría de la medida basada en las medidas de Radón, no fue realizada hasta 1952 por un grupo de matemáticos franceses llamado NICOLAS BOURBAKI, cuando publicó la primera edición de la obra

BOURBAKI, N.: “*Integration, Ch.I–IX*”. Hermann, Paris, 1952–1956–1959–1963–1969.

Todos los anteriores e incluso bastantes de los posteriores libros sobre medida e integración, están basadas en medidas abstractas con suposiciones topológicas adicionales cuando son convenientes. La aproximación Bourbakista tiene por otra parte la ventaja de suministrar una base conveniente, para pasar de la teoría de integración a la teoría de las distribuciones de L.SCHWARTZ. Por otra parte, como el propio L.Schwartz dice en su libro

SCHWARTZ, L.: “*Radon measures on arbitrary topological spaces. And cylindrical measures*”. Oxford Univ. Press., 1973.

“... el defecto fundamental de la teoría Bourbakista de las medidas de Radón consiste en que los espacios en los que están definidas las funciones que aparecen en la teoría de las Probabilidades, no suelen ser localmente compactos...”. Por ello introduce su propio concepto de medida de Radón —realmente introduce tres conceptos mutuamente relacionados, de los que terminará quedándose con el mas conveniente—, la cual está definida en los borelianos de un espacio Hausdorff. En sus palabras tal medida “... combina las ventajas de las dos exposiciones habituales, la abstracta y la de Bourbaki, dando cohesión a muchos resultados que en la teoría abstracta se obtienen con hipótesis adicionales y manteniendo las buenas propiedades de las medidas de Radón de Bourbaki”.

El teorema de existencia de Kolmogorov apareció en

KOLMOGOROV, A.N.: “*Foundations of the theory of Probability*”. 1933; Reed. por Chelsea Pub. Co., 1956.

para el caso en que los espacios $\mathcal{X}_t = \mathbb{R}$. Una versión temprana de este resultado, en la línea del dado por TJUR ó por BOURBAKI fue dada por

DANIELL, P.J.: “*Functions of limited variation in an infinite number of dimensions*”. Ann.Math. (2), 21, 30–38, 1920.

Otra prueba del teorema de existencia de Kolmogorov puede verse en la pág.506 del libro de

BILLINGSLEY, P.: “*Probability and measure*”. John Wiley, 1986.

y en el que hace hincapié de su importancia fundamental en el estudio de los procesos estocásticos (familias de variables aleatorias en un espacio de probabilidad), pues estos vienen descritos habitualmente en términos de las distribuciones que inducen en los espacios euclídeos, es decir por sus distribuciones finito dimensionales, y aunque el sistema de estas distribuciones finito dimensionales no determinan completamente las propiedades del proceso, el primer paso en una teoría general es construir un proceso que tenga un sistema dado de distribuciones finito dimensionales.

En cuanto a la medida de Haar esta constituye un importante campo de la teoría de la medida, siendo una generalización extremadamente útil de la teoría de Lebesgue en el grupo \mathbb{R}^n . La medida de Haar es una medida invariante por traslaciones, sobre un grupo topológico Hausdorff localmente compacto. Los grupos topológicos fueron considerados por primera vez por SOPHUS LIE en el caso particular, pero fundamental, de los grupos analíticos, en los que mediante apropiados sistemas de coordenadas las operaciones del grupo pueden expresarse en términos de funciones analíticas. A comienzos del siglo XX, HILBERT y BROUWER consideraron grupos topológicos mas generales que los tratados por LIE. Los fundamentos de la teoría general de grupos topológicos fue establecida mucho después, en 1926 y 1927 por SCHREIER y LEJA. Para estudiar la estructura de ciertos grupos topológicos D.HILBERT propone en 1900 el siguiente problema —conocido como quinto problema de Hilbert, de una larga serie que propuso—: ¿Es cada grupo topológico, localmente euclídeo, un grupo de Lie?. En 1933

HAAR, A.: “*Der massbegriff in der theorie der kontinuierlichen gruppen*”. Ann. of Math., 2, 34, 147–169, 1933.

da un paso fundamental hacia la solución del problema, estableciendo la existencia de una medida invariante por traslaciones, sobre un grupo to-

pológico localmente compacto con una base numerable de abiertos. Ese mismo año J. VON NEUMANN, utilizando ese resultado, resuelve afirmativamente el problema de HILBERT para grupos compactos localmente Euclídeos y en el artículo

NEUMANN, J. VON.: “*Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen*”. *Comp. Math.*, I, 106–114, 1934.

prueba que para grupos compactos la medida de Haar estaba únicamente determinada salvo factores constantes. J. VON NEUMANN y A. WEYL generalizaron el resultado de Haar a grupos localmente compactos. En 1940

WEYL, A.: “*L’integration dans les groupes topologiques et ses applications*”. Hermann, 1940.

prueba que la existencia de una medida invariante en un grupo es una característica de los grupos localmente compactos, en el sentido de que si un grupo topológico Hausdorff la tiene, entonces es localmente precompacto. Por otra parte la demostración que aquí da WEYL de la existencia de una medida invariante por traslaciones en un grupo localmente compacto, se basa en el **Teorema de Tychonov** —que es consecuencia del axioma de elección— y aquí radica su crítica habitual, aunque su demostración es mas corta que otras, como la que da

BANACH, S.: “*On Haar’s Measure*”. Apéndice del libro de Saks, pp.314–319.

que está formulada en términos de límites generalizados y que en palabras de NACHBIN “... *conllea críticas similares a las de Weyl...*”. En 1940

CARTAN, H.: “*Sur la mesure de Haar*”. *C.R.Acad.Sci.Paris*, **211**, 759–762, 1940.

da una prueba de este resultado sin las críticas que acompañaron a sus predecesores. CARTAN construye la integral de Haar como un cierto límite, aplicando el criterio de convergencia de Cauchy, con lo que consigue garantizar simultáneamente su existencia y su unicidad. No obstante su demostración es mas larga y menos simple que la de WEYL. Para una demostración de ambas remitimos al lector al libro de

NACHBIN, L.: “*The Haar integral*”. Krieger, 1976.

Otra demostración de este resultado fue dada por MONTGOMERY Y ZIPPIN en 1955, siguiendo para ello una idea de KAKUTANI y KODAIRA en base a la cual era suficiente establecer el resultado para grupos localmente compactos separables, pues el caso general se obtenía teniendo en cuenta que cada grupo localmente compacto tiene numerosos subgrupos

invariantes y cerrados cuyos grupos cocientes son separables. Por otra parte tres años antes, en 1952, estos dos autores junto con A. GLEASON dieron una contestación completa al quinto problema de HILBERT.

Nosotros hemos probado la existencia de la medida de Haar en un grupo compacto, siguiendo al Mukherjea-Pothoven, quienes a su vez lo hacen basándose en un resultado de

KAKUTANI, S.: "*Two fixed-point theorems concerning bicomact convex sets*". Proc. Imp. Acad. Tokyo, **14**, 242-245, 1938.

Para otros comentarios históricos y bibliográficos sobre la medida de Haar, remitimos al lector a la pág.316 del libro

BOURBAKI, N.: "*Elementos de historia de las matemáticas*". Alianza Univ., 1976.

En cuanto a la teoría de integración de Daniell, tenemos que en 1911

YOUNG, W.H.: "*A new method in the theory of integration*". Proc. London Math. Soc., **2**, T.9, 15-50, 1911.

partiendo de la integral de Cauchy sobre las funciones continuas de soporte compacto, define sucesivamente la integral superior de las funciones semicontinuas inferiormente y después de cualquier función, obteniendo de esta manera una definición de las funciones integrables idéntica a la de LEBESGUE, pero por medios únicamente funcionales. En 1918

DANIELL, P.J.: "*A general form of integral*". Ann. Math., **19**, 279-294, 1918.

extendió esta exposición, con algunas modificaciones, a las funciones definidas en un conjunto cualquiera, definiendo la integral como un funcional lineal sobre una clase de funciones y definiendo las nociones de medida y medibilidad de funciones en términos de ese funcional. En 1940

RIESZ, F.: "*Sur quelques notions fondamentales dans la theorie generale des operations lineaires*". Ann. of Math., (2), t.XLI, 174-206, 1940.

expone, de forma concisa y elegante, los resultados de la teoría de los espacios ordenados que intervienen en la teoría de integración. Sobre este tópico remitimos al lector a los siguientes tratados:

LUXEMBURG, W.A.J. AND ZAAENEN, A.C.: "*Riesz Spaces. Vol. I*". North Holland, 1971.

FREMLIN, D.H.: "*Topological Riesz Spaces and Measure Theory*". Cambridge Univ. Press. 1974.

Por último citemos la importante aportación de

STONE, M.H.: "*Notes on integration I-IV*". Proc. Nat. Acad. Sci., **34**, **35**, 1848-1949. que ha contribuido notablemente en el desarrollo de este punto de vista.

Fin del Tema VII

Ejercicios difíciles

Ejercicio 1 Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) y dos medidas en él $\mu \leq \nu$. Demostrar:

- a) Hay una medida λ tal que $\mu + \lambda = \nu$.
- b) Si μ es σ -finita, λ es única.

Ejercicio 2 Demostrar que para $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, la relación $A \simeq B$ si y sólo si $\mu(A \Delta B) = 0$, es de equivalencia, que la aplicación

$$\rho(A, B) = \mu(A \Delta B),$$

es una métrica en el conjunto cociente $\mathcal{X} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \infty\} / \simeq$ y que el espacio métrico (\mathcal{X}, ρ) es completo.

Ejercicio 3 Demostrar que el espacio métrico completo del ejercicio anterior, en el caso particular de $\Omega = [0, 1]$, \mathcal{A} los borelianos del intervalo y μ la medida de Lebesgue, no es compacto.

Ejercicio 4 Sean f, f_n, g, g_n integrables, tales que $|f_n| \leq g_n$, $f_n \rightarrow f$ c.s., $g_n \rightarrow g$ c.s. y $\int g_n \rightarrow \int g$. Demostrar que $\int f_n \rightarrow \int f$.

Ejercicio 5 Demostrar que si $f, f_n \in L_p$ ($p < \infty$) y $f_n \rightarrow f$ c.s. entonces $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$ sii $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Ejercicio 6 Para cada $1 \leq p \leq \infty$, ¿bajo que condiciones sobre f y g se da la igualdad en la desigualdad de Holder?, ¿y en la de Minkowsky?.

