

Control 1. Análisis II

Prof. J. San Martín, Aux. F. Schwartz

PREGUNTA 1

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$. El diámetro de A , $d(A)$, se define como

$$d(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}.$$

Note que $d(A) = d(\overline{A})$, $d(\emptyset) = 0$. También recordamos que

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}$$

es la distancia entre A y B .

Denotaremos por $\mathcal{R}_\varepsilon(A)$ el conjunto de recubrimientos $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de A tales que $d(B_k) \leq \varepsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Se define $\Lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ como

$$\Lambda(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Lambda_\varepsilon(A)$$

donde

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \inf\left\{\sum_{k \in \mathbb{N}} d(B_k) : (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)\right\}.$$

Muestre que Λ está bien definida, y note que

$$A \subseteq B \Rightarrow \emptyset \neq \mathcal{R}_\varepsilon(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathcal{R}_\varepsilon(B) \subseteq \mathcal{R}_\varepsilon(A).$$

(i) Pruebe que Λ es una medida exterior.

(ii) Pruebe que Λ satisface además:

- (a) $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, $\text{dist}(A, B) > 0 \Rightarrow \Lambda(A \cup B) = \Lambda(A) + \Lambda(B)$.
- (b) $\Lambda(A + x) = \Lambda(A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$, donde $A + x = \{a + x : a \in A\}$ es el trasladado de A en x .
- (c) $\Lambda(\alpha A) = |\alpha| \Lambda(A) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ y que $\Lambda(\{0\}) = 0$, donde $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$.
- (d) Más generalmente si $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una contracción, es decir,

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ entonces } \Lambda(\psi(A)) \leq \Lambda(A).$$

Se puede probar con (a) que todo Boreliano de \mathbb{R}^2 es Λ -medible. Además de (d) se concluye que Λ es invariante por rotaciones.

Podemos considerar en lo que sigue $\Lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ la medida que induce Λ en los Borelianos. Por qué?

(iii) Demuestre que si $D = [a, b] \times \{0\}$ entonces $\Lambda(D) = b - a$ y concluya que para todo trazo recto $H(x, y) = \{tx + (1-t)y / t \in [0, 1]\}$ se tiene que $\Lambda(H(x, y)) = |x - y|$.

Pruebe además que si $C = [0, 1] \times [0, 1]$, entonces $\Lambda(C) = \infty$ y deduzca que $\Lambda(A) = \infty$ para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $\text{int}(A) \neq \emptyset$.

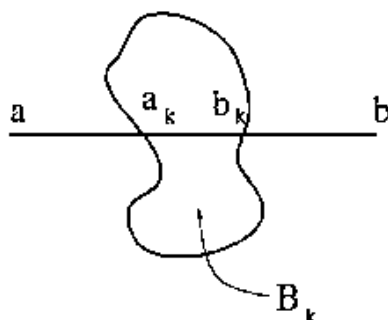
Indicación: Para la primera parte vea lo siguiente:

si $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_s(D)$, entonces definiendo para $B_k \cap D \neq \emptyset$

$$a_k = \inf\{r / (r, 0) \in B_k\}$$

$$b_k = \sup\{r / (r, 0) \in B_k\}$$

entonces $b_k - a_k \leq d(B_k)$, $\cup_k [a_k, b_k] = [a, b]$. Concluya que $b - a \leq \Lambda(A)$ y para la otra desigualdad tome un recubrimiento especial.



(iv) Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva continua simple (i.e. γ inyectiva). El propósito de esta parte es probar que

$$\Lambda(C) = l(\gamma)$$

donde $l(\gamma)$ es el largo de la curva y $C = \gamma([0, 1])$.

Recordemos que $l(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} \sum |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})|$ donde \mathcal{P} es la colección de particiones finitas de $[0, 1]$.

En lo que sigue consideraremos curvas de largo finito.

La parametrización natural $\psi : [0, l(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que $l(\psi_{[0, t]}) = t$. De aquí se deduce que ψ verifica $|\psi(t) - \psi(s)| \leq |t - s|$ para $t, s \in [0, l(\gamma)]$.

(a) Pruebe que $\Lambda(C) = \Lambda(\psi([0, l(\gamma)])) \leq \Lambda([0, l(\gamma)]) = l(\gamma)$ donde hemos identificado $[0, l(\gamma)]$ con $[0, l(\gamma)] \times \{0\}$.

(b) Sea $\mathcal{P} = (t_i)_{i=0, \dots, n}$ una partición finita de $[0, 1]$. Considere la poligonal que pasa por los puntos $(\gamma(t_i))_{i=0, \dots, n}$. Pruebe que la proyección del pedazo de curva $\gamma[t_i, t_{i+1}]$ sobre la recta que pasa por $\gamma(t_i)$ y $\gamma(t_{i+1})$ contiene al trazo $H_i = H(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$.

Pruebe que

$$\Lambda(H_i) \leq \Lambda(\gamma[t_i, t_{i+1}])$$

y concluya que $l(\gamma) \leq \Lambda(C)$.



PREGUNTA 2

Considere $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ creciente continua a la derecha y denotemos por μ_F la medida de Lebesgue-Stieltjes que F induce. Se quiere probar que si f es de clase C^1 entonces

$$\int f(x) 1_{[0,1]}(x) d\mu_F(x) = F(1)f(1) - F(0^-)f(0) - \int_0^1 F(x)f'(x)dx.$$

En lo que sigue denotaremos por $x_i^n = \frac{i}{2^n}$ para $i = 0, \dots, 2^n$.

(i) Pruebe que

$$f_n = f(0)1_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{2^n-1} f(x_i^n)1_{(x_i^n, x_{i+1}^n]}$$

converge puntualmente a f en $[0, 1]$.

Deduzca que

$$\int f_n 1_{[0,1]} d\mu_F \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f 1_{[0,1]} d\mu_F.$$

(ii) Pruebe que

$$\int f_n 1_{[0,1]} d\mu_F = F(1)f\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right) - F(0^-)f(0) - \sum_{i=1}^{2^n-1} F(x_i^n)(f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n)).$$

Concluya el resultado.

Indicación: Recuerde que si f es C^1 entonces $f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + R(x,y)$ donde

$$\sup_{0 < |x-y| < \delta} \frac{|R(x,y)|}{|x-y|} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$