

MEDIDA E INTEGRACIÓN – CONTROL 2

JAIME SAN MARTÍN, JULIO BACKHOF, OMAR LARRÉ
30 DE MAYO DEL 2009

P1. 1.1 (60 %) Sea F, G dos funciones monótonas y continuas definidas en $[0, 1]$. Puede suponer si quiere que F, G están definidas en todo \mathbb{R} tomando $F(x) = F(0)$ para $x < 0$ y $F(x) = F(1)$ para $x > 1$ (y similarmente para G). Denotaremos por dF y dG las medidas de Lebesgue-Stieltjes que ellas inducen.

- Pruebe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F\left(\frac{i}{n}\right) \left(G\left(\frac{i}{n}\right) - G\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) = \int F(x) dG(x).$$

- Pruebe que

$$\sum_{i=1}^n F\left(\frac{i}{n}\right) \left(G\left(\frac{i}{n}\right) - G\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) = F(1)G(1) - F(0)G(0) - \sum_{i=1}^n G\left(\frac{i-1}{n}\right) \left(F\left(\frac{i}{n}\right) - F\left(\frac{i-1}{n}\right) \right)$$

- Concluya la fórmula de integración por partes

$$\int F(x) dG(x) = F(1)G(1) - F(0)G(0) - \int G(x) dF(x).$$

- ¿Qué sucede si F, G son funciones de variación acotada y continuas?

1.2 (40 %) Suponga que $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es absolutamente continua y creciente. Además suponga que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua. Pruebe que $f \circ g$ es absolutamente continua.

P2. Suponga que (X, \mathcal{F}, ν) es un espacio de medida σ -finito y que $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Considere $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función \mathcal{F} medible y positiva. Definamos

$$\mathcal{E}(f) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\}, \quad \mathcal{E}_<(f) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t < f(x)\}.$$

- Pruebe que $\mathcal{E}(f)$ y $\mathcal{E}_<(f)$ son $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}$ medibles. Concluya que

$$G(f) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : t = f(x)\}$$

también es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}$ medible.

- Pruebe que

$$\int f(x) d\nu(x) = \nu \otimes \mu(\mathcal{E}_<(f)) = \nu \otimes \mu(G(f)).$$

Indicación: Pruebe ambos resultados primero para f simple. Concluya que $\nu \otimes \mu(G(f)) = 0$

P3. Suponga que $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función medible tal que

$$\int_0^1 \int_0^1 k(x, y)^q dx dy < \infty,$$

donde $1 < q < \infty$. Pruebe que $T(f)(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy$ define una transformación lineal continua de $L^p = L^p([0, 1], \mathcal{L}, dx)$ en L^p con p el índice conjugado de q . Muestre que para casi todo x el funcional lineal $T(\bullet)(x)$ (considerando x fijo) es lineal y continuo en L^p .

TIEMPO 3 hrs.