Ejercicio 7 Demostrar que si $\mu(\Omega) = 1$ y $f \geq 0$ es medible, entonces para $k = \int f d\mu$, se verifica

$$\sqrt{1 + k^2} \leq \int \sqrt{1 + f^2} d\mu \leq 1 + k.$$

Dar una interpretación geométrica de las desigualdades en el caso en que $f = g'$ y sea continua, $\mu = m$ y $\Omega = [0, 1]$.

Ejercicio 8 Demostrar que si $1 \leq r < p < s < \infty$, entonces: a) $L_r \cap L_s$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\| = \|f\|_r + \|f\|_s$ y la inclusión $L_r \cap L_s \rightarrow L_p$ es continua. b) Que $L_r + L_s$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\| = \inf\{\|g\|_r + \|h\|_s : f = g + h\}$ y la inclusión $L_p \rightarrow L_r + L_s$ es continua.

Ejercicio 9 i) Demostrar que para $x \geq 0$, $\log x \leq x - 1$ y $x \log x \geq x - 1$.

ii) Demostrar que si $\mu(\Omega) = 1$ y $0 < r < s < \infty$, entonces para $f \in L_s$, $\|f\|_r \leq \|f\|_s$ y que para $\exp\{-\infty\} = 0$ y $\log 0 = -\infty$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|f\|_p = \exp\left\{\int \log |f| d\mu\right\}.$$

Ejercicio 10 Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y $f \in L_\infty$, $\|f\|_\infty \neq 0$, entonces para $a_n = \int |f|^n d\mu$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \|f\|_\infty.$$

Ejercicio 11 Demostrar la desigualdad de Heisenberg para $f = f_1 + if_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, con $f_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $f \in L_2$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Ejercicio 12 Demostrar que si $f \in L_1(\mathbb{R})$ y $g \in L_p(\mathbb{R})$, entonces $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$ está en L_p y

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Ejercicio 13 Demostrar que en un espacio de medida σ -finito $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, si $fg \in L_1$ para toda $f \in L_p$, entonces $g \in L_q$, para q el conjugado de p .

Ejercicios resueltos

Ejercicios resueltos Tema I

Ejercicio 1.2.3.- Dada una aplicación $F: \Omega \rightarrow \Omega'$, demostrar que:

- (a) Si \mathcal{A} es una σ -álgebra de Ω , $\mathcal{A}' = \{B \subset \Omega' : F^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ lo es de Ω' .
 (b) Si \mathcal{A}' es una σ -álgebra de Ω' , $\mathcal{A} = F^{-1}[\mathcal{A}'] = \{F^{-1}(B) \subset \Omega : B \in \mathcal{A}'\}$ lo es de Ω .
 (c) Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega')$, $\sigma[F^{-1}(\mathcal{C})] = F^{-1}[\sigma(\mathcal{C})]$.
 (d) Demostrar que si (Ω, T) y (Ω', T') son espacios topológicos y F es continua, entonces $F^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\Omega)$, para todo $B \in \mathcal{B}(\Omega')$.

Ind.- (c) Aplicar el principio de los buenos conjuntos. (d) Aplicar (c).

Ejercicio 1.2.4.- Consideremos las siguientes extensiones de una familia \mathcal{C} de subconjuntos de Ω :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{C} \text{ ó } A^c \in \mathcal{C}\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{A_1 \cap \cdots \cap A_n : A_i \in \mathcal{C}_1, n \in \mathbb{N}\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{A_1 \cup \cdots \cup A_n : A_i \in \mathcal{C}_2, n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Demostrar que $\mathcal{C}_3 = \alpha(\mathcal{C})$.

Solución.- Por una parte tenemos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_3 \subset \alpha(\mathcal{C})$, por tanto $\alpha(\mathcal{C}_3) = \alpha(\mathcal{C})$ y basta demostrar que \mathcal{C}_3 es álgebra. Que $\emptyset, \Omega \in \mathcal{C}_3$ es obvio,

$$\begin{aligned}A &= A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{C}_3 \quad \Rightarrow \\ A^c &= A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c = (\cup_{j=1}^{m_1} B_{1j}) \cap \cdots \cap (\cup_{j=1}^{m_n} B_{nj}) \\ &= \cup_{j_1=1}^{m_1} \cdots \cup_{j_n=1}^{m_n} [\cap_{i=1}^n B_{ij_i}] \in \mathcal{C}_3,\end{aligned}$$

donde los $B_{ij} \in \mathcal{C}_1$. Por último es cerrado para uniones finitas. ■

Ejercicio 1.2.5.- Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles. Demostrar que la familia de los productos de medibles,

$$\mathcal{R} = \{A_1 \times \cdots \times A_n \subset \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n : A_i \in \mathcal{A}_i\},$$

es una clase elemental.

Solución.- $\emptyset \in \mathcal{R}$ y

$$\begin{aligned}(A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) &= (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n), \\ [A_1 \times \cdots \times A_n]^c &= A_1^c \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \cup \\ &\quad A_1 \times A_2^c \times \cdots \times \Omega_n \cup \cdots \cup \\ &\quad A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n^c \in \mathcal{A}_0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.9.- ¿Puede una σ -álgebra infinita contener sólo una colección numerable de elementos?

Ind. No, porque al menos tendría una colección numerable A_n de conjuntos disjuntos y las uniones arbitrarias de estos serían distintas e identificando cada A_n con $n \in \mathbb{N}$, estas uniones se identificarían con partes de \mathbb{N} que es no numerable.

Ejercicio 1.3.3.- Dada una medida μ y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$, demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ind. Tómense los conjuntos disjuntos $B_n = (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})^c \cap A_n$. \blacksquare

Ejercicio 1.3.5.- Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$, demostrar que:

- (a) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$.
 (b) Que si $\mu(\cup A_n) < \infty$, entonces $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.

Solución.- Sean $B_n = \cap_{i=n}^{\infty} A_i$ y $C_n = \cup_{i=n}^{\infty} A_i$, entonces $B_n \subset A_n \subset C_n$, $\mu(B_n) \leq \mu(A_n) \leq \mu(C_n)$ y $B_n \uparrow \liminf A_n$, $C_n \downarrow \limsup A_n$. \blacksquare

Ejercicio 1.3.6.- (Lema de Borel–Cantelli) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $C_n \in \mathcal{A}$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\limsup C_n) = 0.$$

Ind. Sea $D_n = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$, $\mu(D_1) < \infty$, $\mu(D_n) \downarrow 0$ y $D_n \downarrow \limsup C_n$. \blacksquare

Ejercicio 1.3.8.- Dada una sucesión doble $x_{nm} \in (-\infty, \infty]$, tal que para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $x_{nm} \leq x_{n+1, m}$ y $x_{nm} \leq x_{n, m+1}$, demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{nm} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm}.$$

Ind. Demostrar que existen los límites $a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{nm}$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b_m = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm}$ y $b = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m$, que $x_{nm} \leq a_n \leq a$ y por tanto $b \leq a$, la otra desigualdad por simetría. \blacksquare

Ejercicio 1.3.10.- Dado un espacio no numerable Ω y

$$\mathcal{A} = \{E \subset \Omega : E \text{ ó } E^c \text{ es numerable}\},$$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E \text{ es numerable,} \\ 1, & \text{si } E^c \text{ es numerable,} \end{cases} \quad \text{para cada } E \in \mathcal{A},$$

demostrar que \mathcal{A} es σ -álgebra y μ medida.

Ind. Si $A_n \in \mathcal{A}$ y para todo n A_n es numerable, entonces $\cup A_n \in \mathcal{A}$ por ser numerable y si existe un i tal que A_i^c es numerable, entonces $(\cup A_n)^c = \cap A_n^c \subset A_i^c$ es numerable. Y si los A_n son disjuntos y todos numerables, $\mu(\cup A_n) = 0 = \sum \mu(A_n)$, y si un A_i no lo es, entonces para todo $j \neq i$, $A_j \subset A_i^c$ es numerable y $\mu(\cup A_n) = 1 = \mu(A_i) = \sum \mu(A_n)$. ■

Ejercicio 1.3.11.- Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, tal que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subset E$ y $0 < \mu(F) < \infty$ (estas medidas suelen llamarse semifinitas), demostrar que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ y todo $r > 0$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subset E$ y $r < \mu(F) < \infty$.

Solución.- Basta demostrar que

$$\sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset E \text{ y } \mu(B) < \infty\} = \infty.$$

En caso contrario, el supremo valdría $c < \infty$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, podríamos encontrar $F_n \subset E$ tal que $\mu(F_n) > c - (1/n)$ y considerando $B_n = \cup_{i=1}^n F_i$ y su unión expansiva $B_n \uparrow B$, tendríamos que $\mu(B_n) \leq c$, pues $B_n \subset E$ y $\mu(B_n) \leq \sum_{i=1}^n \mu(F_i) < \infty$, por tanto tomando límites $\mu(B) \leq c$, pero como

$$\mu(B_n) \geq \mu(F_n) \geq c - \frac{1}{n},$$

tomando límites $\mu(B) \geq c$, por tanto $\mu(B) = c$ y como $B \subset E$ llegamos a contradicción pues $\mu(E \setminus B) = \infty$ ya que $\mu(E) = \mu(B) + \mu(E \setminus B)$, y por definición existe un medible $A \subset E \setminus B$ con $0 < \mu(A) < \infty$, por lo que $B \cup A \subset E$ tiene medida finita mayor que c . ■

Ejercicio 1.3.13.- Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, definimos $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, de la siguiente manera

$$\lambda(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A \text{ y } \mu(B) < \infty\},$$

demostrar que:

- (a) λ es una medida semifinita.
 (b) Que si μ es semifinita entonces $\lambda = \mu$.

