

ANÁLISIS II

Prof. Alejandro Ramírez

Facultad de Matemáticas, PUC

3 de Septiembre, 2005

Interrogación 1

1. **[1.55]pt.** Sea f una función definida y acotada en el cuadrado $Q = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$, y suponga que para cada t fijo la función f es medible en x . Suponga además que para cada $(x, t) \in Q$ la derivada parcial $\partial f / \partial t$ existe. Suponga que $\partial f / \partial t$ está acotada en Q . Demuestre que,

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 f(x, t) dx = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dx.$$

2. **[1.40]pt.** Considere en los reales \mathbf{R} una medida positiva μ definida en los Borelianos que es finita para conjuntos acotados. Para cada real x defina,

$$F(x) := \mu(-\infty, x].$$

- (a) **[1.00]pt.** Demuestre que F es continua por la derecha, y que F es continua en un punto y si y sólo si $\mu\{y\} = 0$.
- (b) **[0.40]pt.** Pruebe que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(-x) = 0$.
3. **[1.25]pt.** Suponga que μ es una medida positiva en X , $f : X \rightarrow [0, \infty]$ es medible, $\int_X f d\mu = c$, donde $0 < c < \infty$, y α es una constante. Pruebe que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X n \log[1 + (f/n)^\alpha] d\mu = h_\alpha,$$

donde $h_\alpha = 0$ si $1 < \alpha < \infty$, $h_\alpha = c$ si $\alpha = 1$ y $h_\alpha = \infty$ si $0 < \alpha < 1$.

Ayuda: Demuestre que si $\alpha \geq 1$ entonces el argumento de la integral está acotado por αf .

4. **[1.80]pt.**
- (a) **[0.30]pt.** Enuncie el teorema de extensión de Carathéodory.
- (b) **[0.20]pt.** En $X = [0, 1]$, considere la colección de conjuntos \mathcal{C} que son uniones finitas de intervalos semiabierto de la forma $C = \cup_{i=1}^n (a_i, b_i]$ ó $C = [0, b_0] \cup \cup_{i=1}^n (a_i, b_i]$, con $b_0 < a_1 < b_1 < \dots < b_n$. Demuestre que esta colección es un álgebra.
- (c) **[1.30]pt.** Defina la medida de Lebesgue en el álgebra \mathcal{C} y demuestre que se puede extender como una medida positiva definida en los Borelianos.

TIEMPO: 2 horas.

La prueba es SIN apuntes. Se admiten consultas sólo durante los primeros 10 minutos.