

Intégration et analyse hilbertienne

Épreuve hors classement

*durée 2 heures (+30mn pour les EV2)*

*Documents autorisés : cours photocopié et notes personnelles*

*On tiendra le plus grand compte de la clarté et de la rigueur de la copie. Les résultats du photocopié qui seront utilisés devront être cités par leur nom ou leur référence.*

*Les espaces  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2$  seront munis de leur tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.*

**Exercice 1.** — Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré vérifiant  $\mu(X) = 1$ . Soit  $f$  une fonction mesurable positive définie sur  $X$ . On suppose que

$$\int_X (f(x))^n d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Que peut-on dire de la fonction  $f$  ?

**Exercice 2.** — L'espace  $\Omega$  des suites infinies  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$  de 0 et de 1 est muni de sa tribu borélienne  $\text{Bor}(\Omega)$  et de la mesure d'équiprobabilité  $P$ . On rappelle que, pour  $\alpha \in \{0, 1\}$ ,  $\beta \in \{0, 1\}$  et  $p \neq q$ , on a

$$P\left(\{\omega \mid \omega_p = \alpha \text{ et } \omega_q = \beta\}\right) = 1/4$$

On définit les fonction  $Y_n$  par  $Y_n(\omega) = 2\omega_n - 1$ .

(a) Montrer que les  $Y_n$  forment un système orthonormal dans l'espace  $L^2(\Omega)$ .

(b) Démontrer qu'il existe une fonction  $F$  de carré sommable dans  $\Omega$ , et une suite croissante  $(N_k)$  d'entiers, telles que  $\lim_k N_k = \infty$  et que

$$\sum_{p=1}^{N_k} \frac{1}{p} Y_p(\omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F(\omega) \text{ p.p.}$$

(c) Démontrer que, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , on a  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\omega_p}{p} = +\infty$ .

**Exercice 3.** — Soit  $f$  une fonction sommable définie sur  $\mathbb{R}$  et posons

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{tx}{t^2 + x^2} f(t) dt.$$

- (a) Démontrer que la fonction  $F$  est définie et continue en tout point  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Démontrer que la fonction  $F$  est dérivable en tout point  $x \neq 0$ .
- (c) Donner un exemple de fonction sommable positive  $f$  telle que  $F$  ne soit pas dérivable à l'origine. (On pourra remarquer que  $F(x) \geq \frac{1}{5} \int_x^{2x} f(t) dt$  pour  $x > 0$ .)

**Exercice 4.** — On se donne une fonction mesurable positive  $K$  définie dans  $\mathbb{R}^2$  vérifiant  $K(x, y) = K(y, x)$  et

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int K(x, y) dy \leq M,$$

où  $M$  est une constante positive donnée.

Lorsque l'intégrale a un sens, on note  $T$  l'opérateur qui à une (classe de) fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  fait correspondre la classe de

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy.$$

- (a) Pour  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ , montrer que  $Tf$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R})$  et que  $T$  est un opérateur linéaire continu de  $L^\infty(\mathbb{R})$  dans lui-même.
- (b) Pour  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , montrer que  $Tf(x)$  est défini pour presque tout  $x$  et que la fonction  $Tf$  est sommable. Montrer que  $T$  est un opérateur linéaire continu de  $L^1(\mathbb{R})$  dans lui-même.
- (c) Pour  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , montrer que

$$\iiint K(x, y) K(x, z) |f(y)| |f(z)| dx dy dz < \infty$$

- (d) Pour  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , montrer que  $Tf(x)$  est défini pour presque tout  $x$  et que la fonction  $Tf$  est de carré sommable. Montrer que  $T$  est opérateur linéaire continu de  $L^2(\mathbb{R})$  dans lui-même.
- (e) On remplace la propriété (1) par la propriété suivante : il existe une constante  $M$  et une fonction  $w$  définie sur  $\mathbb{R}$ , mesurable et strictement positive, telles que

$$\int K(x, y) w(y) dy \leq Mw(x).$$

Montrer que  $T$  est encore un opérateur linéaire continu de  $L^2(\mathbb{R})$  dans lui-même.

---