

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliar: Mauricio Duarte.

5 hrs

Pregunta 1

- 1) (0,7p.) Sea (X, τ, μ) espacio de medida *regular*, con (X, Θ) espacio topológico separado localmente compacto. Definimos $\Theta_0 := \{\theta \in \Theta : \mu(\theta) = 0\}$ y $N := \bigcup_{\theta \in \Theta_0} \theta$.
- i) Muestre que $\mu(N) = 0$ y que para todo $\theta \in \Theta$ tal que $\theta \setminus N \neq \emptyset$ se tiene $\mu(\theta) > 0$.
 - ii) Se define el *soporte* de μ como $Sop \mu := N^c$. Pruebe que $x \in Sop \mu$ ssi $\int f d\mu > 0$ para toda $f \in C_0(X, [0, 1])$ tal que $f(x) > 0$.
- 2) (0,8p) Sean μ y ν dos medidas de probabilidad sobre (Ω, \mathcal{F}) y $\|\nu - \mu\| := |\nu - \mu|(X)$ su distancia en variación total.
- a) Pruebe que $\|\nu - \mu\| = 2 \sup\{|\nu(A) - \mu(A)| : A \in \mathcal{F}\}$
 - b) Sea $\nu = \nu_s + \nu_a$ la descomposición de Lebesgue de ν c/r a μ . Pruebe que

$$\|\nu - \mu\| = 2 \int (1 - \frac{d\nu_a}{d\mu})_+ d\mu.$$

Pregunta 2 *Desigualdad de Minkowsky para integrales*

Sean (X, τ, μ) y (Y, \mathcal{F}, ν) dos espacios de medida σ -finitos y $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función $\tau \otimes \mathcal{F}$ medible.

- a) (1p.) Pruebe que si $f \geq 0$ y $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\left[\int \left(\int f(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left[\int f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$$

Ind: Sea q tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Estudie la aplicación

$$g \mapsto T(g) = \int \left[\int f(x, y) d\nu(y) \right] g(x) d\mu(x)$$

para funciones $g \in L^q$.

- b) (0,5p.) Suponga que $1 \leq p \leq \infty$, que $f(\cdot, y) \in L^p(\mu)$ ν -c.t.p en y y que la función $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$ pertenece a $L^1(\nu)$. Pruebe que entonces $f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$ μ -c.t.p en x , que la función $x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y)$ pertenece a $L^p(\mu)$, y que

$$\left\| \int f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y)$$

Pregunta 3 *Función Maximal de Hardy-Littlewood y teorema de derivación de Lebesgue*

En esta pregunta se denotará indistintamente por λ o por dx la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . Medibilidad será siempre c/r a las tribus de Lebesgue.

- 1) Sea \mathcal{C} una familia de bolas abiertas en \mathbb{R}^n y $U = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$. Sea $c < \lambda(U)$. Se probará que existe bolas disjuntas B_1, \dots, B_k tales que $\sum_{i=1}^k \lambda(B_i) > 3^{-n}c$.

- a) (0,3p.) Muestre que existe una subfamilia finita $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{C}$ tal que $\lambda(\bigcup_{j=1}^m A_j) > c$.
- b) (0,3p.) Defina B_1 como la bola A_j con mayor radio, y recursivamente, B_{i+1} como la bola de mayor radio entre las A_j que son disjuntas de B_1, \dots, B_i , y así hasta que ya no se pueda continuar el proceso. Muestre que si $\exists j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $A_j \neq B_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$, entonces existe $i(j)$ tal que $A_j \cap B_{i(j)} \neq \emptyset$ y $A_j \subseteq B_{i(j)}^*$, donde $B_{i(j)}^*$ es la bola concéntrica a $B_{i(j)}$ de radio tres veces mayor. Concluya la desigualdad buscada.
- 2) Una función medible $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *localmente integrable* si $\int_K |f(x)| dx < \infty$ para todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Para f localmente integrable, $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ definimos

$$A_r f(x) := \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) dy$$

donde $B(x, r)$ es la bola abierta de centro x y radio r .

- a) (0,2p.) Pruebe que para cada $r > 0$, $A_r f$ es medible en x .
- b) (0,4p.) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $A_r f(x)$ es continua como función de r (Ind: verifique que $\lambda(S(x, r)) = 0$, donde $S(x, r) = \{y : |x - y| = r\}$). Deduzca que la *función maximal de Hardy-Littlewood* Hf , definda por

$$Hf(x) := \sup_{r>0} A_r |f|(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy,$$

es medible en x .

- c) (0,8 p.) Pruebe el **Teorema maximal**: Existe $C > 0$ tal que para todo $\alpha > 0$ y toda f integrable,

$$\lambda(\{x : Hf(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(x)| dx.$$

Para ello, se sugiere definir $E_\alpha := \{x : Hf(x) > \alpha\}$. Muestre que para cada $x \in E_\alpha$ existe $r_x > 0$ tal que $\frac{1}{\alpha} \int_{B(x, r_x)} f(y) dy > \lambda(B(x, r_x))$ y considere la familia de bolas $\{B(x, r_x)\}_{x \in E_\alpha}$ y $c < \lambda(E_\alpha)$ cualquiera.

- 3) A continuación se probará el **Teorema de derivación de Lebesgue**: si f es localmente integrable, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} A_r f(x) = f(x) \quad dx - c.t.p$$

- a) (0,2p.) Pruebe el teorema para una función g integrable continua.
- b) (0,8p.) Defina $D_\alpha := \{x : \limsup_{r \rightarrow 0} |A_r f(x) - f(x)| > \alpha\}$. Muestre que si g es integrable y continua y si $F_\alpha = \{x : |f(x) - g(x)| > \alpha\}$, entonces

$$D_\alpha \subseteq F_{\frac{\alpha}{2}} \cup \{x : H(f - g)(x) > \frac{\alpha}{2}\}.$$

Pruebe el resultado para $f \in L^1$ y luego para f localmente integrable.