

# ANÁLISIS II

Prof. Alejandro Ramírez

Facultad de Matemáticas, PUC

3 de Septiembre, 2005

## Interrogación 1

1. Notemos que c.s.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x, t+h) - f(x, t-h)}{2h} = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x).$$

Por otra parte, por el teorema del valor medio, para  $h > 0$ ,  $t-h \geq 0$  y  $t+h \leq 1$ ,

$$\frac{f(x, t+h) - f(x, t-h)}{2h} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \bar{h}(x)),$$

donde  $-h \leq \bar{h}(x) \leq h$ . Luego definamos  $g_h(x, t) = \frac{f(x, t+h) - f(x, t-h)}{2h}$  cuando  $h > 0$ ,  $t-h \geq 0$  y  $t+h \leq 1$ , y  $g_h(x, t) = f(x, t)$  en caso contrario. Luego,  $g_h$  es una función acotada en  $Q$ . El resultado se sigue por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (o el teorema de la convergencia acotada).

2. (a) Primero notemos que para  $a > b$ ,

$$0 \leq F(b) - F(a) = \mu(a, b] < \infty$$

Luego, si  $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F(x + 1/n) - F(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(0, x + 1/n] = \mu(0, x],$$

donde hemos ocupado que  $\cap_n (0, x + 1/n] = (0, x]$ . Como  $F$  es no-decreciente en su argumento, concluimos que es continua por la derecha. Por otra parte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F(x - 1/n) - F(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(0, x - 1/n] = \mu(0, x] - \mu\{x\},$$

lo que demuestra ocupando nuevamente el hecho de que  $F$  es no-decreciente, que  $F$  es continua en  $x$  si y sólo si  $\mu\{x\} = 0$ .

(b) Esta afirmación se sigue directamente de la  $\sigma$ -aditividad de la medida, su finitud, del hecho que  $\phi = \cap_n (-\infty, n]$  y del hecho que  $F$  es no-decreciente.

3. Consideremos el caso  $\alpha \geq 1$ . Notemos que,  $x^\alpha/(1+x^\alpha) \leq 1$  si  $x \geq 1$  y  $x^\alpha/(1+x^\alpha) \leq x$  si  $0 \leq x \leq 1$ . Luego,

$$\frac{x^\alpha}{1+x^\alpha} \leq x,$$

cuando  $x \geq 0$ . Multiplicando ambos lados de esta desigualdad por  $\alpha x^{-1}$  e integrando entre 0 y  $x$ , concluimos que,

$$\log(1 + x^\alpha) \leq \alpha x,$$

si  $x \geq 0$ . Luego,

$$n \log(1 + (f/n)^\alpha) \leq \alpha f.$$

El caso  $\alpha \geq 1$  se sigue por el teorema de la convergencia dominada y por el hecho de que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log(1 + (f/n)^\alpha) = f$  si  $\alpha = 1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log(1 + (f/n)^\alpha) = f$  si  $\alpha > 1$ . El caso  $0 < \alpha < 1$  es una consecuencia directa del lema de Fatou.

4. (a) Definimos la medida de Lebesgue  $\mu$  de un conjunto del álgebra  $\mathcal{C}$  como la suma de los largos de los intervalos que lo forman. Para extender esta medida a la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene a  $\mathcal{C}$ , es basta probar que si  $C_n$  es una sucesión decreciente de conjuntos del álgebra, tales que  $\bigcap C_n = \phi$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = 0$ , donde  $\mu$  es la medida de Lebesgue. Supongamos que  $\inf \mu(C_n) = \delta > 0$ . Notemos que es fácil construir para cada  $C_n$  un cerrado  $D_n \subset C_n$  tal que  $\mu(D_n) \geq \delta - \frac{\delta}{2^n}$ . Luego si definimos,

$$E_n := \bigcap_{k=1}^n D_k,$$

tenemos que,

$$\mu(E_n) \geq \delta - \delta \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \geq \frac{\delta}{2},$$

y  $E_n$  es una sucesión de cerrados no vacíos no-creciente. Escogamos una sucesión  $x_n \in E_n$ . Como  $[0, 1]$  es compacto, existe una subsucesión  $x'_n$  convergente a  $x \in [0, 1]$ . Como cada  $E_n$  es cerrado, necesariamente  $x \in \bigcap E_n$ , lo que es una contradicción porque supusimos que  $\bigcap C_n = \phi$ .

TIEMPO: 2 horas.

La prueba es SIN apuntes. Se admiten consultas sólo durante los primeros 10 minutos.