Solución.- (a) Es aditiva, pues para $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos y cualquier $C \subset A \cup B$, con $C \in \mathcal{A}$ y $\mu(C) < \infty$, tenemos $A \cap C \subset A$, $B \cap C \subset B$, con $A \cap C, B \cap C \in \mathcal{A}$ y $\mu(A \cap C) < \infty$, $\mu(B \cap C) < \infty$, por tanto como son disjuntos

$$\mu(C) = \mu(A \cap C) + \mu(B \cap C) \leq \lambda(A) + \lambda(B),$$

y como esto es válido para cualquier C , $\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$. Veamos la otra desigualdad; para cualesquiera $A' \subset A$, $B' \subset B$, de \mathcal{A} con medidas finitas por μ , tendremos que son disjuntos y

$$\mu(A') + \mu(B') = \mu(A' \cup B') \leq \lambda(A \cup B),$$

y se sigue la otra desigualdad. Ahora basta demostrar que si $A_n \uparrow A$, entonces $\lambda(A_n) \rightarrow \lambda(A)$. Ahora bien como λ es no negativa y aditiva es monótona, por tanto $\lambda(A_n) \leq \lambda(A_{n+1}) \leq \lambda(A)$, para todo n y si consideramos un $B \subset A$ medible con $\mu(B) < \infty$ y la sucesión $B_n = B \cap A_n \uparrow B$, tendremos $\mu(B_n) \rightarrow \mu(B)$, $\mu(B_n) \leq \mu(B) < \infty$ y $B_n \subset A_n$, por tanto $\mu(B_n) \leq \lambda(A_n)$, de donde

$$\mu(B) = \lim \mu(B_n) \leq \lim \lambda(A_n) \leq \lambda(A),$$

y tomando sup en $\mu(B)$ se dan igualdades y por tanto λ es medida. Además si $\mu(A) < \infty$, $\lambda(A) = \mu(A)$ y si $\lambda(A) = \infty$, existe $B_n \subset A$ medibles con $\mu(B_n) < \infty$ y $\mu(B_n) \rightarrow \infty$, por tanto existe $B_n \subset A$, con $0 < \lambda(B_n) = \mu(B_n) < \infty$, lo que prueba que es semifinita.

(b) Es consecuencia del ejercicio 1.3.11. ■

Ejercicio 1.4.1.- Demostrar que la medida exterior de Lebesgue en \mathbb{R} , se puede definir en vez de con la clase $\mathcal{C} = \{(a, b]\}$, con cualquiera de las clases $\mathcal{C}_1 = \{(a, b)\}$, $\mathcal{C}_2 = \{[a, b]\}$, $\mathcal{C}_3 = \{[a, b)\}$.

Ind.- Para \mathcal{C} y \mathcal{C}_1 , denotemos

$$\mathcal{D}_A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : a_n < b_n \in \mathbb{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \right\},$$

$$\mathcal{D}_{1A} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (d_n - c_n) : c_n < d_n \in \mathbb{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, d_n) \right\},$$

entonces por un lado $\mathcal{D}_{1A} \subset \mathcal{D}_A$, pues $(c, d) \subset (c, d]$ y por otro para cada $x \in \mathcal{D}_A$ y $\epsilon > 0$, $x + \epsilon \in \mathcal{D}_{1A}$, pues para $x = \sum (b_n - a_n)$, con $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$, tendremos $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n + \epsilon/2^n)$ y la suma correspondiente a estos intervalos es $x + \epsilon$. ■

Ejercicio 1.4.2.- Sea μ^* una medida exterior en Ω y λ la medida restricción de μ^* a la σ -álgebra \mathcal{A}_* . Demostrar que:

(a) $\mu^* \leq \lambda^*$.

(b) Si μ^* es la medida exterior generada por una medida μ en un álgebra \mathcal{A} , entonces $\mu^* = \lambda^*$.

(c) Encontrar una medida exterior μ^* en $\Omega = \{0, 1\}$, para la que $\mu^* \neq \lambda^*$.

Ind. (a) Para $A \subset \Omega$, $\lambda^*(A) = \inf\{\sum \mu^*(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_*, A \subset \cup A_i\}$, y dado uno de estos números $\sum \mu^*(A_i)$,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(\cup A_i) \leq \sum \mu^*(A_i),$$

por tanto $\mu^*(A) \leq \lambda^*(A)$.

(b) Para $A \subset \Omega$, $\mu^*(A) = \inf\{\sum \mu(A_i) : A_i \in \mathcal{A}, A \subset \cup A_i\}$, y dado uno de estos números $\sum \mu(A_i)$, como los $A_i \in \mathcal{A}_*$

$$\lambda^*(A) \leq \sum \mu^*(A_i) = \sum \mu(A_i),$$

por tanto $\lambda^*(A) \leq \mu^*(A)$.

(c) $\mu^*\{0\} = \mu^*\{1\} = 2$, $\mu^*\{0, 1\} = 3$, por tanto $\mathcal{A}_* = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\lambda^*\{0\} = 3$. ■

Ejercicio 1.5.1.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea \mathcal{A}_μ su completación y μ^* la medida exterior generada por μ . Demostrar que para cada $A \subset \Omega$:

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, A \subset B\},$$

y que si definimos la “medida interior”

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\},$$

entonces si $A \in \mathcal{A}_\mu$ se tiene que $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$ y recíprocamente si $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$ entonces $A \in \mathcal{A}_\mu$.

Ind. Si $A \in \mathcal{A}_\mu$, existen $B, D \in \mathcal{A}$, con $B \subset A \subset D$ y $\mu(D \setminus B) = 0$, por tanto $\mu(D) = \mu(A) = \mu(B) \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) \leq \mu(D)$ y se tiene la igualdad. Ahora dado $A \subset \Omega$ se demuestra que existen $B, D \in \mathcal{A}$, con $B \subset A \subset D$, $\mu(B) = \mu_*(A)$ y $\mu^*(A) = \mu(D)$ y si $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$ entonces $A \in \mathcal{A}_\mu$. ■

Ejercicio 1.6.1.- Sean $\mu_i: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$, para $i = 1, \dots, n$ medidas de Lebesgue–Stieltjes. Demostrar que existe una única medida $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, tal que para cada semi-rectángulo acotado $(a, b]$,

$$\mu(a, b] = \mu_1(a_1, b_1] \cdots \mu_n(a_n, b_n].$$

Ind. Considérense funciones de distribución F_i que generen μ_i , la función de distribución $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ y la medida que genera. ■

Ejercicio 1.6.2.- Demostrar que toda medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ de Lebesgue–Stieltjes es σ -finita. Encontrar una que sea σ -finita pero no de Lebesgue–Stieltjes. Encontrar una que sea σ -finita pero no regular.

Ind. En \mathbb{R} , $\mu(A)$ el número de racionales de A . ■

Ejercicio 1.6.3.- Demostrar que toda medida semifinita $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ es regular interior.

Ind. Se ha demostrado que toda medida es regular interior en los borelianos de medida finita, sea B un boreliano con $\mu(B) = \infty$, entonces por ser semifinita hemos demostrado que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un boreliano $B_n \subset B$, tal que $n < \mu(B_n) < \infty$, pero entonces existe un compacto $K_n \subset B_n$, tal que $n < \mu(K_n)$ y $K_n \subset B$. ■

Ejercicio 1.6.4.- Demostrar que si $t \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(tB) = |t|^n m(B)$. Además si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Ind. Para $t > 0$, $m(tB) = |t|^n m(B)$, pues $m^*(tB) = t^n m^*(B)$ y para $t < 0$, $m^*(tB) = m^*[|t|(-B)] = |t|^n m^*(-B)$ y basta demostrar que $m^*(-B) = m^*(B)$. Observemos que para $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$, se tiene, entendiendo $a - 1/n$ el vector de coordenadas $a_i - 1/n$

$$m[a, b] = \lim m(a - 1/n, b] = \lim \prod (b_i - a_i + 1/n) = \prod (b_i - a_i) = m(a, b],$$

$$\begin{aligned} m^*(A) &= \inf\left\{\sum m(a_i, b_i] : A \subset \cup(a_i, b_i]\right\} \\ &= \inf\left\{\sum m[a_i, b_i] : A \subset \cup[a_i, b_i]\right\} \\ &= \inf\left\{\sum m[-b_i, -a_i] : -A \subset \cup[-b_i, -a_i]\right\} = m^*(-A), \end{aligned}$$

y se demuestra fácilmente que si $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. ■

Ejercicio 1.7.1.- Demostrar que para $p = 0$, H_p es la medida de contar.

Ind. Para $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ y $\delta < \min\{d(x_i, x_j)\}$, $H_{0\delta}(A) = n$. ■

Ejercicio 1.7.2.- Sea $\Omega' \subset \Omega$ y consideremos el espacio métrico (Ω', d) , con la métrica inducida. Demostrar que la medida exterior de Hausdorff en Ω' , $H'_p = H_{p|\mathcal{P}(\Omega')}$.

Ind. Para $A \subset \Omega'$,

$$\begin{aligned} H'_{p,\delta}(A) &= \inf\left\{\sum d(A_n)^p : A \subset \cup A_n \subset \Omega', d(A_n) \leq \delta\right\} \\ &= \inf\left\{\sum d(B_n)^p : A \subset \cup B_n \subset \Omega, d(B_n) \leq \delta\right\} = H_{p,\delta}(A). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 1.7.4.- Demostrar que $\dim_H(\{x\}) = 0$, para cada $x \in \Omega$

Ind. $H_0(\{x\}) = 1$. ■

Ejercicio 1.7.5.- Demostrar que $\dim_H(\cup A_n) = \sup \dim_H(A_n)$.

Ind. Si $A = \cup A_i$, $H_p(A_i) \leq H_p(A) \leq \sum H_p(A_n)$, por tanto si $p < \sup \dim_H(A_n)$, existe un i tal que $p < \dim_H(A_i)$, por tanto $H_p(A_i) = \infty = H_p(A)$ y $p \leq \dim_H(A)$ y si $\sup \dim_H(A_n) < p$, $H_p(A_n) = 0$ para todo n y $H_p(A) = 0$, por tanto $\dim_H(A) \leq p$. ■

Ejercicio 1.7.6.- En los subespacios de \mathbb{R}^n con la métrica euclídea, demostrar que la dimensión vectorial y la de Hausdorff coinciden.

Ind. Es consecuencia de los resultados anteriores y de que para un cubo Q , n -dimensional, se tiene que $0 < H_n(Q) < \infty$, por tanto $\dim_H(Q) = n$. ■

Ejercicios resueltos Tema II

Ejercicio 2.2.4.- Sean h y g funciones medibles. Demostrar que los conjuntos

$$\{x \in \Omega : h(x) < g(x)\}, \quad \{x \in \Omega : h(x) \leq g(x)\}, \quad \{x \in \Omega : h(x) = g(x)\},$$

son medibles.

