

CONTROL 1

Abril 20, 2002

Prof. Jaime San Martín

Aux. Ricardo Menares

Pregunta 1: Consideremos la medida \mathcal{H}^2 de Hausdorff dos dimensional en \mathbb{R}^2 (no pruebe que es medida). El propósito de esta pregunta es probar que ella coincide con la medida de Lebesgue salvo una constante multiplicativa.

- (i) Pruebe que $S = \{(a, b] \times (c, d] \cap \mathbb{R}^2 : a \leq b, c \leq d \in \mathbb{R}\}$ es una semiálgebra que genera los borelianos de \mathbb{R}^2 .

Se define la medida de un rectángulo $\mu((a, b] \times (c, d]) = (b - a)(d - c)$.

- (ii) Pruebe por inducción que si un rectángulo es unión finita disjunta de rectángulos entonces la medida es la suma de las medidas.
- (iii) Pruebe que μ es una medida en S . Para probar la σ -aditividad si $\cup_{i \in \mathbb{N}} R_i = R$ con $R_i \in S$, disjuntos y $R \in S$, tomar un subrectángulo compacto de R y engrosar los R_i de manera que queden abiertos. Concluya que existe una única medida extensión de μ a los borelianos de \mathbb{R}^2 y que para todo boreliano

$$\mu(A + x) = \mu(A), \quad \mu(kA) = k^2 \mu(A),$$

donde $A + x = \{y + x : y \in A\}$ y $kA = \{ky : y \in A\}$.

- (iv) Pruebe que $\mathcal{H}^2(R) = \mathcal{H}^2([0, 1] \times [0, 1])\mu(R)$ para cualquier cuadrado R y por lo tanto para cualquier rectángulo de extremos racionales y concluya que la igualdad se tiene para cualquier rectángulo. Debe probar que $\mathcal{H}^2([0, 1] \times [0, 1])$ es finita y estrictamente positiva. Concluya que para todo boreliano A se tiene

$$\mathcal{H}^2(A) = \mathcal{H}^2([0, 1] \times [0, 1])\mu(A).$$

⊕ Pregunta 2:

I Supongamos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que verifica

$$\forall x \in \mathbb{R} \ f(x, \bullet) \text{ es de clase } C^1$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \ f(\bullet, t) \in L^1(\mathbb{R}, dx).$$

Además supongamos que existe $g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ tal que

$$\forall x, t \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right| \leq g(x).$$

Pruebe que entonces la función $F(t) = \int f(x, t) dx$ es de clase C^1 y que su derivada está dada por

$$F'(t) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

II Consideremos (X, \mathcal{T}, μ) un espacio de medida finita. Diremos que $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ es una partición finita si \mathcal{A} es una partición de X , los conjuntos A_i , $i = 1, \dots, n$ son medibles y de medida positiva. Para una partición finita \mathcal{A} considere

$$T_{\mathcal{A}}f = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu(A_i)} \int_{A_i} f(x) d\mu(x) \mathbf{1}_{A_i}.$$

(i) Pruebe que si $f \in L^p$ entonces $T_{\mathcal{A}}f \in L^p$, que $T_{\mathcal{A}}$ es lineal y que en L^p tiene norma menor o igual a 1.

Dadas dos particiones finitas \mathcal{A} y \mathcal{B} se dice que \mathcal{B} es más fina que \mathcal{A} si todo elemento de \mathcal{B} está contenido en uno de \mathcal{A} y los elementos de \mathcal{A} son uniones de elementos de \mathcal{B} . La notación que usaremos es $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

(ii) Pruebe que para $f \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$ se tiene el resultado siguiente: dado $\epsilon > 0$ existe \mathcal{A} partición finita tal que

$$\forall \mathcal{B} \text{ partición finita } \mathcal{A} \leq \mathcal{B} \Rightarrow \|T_{\mathcal{B}}f - f\|_p \leq \epsilon.$$

III Consideremos (X, \mathcal{T}, μ) un espacio de medida σ -finita. Supongamos que g es una función medible que verifica

$$\forall f \in L^p \text{ se tiene } fg \in L^p.$$

Demuestre que $g \in L^\infty$.