

## CONTROL 2 ANALISIS II

Prof. Jaime San Martín

**Pregunta 1 :** Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función creciente y continua por la derecha. Denotaremos por  $\mu$  la medida de Lebesgue-Stieltjes que  $F$  induce. Consideremos  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ . Probaremos la fórmula de integración por partes  $\forall x > 0$

$$g(F(x)) - g(F(0)) = \int_{(0,x]} g'(F(y-)) d\mu(y) + \sum_{0 < y \leq x} (g(F(y)) - g(F(y-)) - g'(F(y-))(F(y) - F(y-))).$$

- ( a) Pruebe que la serie de la fórmula anterior converge absolutamente.  
 ( b) Pruebe que dado  $\epsilon > 0$  existe una cantidad finita de puntos  $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = x$  tal que para  $i = 2, \dots, n$  se tiene

$$x_i - x_{i-1} \leq \epsilon \text{ y } |F(x_i-) - F(x_{i-1})| \leq \epsilon.$$

- ( c) Pruebe que

$$g(F(x_i)) - g(F(x_{i-1})) = g'(F(x_{i-1}))(F(x_i) - F(x_{i-1})) + g(F(x_i)) - g(F(x_i-)) - g'(F(x_{i-1}))(F(x_i) - F(x_i-)) + R_i,$$

donde  $\sum_i |R_i| \rightarrow 0$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Indicación: Recuerde que  $\sup\left\{\frac{|g(z) - g(u) - g'(u)(z-u)|}{|z-u|}\right\}$  donde el supremo es tomado sobre el conjunto  $\{|z| \leq a, |u| \leq a, |z-u| \leq \rho\}$  con  $a$  finito fijo, converge a 0 cuando  $\rho \rightarrow 0$ .

Pruebe la fórmula de integración por partes.

**Pregunta 2 :** Consideremos  $\beta = \beta([0, 1])$  los borelianos de  $[0, 1]$ . Una función  $Q : [0, 1] \times \beta \rightarrow [0, 1]$  se dirá un núcleo de transición si

- ( 1)  $\forall x \in [0, 1]$   $Q(x, \bullet)$  es una medida en  $\beta$  tal que  $Q(x, [0, 1]) = 1$ .
- ( 2)  $\forall B \in \beta$   $Q(\bullet, B)$  es una función  $\beta/\beta$ -medible.

Pruebe las siguientes propiedades:

- ( a) Si  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  es  $\beta \otimes \beta/\beta$ -medible, entonces

$$x \rightarrow \int f(x, y)Q(x, dy)$$

es  $\beta/\beta$ -medible.

- ( b) Supongamos adicionalmente que  $\forall y \int f(x, y)dx = 1$  entonces

$$(y, B) \rightarrow \int f(x, y)Q(x, B)dx$$

es un núcleo de transición.

- ( c)  $(x, B) \rightarrow \int Q(y, B)Q(x, dy)$  también es un núcleo de transición.
- ( d) Existe una única medida  $\nu$  en  $([0, 1] \times [0, 1], \beta \otimes \beta)$  tal que:

$$\forall A, B \in \beta \quad \nu(A \times B) = \int_A Q(x, B)dx.$$

Dar una fórmula para la medida de un conjunto  $C \in \beta \otimes \beta$  arbitrario. Calcular esta medida en los casos siguientes:

- ( i)  $Q(x, \bullet)$  es la medida de Lebesgue.
- ( ii)  $Q(x, \bullet)$  es la medida concentrada en  $\{x\}$ .