Ind. El primer conjunto es medible porque

$$\{x \in \Omega : h(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{h(x) < r\} \cap \{r < g(x)\}),$$

el segundo porque su complementario lo es y el tercero es la diferencia. ■

Ejercicio 2.2.11.- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada en todo punto, demostrar que f' es Borel medible.

Solución.- Si f es derivable es continua y por tanto medible, como también lo es $f_n(x) = n[f(x + 1/n) - f(x)]$ y como $f_n \rightarrow f'$, f' es medible. ■

Ejercicio 2.2.12.- Demostrar que $f = (f_1, \dots, f_n): (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ es medible si y sólo si cada f_i lo es.

Solución.- Si f es medible, $f_i = x_i \circ f$ es medible por que las proyecciones $x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y por tanto medibles. Recíprocamente sea $(a, b]$ un semi-rectángulo, con $a < b \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$f^{-1}(a, b] = \{x \in \Omega : a < f(x) \leq b\} = \bigcap_{i=1}^n \{x \in \Omega : a_i < f_i(x) \leq b_i\} \in \mathcal{A},$$

y como estos semi-rectángulo generan $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, f es medible. ■

Ejercicio 2.4.1.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_{A_n}$, con $a_n \in (0, \infty)$ y $A_n \in \mathcal{A}$, calcular $\int f d\mu$.

Ind. $\int \sum f_n = \sum \int f_n$. ■

Ejercicio 2.4.2.- Sea $f \geq 0$ integrable. Demostrar que $\forall \epsilon > 0$ existe un medible A , con $\mu(A) < \infty$ tal que $\int f < \int_A f + \epsilon$.

Ind. $A_n = \{1/n \leq f\} \uparrow A = \{0 < f\}$, $\mu(A_n) < \infty$ y $\int_{A_n} f \uparrow \int_A f = \int f$. ■

Ejercicio 2.4.6.- Sean $f, f_n \geq 0$ integrables, tales que $f_n \rightarrow f$ c.s. Demostrar que $\int f_n \rightarrow \int f$ sii $\int |f_n - f| \rightarrow 0$.

Ind. Por el TCD, pues $-f \leq f_n - |f - f_n| \leq f$, por tanto $\int f_n - \int |f_n - f| \rightarrow \int f$. ■

Ejercicio 2.4.8.- Sean f, f_n integrables, tales que $f_n \rightarrow f$ c.s. Demostrar que $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ sii $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$.

Ind. Por el TCD pues $-|f| \leq |f_n| - |f_n - f| \leq |f|$, por tanto $\int |f_n| - \int |f_n - f| \rightarrow \int |f|$. ■

Ejercicio 2.4.14.- Calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} dm.$$

Ind. Por el TCD, pues: 1 es integrable; $0 \leq f_n \leq 1$, ya que

$$(1 + x^2)^n = 1 + nx^2 + (1/2)n(n-1)x^4 + \dots \geq 1 + nx^2,$$

y $f_n \downarrow 0$, pues

$$\frac{(1 + x^2)^n}{1 + nx^2} \geq \frac{1 + nx^2 + (1/2)n(n-1)x^4}{1 + nx^2} \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.4.16.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $e^{tx} f(x)$ es integrable para todo $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Demostrar que $F(t) = \int e^{tx} f(x) dm$ es diferenciable y que $F'(t) = \int x e^{tx} f(x) dm$.

Ind. Para cada $s \in (a, b)$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $[s - \epsilon, s + \epsilon] \subset (a, b)$. Basta demostrar que F es diferenciable en $I = (s - \delta, s + \delta)$, para $\delta = \epsilon/2$. Existe $r > 0$, tal que para $x > r$, $x \leq e^{\delta x}$, por lo que el módulo de la derivada del integrando, $|x e^{tx} f(x)|$, está acotado para $t \in I$ por la función integrable

$$h(x) = \begin{cases} e^{(s-\epsilon)x} |f(x)|, & \text{si } x < -r, \\ r e^{(s-\epsilon)x} |f(x)|, & \text{si } -r \leq x \leq 0, \\ r e^{(s+\epsilon)x} |f(x)|, & \text{si } 0 \leq x \leq r, \\ e^{(s+\epsilon)x} |f(x)|, & \text{si } x > r, \end{cases}$$

y el resultado se sigue del teorema de derivación bajo el signo integral. ■

Nota. Para los siguiente ejercicios puede ser útil recordar que:

$$\lim_{|a_n| \rightarrow \infty} (1 + 1/a_n)^{a_n} = e,$$

Ejercicio 2.4.17.- Demostrar que para $t > 0$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, la sucesión $(1 + (t/n)^\alpha)^n$ es creciente y para $1 \leq \alpha$, $(1 - (t/n)^\alpha)^n$ también es creciente.

Ind.

$$\begin{aligned} \left(1 - \left(\frac{t}{n}\right)^\alpha\right)^n &\leq \left(1 - \left(\frac{t}{n+1}\right)^\alpha\right)^{n+1} \Leftrightarrow \\ \frac{(n^\alpha - t^\alpha)^n}{((n+1)^\alpha - t^\alpha)^{n+1}} &\leq \frac{n^\alpha}{(n+1)^{\alpha(n+1)}}, \end{aligned}$$

lo cual induce a considerar la función

$$f(x) = \frac{(n^\alpha - x)^\alpha}{((n+1)^\alpha - x)^{\alpha(n+1)}},$$

y demostrar que $f' \leq 0$, en cuyo caso $f(x) \leq f(0)$, para todo $x \geq 0$. El otro es similar. ■

Ejercicio 2.4.18.- Demostrar que

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log t \, dm &= \int_1^\infty e^{-t} \log t \, dm. \\ \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log t \, dm &= \int_0^1 e^{-t} \log t \, dm. \end{aligned}$$

Ind. (a) Se puede hacer utilizando el ejercicio (2.4.17) y el TCM pues $0 \leq I_{(1,n)}(1 - (t/n))^n \log t$ y $(1 - (t/n))^n$ es creciente para $0 \leq t \leq n$.

También se puede hacer utilizando el TCD, probando que

$$|I_{(1,n)}(1 - (t/n))^n \log t| = I_{(1,n)}(1 - (t/n))^n \log t \leq e^{-t} t,$$

y demostrando que $e^{-t} t$ es integrable.

(b) se sigue del desarrollo de (a), utilizando el TCM y teniendo en cuenta que como en $(0, 1)$ el $\log t$ es negativo, la sucesión $(1 - (t/n))^n \log t \leq 0$ y es decreciente. ■

Ejercicio 2.4.19.- Sea f no negativa e integrable, con $0 < \int f d\mu = c < \infty$ y sea $0 < \alpha < \infty$. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int n \log \left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right] d\mu = \begin{cases} \infty, & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ c, & \text{si } \alpha = 1, \\ 0, & \text{si } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

Ind. La sucesión $0 \leq f_n = n \log[1 + (f/n)^\alpha]$, es creciente para $\alpha \leq 1$, por el ejercicio (2.4.17) y

$$\left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right]^n = \left[1 + \frac{1}{(n/f)^\alpha} \right]^{(n/f)^\alpha n (f/n)^\alpha}, \quad n^{1-\alpha} \begin{cases} \downarrow 0, & \text{si } \alpha > 1. \\ = 1, & \text{si } \alpha = 1. \\ \uparrow \infty, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

y $f_n \uparrow f$ para $\alpha = 1$ y $f_n \uparrow \infty$ para $\alpha < 1$, en cuyo caso el resultado se sigue del TCM. Para $\alpha \geq 1$, $f_n \leq \alpha f$, pues para $x \geq 0$ y $\alpha \geq 1$, $1 + x^\alpha \leq (1+x)^\alpha$ (ya que si $h(x) = (1+x)^\alpha - x^\alpha - 1$, $h(0) = 0$ y $h'(x) > 0$), y

$$e^{f_n} = \left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right]^n \leq \left(1 + \frac{f}{n} \right)^{n\alpha} \uparrow e^{\alpha f},$$

y se aplica el TCD. ■

Ejercicio 2.4.20.- Demostrar que si f es μ -integrable, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que

$$\mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |f| d\mu < \epsilon.$$

Ind. Sea $\lambda(A) = \int_A |f| d\mu$, que es una medida finita y $B_n = \{|f| > n\}$, entonces $B_n \downarrow B = \{|f| = \infty\}$, por tanto $\lambda(B_n) \rightarrow \lambda(B) = \int_B |f| d\mu = 0$, por tanto existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq N$, $\lambda(B_n) \leq \epsilon/2$. Ahora bien

$$\int_E |f| d\mu = \int_{E \cap B_n} |f| d\mu + \int_{E \cap B_n^c} |f| d\mu \leq \frac{\epsilon}{2} + n\mu(E),$$

y basta tomar $\delta \leq \epsilon/2n$. ■

Ejercicio 2.4.21.- Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable $F(x) = \int_{-\infty}^x f dm$ es uniformemente continua.

Ind. Aplicar el ejercicio anterior. ■

Ejercicio 2.5.1.- (a) Demostrar que si f tiene integral impropia de Riemann, entonces es continua c.s. (m), pero no recíprocamente.

(b) Si $f \geq 0$ y es acotada en cada compacto, entonces se tiene la equivalencia.

Ind. (a) Se sigue del teorema de caracterización, pues es Riemann integrable en cada intervalo acotado y por tanto en él es continua c.s. El recíproco no es cierto para $f(x) = x$, ni siquiera para f acotada, $f = I_{[0,\infty)} - I_{(-\infty,0)}$.

(b) Por el *Teorema de caracterización* f es Riemann integrable en cada intervalo $[a_n, b_n]$, para cualesquiera $a_n \rightarrow -\infty$ y $b_n \rightarrow \infty$ y f es Lebesgue medible en $[a_n, b_n]$. además $f_n = fI_{[a_n, b_n]} \uparrow f$ y f es Lebesgue medible y $\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \int f_n \uparrow \int f$, por el *Teorema de la convergencia monótona*. ■

Ejercicio 2.5.2.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, con integral impropia de Riemann finita, demostrar que f es Lebesgue medible e integrable y las dos integrales coinciden. Dar un contraejemplo si quitamos la no negatividad.

