

Intégration et analyse hilbertienne
Épreuve hors classement

durée 2 heures

Documents autorisés : cours polycopié et notes personnelles.

Sauf indication contraire, les fonctions considérées sont à valeurs complexes. L'espace \mathbb{R} sera toujours muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

Exercice 1. — Soit f une fonction continûment dérivable définie sur \mathbb{R} . On suppose que les applications $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f'(x)$ sont bornées. On suppose de plus que $f(x) \rightarrow b$ pour $|x| \rightarrow \infty$ et on pose $f(0) = a$. Soit g une fonction sommable définie sur $[1/2, 2]$. On pose

$$h_n(x) = \int_{1/2}^2 f(xy^n)g(y) dy.$$

- a. — Montrer que les fonctions h_n sont dérivables sur \mathbb{R} .
- b. — Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$.
- c. — On suppose de plus que f est sommable. Montrer que les fonctions h_n sont sommables.

Exercice 2. — L'espace $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ étant muni de sa tribu borélienne et de la mesure d'équiprobabilité, on définit

$$T(\omega_1, \dots, \omega_n, \dots) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_j = 0 \text{ pour tout } j \\ k & \text{si } k \text{ est le premier indice tel que } \omega_k = 1 \end{cases}.$$

- a. — Montrer que la fonction T est mesurable.
- b. — Montrer que pour toute fonction positive f , on a

$$\int_{\Omega} f(T(\omega)) dP(\omega) = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} f(p).$$

Exercice 3. — Soit $Q =]0, 1[\times]0, 1[$ le carré unité de \mathbb{R}^2 , et $L^2(Q)$ l'espace des classes de fonctions de carré sommable (pour la mesure de Lebesgue) sur Q . On notera Φ la symétrie $(x, y) \mapsto (y, x)$. Si les fonctions \tilde{f} sont les représentants d'un élément $f \in L^2(Q)$, les fonctions $(x, y) \mapsto \tilde{f}(y, x)$ sont les représentants d'un même élément de $L^2(Q)$ que l'on notera $f \circ \Phi$.

- a. — Montrer que, pour tout $f \in L^2(Q)$, on a $\|f \circ \Phi\|_2 = \|f\|_2$.
- b. — On note F le sous-espace formé des $f \in L^2(Q)$ tels que $f = f \circ \Phi$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(Q)$.
- c. — Déterminer le supplémentaire orthogonal F^\perp de F .

Exercice 4. — Pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ et pour $x > 0$, on pose

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

- a. — Démontrer que $|Tf(x)| \leq \|f\|_2 / \sqrt{x}$ pour tout $x > 0$.
- b. — On suppose de plus que la fonction f est positive et est nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$, avec $0 < a < b$.
 - b1. — Montrer que $Tf \in L^2(\mathbb{R}_+)$.
 - b2. — Montrer que

$$\|Tf\|_2^2 = 2 \iiint_{0 < s < t < x} \frac{f(s)f(t)}{x^2} ds dt dx = 2 \int_0^\infty f(y) Tf(y) dy.$$

- b3. — Démontrer que $\|Tf\|_2 \leq 2\|f\|_2$.
 - c. — On suppose seulement que $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ est positive. On pose $f_n(x) = f(x)$ pour $1/n \leq x \leq n$ et $f_n(x) = 0$ sinon. Démontrer que $Tf \in L^2(\mathbb{R}_+)$ et que $\|Tf\|_2 \leq 2\|f\|_2$ (on pourra considérer les limites de $\|f_n\|_2$ et de $\|Tf_n\|_2$ pour $n \rightarrow \infty$).
 - d. — Démontrer que T est une application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même.
-