Ind. Consideremos la sucesión $f_n = fI_{[-n,n]}$, para la que $f_n \uparrow f$, entonces es Lebesgue medible por serlo las f_n y por el *Teorema de caracterización* y el *Teorema de la convergencia monótona*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dm = \int f dm,$$

Si quitamos la no negatividad es falso pues por ejemplo para

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} I_{[n-1,n]},$$

existe

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

y es finita y sin embargo no es Lebesgue integrable, pues no lo es $|f|$, ya que $\int |f|dm = \sum (1/n) = \infty$. ■

Ejercicio 2.5.3.- Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable

$$\int_{[-\infty, \infty]} f dm = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f dm.$$

¿Es cierto si existe la integral pero no es finita?

Solución.- $\lambda(A) = \int_A f dm$ es una carga y si $A_n \uparrow A$, $\lambda(A_n) \rightarrow \lambda(A)$. ■

Ejercicio 2.5.5.- Calcular:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) dm.$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} n \sin(x/n) [x(1+x^2)]^{-1} dm.$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} n(1+n^2x^2)^{-1} dm$, en función de a .

Ind. (a)=0 por TCD, pues la sucesión $(1 + (x/n))^n$ es creciente —y converge a e^x —, por tanto, $|(1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)| \leq (1 + (x/2))^{-2}$, y esta última es integrable. (b)= $\pi/2$ pues $|\sin t/t| \leq 1$ y $\int_0^x dx/(1+x^2) = \arctan(x)$ y para (c) se hace el cambio $t = nx$. ■

Ejercicio 2.5.6.- Dadas las funciones

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt,$$

demostrar que:

$$(1) f(x) + g(x) = \pi/4.$$

$$(2) \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2.$$

$$\text{Ind. } (1) f'(x) + g'(x) = 0. \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.5.7.- Demostrar:

$$(1) \int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = (2n)! \sqrt{\pi}/4^n n!.$$

$$(2) \text{ Para } a \geq 0, \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos ax dx = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}.$$

$$(3) \text{ Para } p > 0, \int_0^1 x^{p-1} (x-1)^{-1} \log x dx = \sum_{n=0}^\infty 1/(p+n)^2.$$

Ind. (1) Por inducción derivando $x^{2n+1} e^{-x^2}$ y utilizando el ejercicio anterior.

$$(2) \cos x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n}/(2n)!.$$

$$(3) 1/(1-x) = \sum_{n=0}^\infty x^n,$$

$$(x^{n+p} \log x^{-1})' = (n+p)x^{n+p-1} \log x^{-1} - x^{n+p-1},$$

$$\text{por tanto } \int_0^1 x^{n+p-1} \log x^{-1} dx = 1/(p+n)^2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.5.8.- Demostrar que es de clase infinito la función en $(0, \infty)$

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} dx,$$

y que verifica: $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$ para $y > 0$; que $\Gamma(n+1) = n!$, para $n = 0, 1, 2, \dots$ y que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Ind. Basta ver que lo es en cada intervalo (a, b) con $0 < a$, para lo cual tenemos que probar que tanto la función $f(x, y) = e^{-x} x^{y-1}$, como sus derivadas parciales $\partial^k f / \partial y^k = e^{-x} x^{y-1} (\log x)^k$ están acotadas por una función integrable para todo $y \in (a, b)$.

Observemos que para $0 < x < 1$, $x^r = e^{r \log x}$ es decreciente en r y para $1 < x$ creciente, por tanto para $y \in (a, b)$ y $0 < x < 1$, $x^{y-1} < x^{a-1}$, mientras que para $1 < x$, $x^{y-1} < x^{b-1}$, por tanto tenemos

$$f(x, y) = e^{-x} x^{y-1} \leq g_0(x) = \begin{cases} x^{a-1}, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ M e^{-x/2}, & \text{si } 1 \leq x, \end{cases}$$

(pues $\sup\{e^{-x/2} x^{b-1} : x \geq 1\} = M < \infty$ ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x/2} x^{b-1} = 0$) y

$$e^{-x} x^{y-1} |\log x|^n \leq g_n(x) = \begin{cases} x^{a-1} (-\log x)^n, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ N e^{-x/2}, & \text{si } 1 < x, \end{cases}$$

pues $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x/2} x^{b-1} \log^n x = 0$, ya que $\log x < x$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x/2} x^k = 0$, para todo k .

Veamos ahora que las g_n son integrables: en cualquier caso $(e^{-x/2})' = -e^{-x/2}/2 \Leftrightarrow \int_1^\infty e^{-x/2} = 2e^{-1/2}$ y por inducción veamos que $x^{a-1} (-\log x)^k$ es integrable en $(0, 1)$. Para $k = 1$, $(x^a)' = ax^{a-1} \Leftrightarrow \int_0^1 x^{a-1} = 1/a$. Para $k = n+1$ se tiene

$$(x^a (-\log x)^{n+1})' = ax^{a-1} (-\log x)^{n+1} + x^a (n+1) (-\log x)^n (-x^{-1})$$

y el resultado se sigue pues por inducción $\lim_{x \rightarrow 0} x^a (-\log x)^{n+1} = 0$.

Por último derivando $e^{-x} x^y$, respecto de x , se demuestra que $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$, ahora bien por el ejercicio (2.5.4), $\Gamma(1) = 1$ y haciendo el cambio $x = t^2$, se sigue del ejercicio (2.5.6) que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. ■

Ejercicios resueltos Tema III

Ejercicio 3.2.1.- Sean Ω_1 y Ω_2 espacios topológicos. Demostrar que:

(a) $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) \subset \mathcal{B}(\Omega_1 \otimes \Omega_2)$.

(b) Si sus topologías tienen bases numerables, $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) = \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Solución.- (a) Como las proyecciones $\pi_i: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_i$ son continuas son $\mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ -medibles, por tanto dados $A \in \mathcal{B}(\Omega_1)$ y $B \in \mathcal{B}(\Omega_2)$,

$$A \times B = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

y se sigue la inclusión de (a).

(b) Si \mathcal{C}_i es una base numerable de la topología \mathcal{T}_i de Ω_i ,

$$\mathcal{C} = \{U \times V : U \in \mathcal{C}_1, V \in \mathcal{C}_2\} \subset \mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2),$$

es una base numerable de la topología producto \mathcal{T} , por tanto

$$\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2),$$

y se sigue el resultado. ■

Ejercicio 3.2.4.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f_x es Borel medible para cada x y f^y continua para cada y . Demostrar que f es Borel medible.

Ind.- Basta observar que la sucesión de funciones medibles

$$f_n(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i/n, y) I_{\{(i-1)/n < x \leq i/n\} \times \mathbb{R}},$$

verifica $f_n \rightarrow f$, pues $f_n(x, y) = f(x_n, y)$, para un $x_n = i/n$ tal que $|x_n - x| \leq 1/n$.

Ejercicio 3.6.1.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Demostrar que la gráfica de f es medible

$$E = \{(x, y) \in \Omega \times [0, \infty] : y = f(x)\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}),$$

y que $\mu \times m(E) = 0$.

Ind. Consideremos las funciones medibles $\pi_2(x, y) = y$ y $h(x, y) = f(x)$, entonces $E = \{h = \pi_2\}$ y como $m(E_x) = 0$, $\mu \times m(E) = 0$. ■

Ejercicio 3.6.2.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Demostrar que la función $F(y) = \mu\{f^{-1}(y)\}$ es medible y $F = 0$ c.s.

Ind. En los términos del ejercicio anterior $F(y) = \mu(E^y)$ y $0 = \mu \times m(E) = \int F(y) dm$. ■

Ejercicio 3.6.4.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita, $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ medible y $1 \leq p < \infty$. Demostrar que

$$\int f^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1} \mu\{f > t\} dt.$$

Ind. Haciendo el cambio de variable $s = t^p$,

$$\int f^p d\mu = \int_0^\infty \mu\{f^p > s\} ds = \int_0^\infty pt^{p-1} \mu\{f > t\} dt. \quad \blacksquare$$

Ejercicios resueltos Tema IV

Ejercicio 4.2.4.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio medible con una carga. Demostrar:

- (a) g es λ -integrable si y sólo si es $|\lambda|$ -integrable.
- (b) Si g es λ -integrable, $|\int g d\lambda| \leq \int |g| d|\lambda|$.
- (c) Existe una medida μ y una función medible f , con integral respecto de μ , tal que para todo $E \in \mathcal{A}$, $\lambda(E) = \int_E f d\mu$.

Ind. (c) Considerar una descomposición de Hahn, $P, N, f = I_P - I_N$ y $\mu = |\lambda|$. ■

Ejercicio 4.2.9.- Sea λ una carga en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que

$$|\lambda|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| : E_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup E_i = A\right\},$$

¿Es cierto el resultado si ponemos $\sum_{i=1}^\infty$ en lugar de sumas finitas?

Ind. Sean $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ medibles y disjuntos, tales que $\cup E_i = A$ entonces

$$\sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda|(E_i) = |\lambda|(A),$$

por tanto $|\lambda|(A)$ es una cota superior para el supremo. Veamos que se alcanza, para ello sea P, N una descomposición de Hahn

$$|\lambda|(A) = \lambda^+(A) + \lambda^-(A) = |\lambda(A \cap P)| + |\lambda(A \cap N)|,$$

y el resultado se sigue pues $A \cap P, A \cap N$ es una partición de A . ■

Ejercicio 4.3.1.- Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible con una medida compleja $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = \lambda_1^+ - \lambda_1^- + i\lambda_2^+ - i\lambda_2^-$, demostrar que $\lambda_i^\pm \leq |\lambda| \leq \lambda_1^+ + \lambda_1^- + \lambda_2^+ + \lambda_2^-$.

Ind. $\lambda_i^\pm \leq \lambda_i^+ + \lambda_i^- = |\lambda_i| \leq |\lambda| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| = \lambda_1^+ + \lambda_1^- + \lambda_2^+ + \lambda_2^-$. ■

Ejercicio 4.4.1.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible no negativa. Si definimos la medida $\lambda(A) = \int_A f d\mu$, demostrar que para cada función medible g

$$\int g d\lambda = \int fg d\mu,$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

Ind. Demuéstrese para indicadores, funciones simples, funciones no negativas y en general. ■

Ejercicio 4.4.3.- Sean μ y ν medidas σ -finitas, con $\nu \ll \mu$ y sea $\lambda = \mu + \nu$. Demostrar que $\nu \ll \lambda$ y si $f = d\nu/d\lambda$, entonces $0 \leq f < 1$ c.s. (μ) y que $d\nu/d\mu = f/(1-f)$.

Ind. Existe $g = d\nu/d\mu$, con $0 \leq g < \infty$, entonces $g+1 = d\lambda/d\mu$ y $f(g+1) = d\nu/d\mu$, por tanto $g = f(g+1)$ c.s. (μ) y $0 \leq f = g/(g+1) < 1$ c.s. (μ) y $g = f/(1-f)$ c.s. (μ) .

Ejercicio 4.4.4.- Sean λ y μ medidas σ -finitas en (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que son equivalentes las condiciones:

- (a) $\mu \ll \lambda$ y $\lambda \ll \mu$.
- (b) $\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\} = \{A \in \mathcal{A} : \lambda(A) = 0\}$.
- (c) Existe una función medible $g: \Omega \rightarrow (0, \infty)$, tal que $\lambda(A) = \int_A g d\mu$.

Ind. (a) \Leftrightarrow (b) es trivial.

(a) \Rightarrow (c) Por el Teorema de Radon-Nikodym $0 \leq d\lambda/d\mu < \infty$ y por el ejercicio anterior

$$1 = \frac{d\mu}{d\mu} = \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu},$$

por tanto $d\lambda/d\mu$ es invertible c.s. y por tanto positiva c.s.

(c) \Rightarrow (a) Como existe g^{-1} y es no negativa tiene integral y si consideramos $\nu(A) = \int_A g^{-1} d\lambda$, tendremos que

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} = g^{-1}g = 1 \Rightarrow \nu = \mu. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 4.4.5.- Demostrar que si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ -finita, existe una medida finita λ , que tiene los mismos conjuntos nulos que μ .

Ind. Sea A_n una partición de Ω , con $0 < \mu(A_n) < \infty$ (observemos que los de medida nula los podemos unir a cualquier otro A_n de medida positiva) y sea

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} I_{A_n},$$

entonces el resultado se sigue del ejercicio anterior para $\lambda(A) = \int_A g d\mu$. ■

Ejercicio 4.4.6.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ integrable. Demostrar que si S es un cerrado de \mathbb{C} , tal que para cada $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) > 0$, se tiene

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$$

entonces $f(x) \in S$ c.s.

Ind. Hay que demostrar que $\mu[f^{-1}(S^c)] = 0$, ahora bien como S^c es abierto es una unión numerable de discos cerrados y basta demostrar que para cualquiera de ellos $D[z, r]$, $\mu[f^{-1}(D[z, r])] = 0$. Supongamos que no, que $E = f^{-1}(D[z, r])$, tiene $\mu(E) > 0$, entonces llegamos a un absurdo, pues

$$r < \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu - z \right| = \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E (f - z) d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - z| d\mu \leq r. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 4.4.7.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Demostrar que $\{\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \lambda \ll \mu\}$, es un subespacio vectorial cerrado del espacio de Banach $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$.

Ind. Veamos que su complementario es abierto. Sea $\mathcal{M}_\mu = \{\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \lambda \ll \mu\}$ y $\lambda \in \mathcal{M} - \mathcal{M}_\mu$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$, tal que $\mu(A) = 0$ y $\lambda(A) \neq 0$, entonces para $0 < r \leq |\lambda(A)|$ y $\|\nu - \lambda\| < r$, $\nu \in \mathcal{M} - \mathcal{M}_\mu$, pues

$$|\nu(A) - \lambda(A)| \leq \|\nu - \lambda\| < r,$$

y por tanto $\nu(A) \neq 0$. \blacksquare

Ejercicio 4.4.8.- Sean $\nu_1 \ll \mu_1$ en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $\nu_2 \ll \mu_2$ en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, medidas σ -finitas. Demostrar que $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ y que

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y).$$

Solución.- Sea $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) = \mu_1 \times \mu_2(E) = 0$, entonces como $\mu(E) = \int \mu_2(E_x) d\mu_1$, $\mu_2(E_x) = 0$ c.s. μ_1 , por tanto c.s. ν_1 y $\nu_2(E_x) = 0$ c.s. ν_1 , por tanto $\nu(E) = \nu_1 \times \nu_2(E) = \int \nu_2(E_x) d\nu_1 = 0$.

Ahora si $f = d\nu_1/d\mu_1$, $g = d\nu_2/d\mu_2$ y $h(x, y) = f(x)g(y)$, entonces como $h \geq 0$, tiene integral y

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \int \nu_2(E_x) d\nu_1 = \int \left(\int_{E_x} g d\mu_2 \right) d\nu_1 = \int \left(\int_{E_x} g d\mu_2 \right) f d\mu_1 \\ &= \int \left(\int I_{E_x} h_x d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_E h d\mu. \end{aligned}$$

Ejercicios resueltos Tema V

Ejercicio 5.5.1.- Calcular el área y el volumen de la elipse y elipsoide respectivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ind. Consideremos la aplicación lineal

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix},$$

que para $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, y $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $T(B) = E$, por tanto

$$m[E] = m[T(B)] = |\det T| m[B] = ab\pi. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 5.5.4.- (a) Demostrar que el área de la esfera de radio r es $4\pi r^2$.

(b) Demostrar que el área del casquete esférico de radio r y altura h es $2\pi rh$.

Ind. Basta demostrar (b). La proyección del casquete es el círculo de radio $k = \sqrt{2rh - h^2}$, pues $k^2 + (r - h)^2 = r^2$, y su área es para $z(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ y $U = \{x^2 + y^2 \leq k^2\}$

$$\int_U \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy = r \int_U \frac{dx \, dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

y por el teorema de cambio de variable para $F = (f_1, f_2): V = (0, k) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, como $F(V) = U = \{x^2 + y^2 \leq k^2\}$ y $J(DF_{(\rho, \theta)}) = |f_{1\rho}f_{2\theta} - f_{1\theta}f_{2\rho}| = \rho$,

$$r \int_{F(V)} \frac{dx \, dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = r \int_V \frac{\rho \, d\rho \, d\theta}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = -2\pi r \left[\sqrt{r^2 - \rho^2} \right]_0^k = 2\pi r h. \quad \blacksquare$$

Ejercicios resueltos Tema VI

Ejercicio 6.2.2.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible. Demostrar que $\mu_f(B) = \mu[f^{-1}(B)]$ es una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, y que si $f \in L_\infty$, entonces

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \mu_f[B(z, \epsilon)] > 0, \forall \epsilon > 0\},$$

es un compacto, donde $B(z, \epsilon) = \{z' : |z' - z| < \epsilon\}$ y que

$$\|f\|_\infty = \sup\{|z| : z \in K\}.$$

Solución.- Veamos que K^c es abierto. Sea $z \in K^c$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\mu_f[B(z, \epsilon)] = 0$, pero entonces $B(z, \epsilon) \subset K^c$, pues la bola es abierta y dado $z' \in B(z, \epsilon)$, existe un $\delta > 0$, tal que $B(z', \delta) \subset B(z, \epsilon)$, por tanto $\mu_f[B(z', \delta)] = 0$ y $z' \in K^c$. Ahora veamos que K es acotado, para ello veamos que si $z \in K$, $|z| \leq \|f\|_\infty$ ó equivalentemente que si $\|f\|_\infty < |z|$, entonces $z \notin K$, lo cual es obvio pues z está en el abierto $B[0, \|f\|_\infty]^c$ y por tanto existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$B(z, \epsilon) \subset B[0, \|f\|_\infty]^c \Rightarrow \mu_f(B(z, \epsilon)) \leq \mu_f(B[0, \|f\|_\infty]^c) = \mu(|f| > \|f\|_\infty) = 0,$$

(por ser el espacio σ -finito), por tanto $z \in K^c$.

Ahora veamos que el supremo es $\|f\|_\infty$. Para ello hemos visto la desigualdad " \leq ", veamos la otra, para lo cual basta demostrar que para todo $\epsilon > 0$ hay puntos de K en la rosquilla compacta

$$C = \{z : \|f\|_\infty - \epsilon \leq |z| \leq \|f\|_\infty\}.$$

En caso contrario para cada $z \in C$ existiría un $\epsilon_z > 0$, tal que $\mu_f(B(z, \epsilon_z)) = 0$ y por compacidad C se rellena con una colección finita de estas bolas y $\mu_f(C) = 0$, por tanto

$$\mu\{|f| \geq \|f\|_\infty - \epsilon\} = \mu_f\{|z| \geq \|f\|_\infty - \epsilon\} = 0$$

lo cual es absurdo. ■

Ejercicio 6.2.3.- Demostrar que si $0 < r < p < s \leq \infty$, entonces $L_r \cap L_s \subset L_p \subset L_r + L_s$.

Solución.- Sea $A = \{|f| \leq 1\}$, entonces si $f \in L_r \cap L_s$, y $s < \infty$

$$\begin{aligned} \int |f|^p d\mu &= \int_A |f|^p d\mu + \int_{A^c} |f|^p d\mu \\ &\leq \int_A |f|^s d\mu + \int_{A^c} |f|^r d\mu \leq \int |f|^s d\mu + \int |f|^r d\mu < \infty, \end{aligned}$$

y si $s = \infty$, $|f| \leq \|f\|_\infty$ c.s. (ver ejercicio (??)) y $\int_A |f|^p \leq \|f\|_\infty^p \mu(A^c) < \infty$, pues $\mu(A^c) < \infty$ por la desigualdad de Tchebycheff. Para la segunda inclusión, $f = I_A f + I_{A^c} f \in L_p$, $I_A f \in L_s$, $I_{A^c} f \in L_r$. ■

Ejercicio 6.2.4.- Demostrar que si $0 < r < s < \infty$ y $f \in L_r \cap L_s$, entonces $f \in L_p$, para todo $p \in [r, s]$; que la función

$$\phi(p) = \log \int |f|^p d\mu,$$

es convexa en $[r, s]$ y que $\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$.

Solución.- Sean $r \leq a < b \leq s$ y $t \in [0, 1]$, entonces basta demostrar que

$$e^{\phi[ta+(1-t)b]} \leq e^{t\phi(a)+(1-t)\phi(b)},$$

es decir que, para $c = ta + (1-t)b$,

$$\int |f|^c d\mu \leq \left(\int |f|^a d\mu \right)^t \left(\int |f|^b d\mu \right)^{1-t},$$

y esto es consecuencia de la *Desigualdad de Holder*, pues para $p = 1/t$ y $q = 1/(1-t)$, obviamente conjugados y las funciones $g^p = |f|^a$, $h^q = |f|^b$, tendremos que $g \in L_p$, $h \in L_q$, y

$$gh = |f|^{\frac{a}{p} + \frac{b}{q}} = |f|^{ta + (1-t)b} = |f|^c,$$

además tomando ahora $a = r$ y $b = s$ y un valor intermedio $c = tr + (1-t)s$, tendremos que

$$\begin{aligned} \|f\|_c &= \left(\int |f|^c d\mu \right)^{1/c} \leq \left(\int |f|^r d\mu \right)^{t/c} \left(\int |f|^s d\mu \right)^{(1-t)/c} \\ &= \|f\|_r^{tr/c} \|f\|_s^{(1-t)s/c} \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 6.2.5.- Demostrar que un espacio normado \mathcal{E} es completo sii para cada sucesión $x_n \in \mathcal{E}$

$$\sum \|x_n\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum x_n \quad \text{es convergente.}$$

Solución.- \Rightarrow) Sea $\sum \|x_n\| < \infty$, entonces $v_n = \sum_{i=1}^n x_i$ es de Cauchy y tiene límite por ser el espacio completo.

\Leftarrow) Sea v_n de Cauchy e y_n una subsucesión suya tal que $\|y_{n+1} - y_n\| \leq 2^{-n}$, entonces para $x_n = y_{n+1} - y_n$, $\sum \|x_n\|$ es convergente, por tanto también es convergente $\sum x_n = x$ y como $y_n = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i$, tiene límite así como v_n . \blacksquare

Ejercicio 6.2.7.- Demostrar que si $f, g \in \mathcal{L}_p$ para $0 < p < 1$, entonces

$$\|f + g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

Ind. Por la desigualdad $(a+b)^r < a^r + b^r$, para $0 < r < 1$ y $a, b > 0$ y por la concavidad de x^p

$$\frac{\int |f+g|^p d\mu}{2} \leq \frac{\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu}{2} \leq \left(\frac{(\int |f|^p)^{1/p} + (\int |g|^p)^{1/p}}{2} \right)^p. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 6.2.8.- Demostrar que si $f \in L_p$ para algún $0 < p < \infty$, entonces $\|f\|_r \rightarrow \|f\|_\infty$, cuando $r \rightarrow \infty$.

Solución.- Si $f \in L_p \cap L_\infty$, entonces

$$\{|f| > 0\} \text{ es } \sigma\text{-finito y } \{|f| > \|f\|_\infty\} \text{ es loc. nulo,}$$

por tanto su intersección $A = \{|f| > \|f\|_\infty\}$ es nulo y para $r \geq p$

$$\begin{aligned} \|f\|_r &= \left(\int |f|^p |f|^{r-p} d\mu \right)^{1/r} = \left(\int_{A^c} |f|^p |f|^{r-p} d\mu \right)^{1/r} \\ &\leq \|f\|_\infty^{(r-p)/r} \left(\int_{A^c} |f|^p d\mu \right)^{1/r} = \|f\|_\infty^{(r-p)/r} \|f\|_p^{p/r} < \infty, \end{aligned}$$

y haciendo $r \rightarrow \infty$ se sigue que $\limsup \|f\|_r \leq \|f\|_\infty$. Ahora para cada $\epsilon > 0$, $B = \{|f| > \|f\|_\infty - \epsilon\}$ no es localmente nulo, por tanto $\mu(B) > 0$ y

$$\mu(B)^{1/r} (\|f\|_\infty - \epsilon) \leq \left(\int_B |f|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \|f\|_r,$$

por lo que $\mu(B) < \infty$ y haciendo $r \rightarrow \infty$, tendremos que

$$\|f\|_\infty - \epsilon \leq \liminf \|f\|_r,$$

y el resultado se sigue. Si por el contrario $\|f\|_\infty = \infty$, entonces para todo n , $\mu\{|f| > n\} > 0$ y

$$\mu\{|f| > n\}^{1/r} n \leq \left(\int_{\{|f| > n\}} |f|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \|f\|_r,$$

y haciendo $r \rightarrow \infty$, tendremos que $n \leq \liminf \|f\|_r$ y el resultado se sigue. ■

Ejercicio 6.2.9.- Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y $0 < r < s < \infty$, entonces $L_s \subset L_r$ y que para $f \in L_s$

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s \mu(\Omega)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}.$$

Ind. Sea $f \in L_s$, entonces para p y q conjugados, con $1 < p = s/r$, $f^r \in L_p$ y como $1 \in L_q$, tendremos por la Desigualdad de Holder que $f^r \cdot 1 = f^r \in L_1$, es decir $f \in L_r$ y además

$$\int |f|^r \leq \|f^r\|_p \cdot \|1\|_q = \left(\int |f|^{rp} d\mu \right)^{1/p} \mu(\Omega)^{1/q},$$

el resto es simple. ■

Ejercicio 6.2.10.- Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y f_n, f son medibles, entonces:

(a) Si $f_n \rightarrow f$ c.s., entonces $f_n \rightarrow f$ en medida (es decir que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq N$, $\mu\{|f_n - f| > \epsilon\} < \epsilon$).

(b) Si $f_n \rightarrow f$ en L_p (con $1 \leq p \leq \infty$), entonces $f_n \rightarrow f$ en medida.

Solución.- (a) Observemos que $f_n(x)$ no converge a $f(x)$ sii existe un $\epsilon > 0$, tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, hay un $n \geq N$, para el que $|f_n(x) - f(x)| > \epsilon$, por lo tanto

$$0 = \mu\{f_n \not\rightarrow f\} = \mu\{\cup_{\epsilon > 0} \cap_{N=1}^\infty \cup_{n=N}^\infty |f_n - f| > \epsilon\},$$

y para cada $\epsilon > 0$ y $A_n(\epsilon) = \{|f_n - f| > \epsilon\}$, como la medida es finita se tiene (ver ejercicio 1.3.5)

$$\limsup \mu\{A_n(\epsilon)\} \leq \mu\{\limsup A_n(\epsilon)\} = 0 \Rightarrow \lim \mu\{A_n(\epsilon)\} = 0.$$

(b) Para $p < \infty$, por la desigualdad de Tchebycheff

$$\mu\{A_n(\epsilon)\} \leq \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\epsilon^p} \rightarrow 0,$$

y para $p = \infty$, dado el $\epsilon > 0$, basta considerar N tal que para $n \geq N$, $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$, pues

$$\mu\{|f_n - f| > \epsilon\} \leq \mu\{|f_n - f| > \|f_n - f\|_\infty\} = 0.$$

Ejercicio 6.2.11.- *Demostrar la Desigualdad de Jensen, es decir que si $\mu(\Omega) = 1$, $f: \Omega \rightarrow (a, b)$ es medible e integrable y $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces $\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f d\mu$.*

Solución.- Toda función convexa tiene la propiedad de que para todo $x_0 \in (a, b)$ existe una función afín, $h(x) = px + c$, tal que $h(x) \leq \varphi(x)$ y $h(x_0) = \varphi(x_0)$. Tomemos $x_0 = \int f d\mu$, y veamos en primer lugar que $x_0 \in (a, b)$, para ello observemos que para $a = -\infty$, como f es integrable, $a < x_0$, por lo que también si $b = \infty$ es $x_0 < b$. En el caso finito, pongamos $b < \infty$, si fuera $x_0 = b$, como $f < b$, $b - f > 0$ y tiene integral nula, lo cual implicaría que $b - f = 0$ c.s., lo cual es absurdo. Ahora el resultado es evidente pues tomando la función h correspondiente tendremos que

$$\begin{aligned}\varphi\left(\int f d\mu\right) &= \varphi(x_0) = h(x_0) = px_0 + c = p\left(\int f d\mu\right) + c \\ &= \int (pf + c) d\mu = \int h[f] d\mu \leq \int \varphi[f] d\mu. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio 6.2.12.- *Demostrar que si $\mu(\Omega) = 1$ y f, g son medibles y positivas y tales que $fg \geq 1$, entonces $\left(\int f d\mu\right) \cdot \left(\int g d\mu\right) \geq 1$.*

Solución.- $1/f \leq g$ y por la Desigualdad de Jensen, para $\varphi(x) = 1/x$,

$$\frac{1}{\int f d\mu} \leq \int \frac{1}{f} d\mu \leq \int g d\mu. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 6.2.13.- *Demostrar que si $0 < r < s \leq \infty$, entonces $l_r \subset l_s$.*

Solución.- Para $s = \infty$ es obvio, pues si x_n es tal que $\sum |x_n|^r < \infty$, en particular tendremos que $|x_n|^r \leq \sum |x_n|^r < \infty$ y por tanto $|x_n|$ está acotada. Sea ahora $s < \infty$, como sólo hay un conjunto finito F de n para los que $|x_n| \geq 1$, pues en caso contrario $\sum |x_n|^r \geq \sum_F |x_n|^r = \infty$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^s = \sum_F |x_n|^s + \sum_{\mathbb{N}-F} |x_n|^s \leq \sum_F |x_n|^s + \sum_{\mathbb{N}-F} |x_n|^r < \infty. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 6.4.1.- *Sea $g \in L_{\infty}$, demostrar que para $1 \leq p < \infty$, si $f \in L_p$, $gf \in L_p$, que la aplicación $G: L_p \rightarrow L_p$, $G(f) = gf$, es lineal y continua y que $\|G\| = \|g\|_{\infty}$.*

Solución.- Si $f \in L_p$ y $g \in L_{\infty}$, entonces $|fg| \leq \|g\|_{\infty}|f|$ c.s., por tanto $|fg|^p \leq \|g\|_{\infty}^p |f|^p$ c.s. y $\|G(f)\|_p \leq \|g\|_{\infty} \|f\|_p$, por tanto G es acotada y $\|G\| \leq \|g\|_{\infty}$, veamos la otra desigualdad, para ello sea $\epsilon > 0$, entonces $\{|g| > \|g\|_{\infty} - \epsilon\}$ no es localmente nulo y tiene un subconjunto medible A , con $0 < \mu(A) < \infty$, por tanto $f = I_A \in L_p$, $\|f\|_p = \mu(A)^{1/p}$ y

$$(\|g\|_{\infty} - \epsilon)\mu(A)^{1/p} \leq \left(\int |fg|^p\right)^{1/p} = \|G(f)\|_p \leq \|G\| \|f\|_p.$$

Índice de Materias

Símbolos utilizados

- (Ω, \mathcal{A}) , 4
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, 13
- $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$, 36
- $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$, 36
- $A_n \downarrow A$, 5
- $A_n \uparrow A$, 5
- DF_x , 177
- $F_*\mu$, 112
- $Hf(x)$, 159
- $J(T)$, 173
- L_2 , 156
- L_p , **202**
- M_i , 93
- $P_f(x, r)$, 159
- Ω , 4
- $\alpha(C)$, 6
- α_P , 93
- β_P , 93
- δ_x , 13
- $\inf \emptyset$, 21, 22, 52
- $\int_{\Omega} h \, d\mu$, 74
- $\int_a^b f(x) \, dx$, 94
- $\lambda \ll \mu$, 142
- λ^+ , 135
- λ^- , 135
- $\lambda_1 \perp \lambda_2$, 151
- $\limsup A_n, \liminf A_n$, 5
- $\mu_1 \times \mu_2$, **106**
- $\|T\|$, **210**
- $\|\mu\|$, **140**
- $\|f\|_{\infty}$, **196**
- $\|f\|'_{\infty}$, **245**
- $\|f\|_p$, **195**
- $\sigma(C)$, 6
- $\sup \emptyset$, 22, 52, 75
- $d(A)$, 22
- $d(\emptyset)^p$, 23
- $d\lambda/d\mu$, 147
- m_i , 93
- v_F , 164
- \mathcal{A} , 4
- $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$, 103
- $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$, 7, 103
- \mathcal{A}_B , 18
- $\mathcal{B}(\Omega)$, 9
- $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$, **247**
- $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, **240**
- \mathcal{E}' , **211**
- \mathcal{E}^* , **211**
- \mathcal{E}^{**} , 212
- $\mathcal{F}(A)$, 66
- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, 42
- \mathcal{L}_1 , 74
- $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathbb{K})$, 74
- $\mathcal{L}_1[\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K}]$, 74
- \mathcal{L}_{∞} , **196**
- $\mathcal{L}_{\infty}(\Omega, \mathbb{K})$, 196
- \mathcal{L}_p , 195
- $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, **195**
- \mathcal{L}_{1loc} , 159
- $\mathcal{M}(C)$, 6
- \mathcal{M}_r^+ , 253
- \mathcal{N} , **196**
- \mathcal{N}^* , **196**
- \mathcal{S} , 67, 206
- $\tilde{\mathcal{S}}$, 206
- A**
- abierto relativamente compacto, **238**
- absoluta continuidad
- de medidas, **142**
- aplicación
- de clase 1, **177**
- de clase ∞ , **177**
- de clase m , **177**

diferenciable, **177**
 medible, **64**
 axioma
 de Arquímedes, **2**

B

base
 de un espacio topológico, **9**
 base de un cilindro medible, **126**
 borelianos, **9**

C

c.s., **28**
 carga, **16**
 casi seguro, **28**
 cilindro, **126**
 cilindro medible
 de base un producto finito, **126**
 clase
 elemental, **7**
 monótona, **5**
 clase elemental, **32**
 compactificación
 de Alexandrov, **239**
 por un punto, **239**
 completación, **207**
 conjunto
 μ^* -medible, **23**
 de Cantor, **47**
 Lebesgue medible, **36**
 de \mathbb{R}^n , **42**
 localmente nulo, **196**
 medible, **4**
 nulo, **28**
 negativo, **134**
 nulo, **134**
 positivo, **134**
 convergencia
 casi seguro (c.s.), **223**
 casi uniforme, **223**
 en \mathcal{L}_p , **223**
 en medida, **223**
 curvas de Julia, **58**

D

delta de Dirac, **13**
 derivada de Radon–Nikodym, **147**
 descomposición
 de Hahn, **134**
 de Jordan, **135**, **155**

desigualdad
 de Cauchy–Schwarz, **199**
 de Hölder, **199**
 de Jensen, **286**
 de Minkowsky, **200**
 de Tchebycheff, **89**, **224**
 diámetro de A , $d(A)$, **22**
 difeomorfismo, **177**
 diferencia simétrica de conjuntos, **26**
 dimensión
 aritmética, **57**
 de Hausdorff, **52**, **57**
 de Krull, **57**
 de recubrimientos, **57**
 de retículos, **57**
 graduada, **57**
 inductiva, **57**
 dual topológico, **211**

E

encoge suavemente, **162**
 espacio
 completo, **13**
 de medida, **13**
 HLC, **237**
 medible, **4**
 producto, **103**
 reflexivo, **212**
 topológico
 Hausdorff, **237**
 localmente compacto, **14**, **237**
 separable, **57**
 espacio normado cociente, **248**
 esquinas del rectángulo, **38**
 exponentes conjugados, **198**

F

Fatou, Pierre, **58**
 fractales, **58**
 función
 λ -integrable, **136**
 absolutamente continua, **155**, **164**,
 192
 de Cantor, **70**
 de distribución
 en \mathbb{R} , **31**
 en \mathbb{R}^n , **38**
 de variación acotada, **164**
 en J , **164**
 esencialmente acotada, **196**

integrable, **74**
 compleja, **74**
 Lebesgue medible, **64**
 localmente integrable, **159**
 medible, **64**
 que se anula en $-\infty$, **164**
 que se anula en el ∞ , **247**
 Riemann integrable, **94**
 semicontinua
 inferiormente, **240**
 superiormente, **240**
 simple, **67**
 función maximal de Hardy–Littlewood,
 159
 funciones medibles
 equivalentes, **202**

H

Hipótesis ergódica
 de Boltzman, **229**
 de Maxwell–Boltzman, **235**
 HLC, **237**

I

indicador de A , I_A , **66**
 inmersión, **179**
 integral
 de Riemann, **94**
 impropia, **95**
 de una función medible, **74**
 de una función simple finita, **72**
 respecto de una
 carga, **136**
 medida, **74**
 medida compleja, **149**
 interpretación geométrica
 de $J(T)$, **176**
 del determinante, **174**
 isometría, **211**
 isomorfismo, **211**

J

Julia, Gaston, **58**

L

l.c.s., **196**
 límite superior (inferior) de A_n , **5**
 Lema
 de Fatou, **85**
 de Urysohn, **240**

localmente casi seguro, **196**

M

Mandelbrot, Benoit, **58**
 matriz

 Jacobiana, **177**

medida, **13**

 aditiva, **13**

 compleja, **138**

 regular, **244**

 concentrada en un conjunto, **151**

 cuasi-regular, **242**

 de contar, **13**

 de Haar, **14**

 de Hausdorff, **14**, **57**, **175**

 de subvariedades, **177**, **181**

 en \mathbb{R}^n , **53**

 p-dimensional, **52**

 de Lebesgue, **14**

 en \mathbb{R} , **36**

 de Lebesgue–Stieltjes, **14**

 en \mathbb{R} , **31**

 en \mathbb{R}^n , **37**

 delta de Dirac, **13**

 exterior, **20**

 de Hausdorff, **23**

 métrica, **50**

 imagen, $T_*\mu$, **112**, **227**

 producto, **106**

 real, **133**, **138**

 regular, **44**, **243**

 exterior, **44**, **242**

 interior, **44**, **242**

 semifinita, **19**, **49**

σ -finita, **13**

medidas singulares, **151**

O

operaciones en $\overline{\mathbb{R}}$

 producto y cociente, **67**

 suma y orden, **16**

P

parametrización, **179**

parte

 negativa de λ , **135**

 positiva de λ , **135**

partición de un intervalo, **93**

Principio

 de los buenos conjuntos, **6**, **8**

probabilidad, **13**

producto

de convolución, **124**, 130

finito de medibles, **7**, **103**

punto recurrente, **229**

R

rectángulo, **36**

restricción de una medida, **18**

S

segundo axioma de numerabilidad, 9

semi-rectángulo, **37**

semiintervalos, 37

σ -álgebra, **4**

de Borel, **9**

producto, **103**

numerable, 126

σ -compacto, 237

simetrización de Steiner, **188**

soporte

de una función, **239**

subvariedad diferenciable, **179**

sucesión f_n de Cauchy

casi seguro, **223**

casi unif., **223**

en medida, **223**

T

Teoría Ergódica, 229

Teorema

clásico de la medida producto,

106, **110**

de aditividad, **79**

de aproximación, **26**

de Baire, **11**

de caracterización, **95**

de convergencia de Vitali, **226**

de descomposición

de Hahn, **134**

de Jordan, **135**

de Lebesgue, **152**

de extensión

de Caratheodory, **24**

de Hahn, **25**, 107, 110, 119

de Fubini, **112**, 121, 184

clásico, **115**

de Hahn-Banach, **212**

de la clase monótona, **7**, 45, 109,

168

de la convergencia dominada, **85**,

87, 88, 94, 99, 148, 149,

159, 206, 226, 231

de la convergencia monótona, **79**,

80, 82, 84, 113, 144, 182,

216, 228

extendido, **84**

de la medida producto, **108**

de Lebesgue, **170**

de Lusin, **245**

de Particiones de la unidad, **242**

de Radon-Nikodym, 155, 156, 169

I, **143**

II, **145**

III, **147**

de Recurrencia de Poincare, **229**

de representación

de Riesz I, **249**

de Riesz II, **255**

polar de una medida, **149**

del cambio de variable, **182**

Ergódico

maximal, **228**

puntual, **228**

fundamental del cálculo, 63, 98,

155, **170**

transformación

conservando la medida, **228**

ergódica, **229**

transformada

de Fourier, 130

V

valor promedio de f en la bola $B(x, r)$,

159

variable aleatoria, 64

variación

de una carga, **135**

de una función, **164**

en un intervalo, **164**

de una medida compleja, **139**

total de una medida compleja,

140