$\boxed{P2}$ Definamos

A_k = "parto con k pesos y termino con 0"

Sea $p_k^0 = \mathbb{P}(A_k)$

Pero $p_k^0 = \underbrace{\mathbb{P}(A_{k+1} \mid \text{SELLO})}_{\substack{\text{Parto con } k+1 \\ \text{y pierdo}}}\mathbb{P}(\text{SELLO}) + \underbrace{\mathbb{P}(A_{k-1} \mid \text{CARA})}_{\substack{\text{Parto con } k-1 \\ \text{y gano}}}\mathbb{P}(\text{CARA})$

$$= p_{k+1}^0 \cdot \frac{1}{2} + p_{k-1}^0 \cdot \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (*)\ 2p_k^0 = p_{k+1}^0 + p_{k-1}^0 \quad \forall k \in \{1, \dots, N-1\}$

Notar

$p_0^0 = \mathbb{P}($"PARTO con cero y termino con cero"$) = 1$

$p_N^0 = \mathbb{P}($" " " N y " " "$) = 0$

Veamos $k = N-1$ en $(*)$

$$2p_{N-1}^0 = \overset{0}{p_N^0} + p_{N-2}^0 = p_{N-2}^0 \Rightarrow p_{N-2}^0 = 2p_{N-1}^0$$

$k = N-2$

$2p_{N-2}^0 = p_{N-1}^0 + p_{N-3}^0 \underset{\substack{\text{(por lo} \\ \text{anterior)}}}{\Longrightarrow} 2 \cdot (2p_{N-1}^0) = p_{N-1}^0 + p_{N-3}^0$

$\Rightarrow p_{N-3}^0 = 3p_{N-1}^0$

y así sucesivamente se tiene hasta $k = 2$ que

$$p^0_{N-j} = j\, p^0_{N-1}$$

Haciendo cambio de variables $j = N - i$

$$\Rightarrow \quad p^0_i = (N-i)\, p^0_{N-1}$$

Veamos el último caso $k = 1$

$$2p^0_1 = p^0_0 + p^0_2 = \overset{=1}{p^0_0} + (N-2)\, p^0_{N-1}$$

$$\Rightarrow \quad 2(N-1)\, p^0_{N-1} = 1 + (N-2)\, p^0_{N-1}$$

$p^0_1 = (N-1)\, p^0_{N-1}$

$$\Rightarrow \quad p^0_{N-1} = \frac{1}{2(N-1)-(N-2)} = \frac{1}{N}.$$

$\therefore \ \forall i \in \{1, \dots, N-1\}$

$$p^0_i = (N-i)\, p^0_{N-1} = \frac{N-i}{N} = 1 - \frac{i}{N}$$

Entonces si $N \to +\infty$ $\quad p^0_i \to 1$

$\Rightarrow$ Si el jugador se quiere hacer infinitamente ~~[illegible]~~ rico entonces casi seguro va a perder todo.

$\boxed{P3}$ R_i: "TATÁN ESTÁ en la región i" $\quad i \in \{1,2\}$

I_j: "la intercepción ocurrió en el día j".

Notar que

$$\mathbb{P}(I_j \mid R_1) = p_1 = 1/2 \qquad \mathbb{P}(I_j \mid R_2) = p_2 = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{2}$$

(a) Nos piden

$$\mathbb{P}(R_1 \mid I_1) \overset{\text{BAYES}}{=} \frac{\mathbb{P}(I_1 \mid R_1)\cdot \mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(I_1)} \overset{\text{PROBAS TOTALES}}{=} \frac{\mathbb{P}(I_1 \mid R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(I_1 \mid R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(I_1 \mid R_2)\mathbb{P}(R_2)}$$

$$= \frac{1/2 \cdot 1/2}{1/2 \cdot 1/2 + 1/4 \cdot 1/2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(R_2 \mid I_1) = 1 - \mathbb{P}(R_1 \mid I_1) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(b) Sea E_n: "la primera intercepción fue el día n"

$$E_n = I_n \cap \underbrace{I_{n-1}^c \cap \dots \cap I_1^c}_{\substack{\text{No interceptan} \\ \text{los } n-1 \text{ primeros días.}}}$$

Nos piden

$$\mathbb{P}(R_1 \mid E_n) \overset{\text{BAYES}}{=} \frac{\mathbb{P}(E_n \mid R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(E_n)} \overset{\text{PROBAS TOTALES}}{=} \frac{\mathbb{P}(E_n \mid R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(E_n \mid R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(E_n \mid R_2)\mathbb{P}(R_2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(I_n \cap I_{n-1}^c \cap \dots \cap I_1^c \mid R_1)\,\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(I_n \cap I_{n-1}^c \cap \dots \cap I_1^c \mid R_1)\,\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(I_n \cap I_{n-1}^c \cap \dots \cap I_1^c \mid R_2)\,\mathbb{P}(R_2)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Independencia} \\ \text{entre los días}}}{=} \frac{\mathbb{P}(I_n \mid R_1) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(I_i^c \mid R_1) \cdot \mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(I_n \mid R_1) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(I_i^c \mid R_1)\,\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(I_n \mid R_2) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(I_i^c \mid R_2)\,\mathbb{P}(R_2)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cancel{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3^{n-1}}{4^n}} = \frac{1}{1 + \frac{3^{n-1}}{2^n}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(R_2 \mid E_n) = 1 - \mathbb{P}(R_1 \mid E_n) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{3^{n-1}}{2^n}} = \frac{1}{\frac{2^n}{3^{n-1}} + 1}$$

(c) Sea $R_i^{(j)}$: "TATÁN está en la región i al comienzo del día j".

$$\mathbb{P}(R_1^{(1)}) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(R_2^{(1)})$$

Sabemos que

$$\mathbb{P}(R_1^{(j+1)} \mid R_1^{(j)}) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(R_1^{(j+1)} \mid R_2^{(j)}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(R_2^{(j+1)} \mid R_1^{(j)}) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(R_2^{(j+1)} \mid R_2^{(j)}) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(R_1^{(2)}) = \mathbb{P}(R_1^{(2)} | R_1^{(1)}) \mathbb{P}(R_1^{(1)}) + \mathbb{P}(R_1^{(2)} | R_2^{(1)}) \mathbb{P}(R_2^{(1)})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(R_2^{(2)}) = \frac{5}{8} = 1 - \mathbb{P}(R_1^{(2)})$$

Por otro lado

$$\mathbb{P}(R_1^{(3)}) = \mathbb{P}(R_1^{(3)} | R_1^{(2)}) \mathbb{P}(R_1^{(2)}) + \mathbb{P}(R_1^{(3)} | R_2^{(2)}) \mathbb{P}(R_2^{(2)})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{11}{32}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(R_2^{(3)}) = 1 - \mathbb{P}(R_1^{(3)}) = \frac{21}{32}.$$

$\boxed{P4}$ Definamos $F_m = \bigcup_{n=1}^{m} E_n$. Claramente $F_m \subseteq F_{m+1}$

Como es una familia creciente de subconjuntos de Ω.

se tiene que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(F_m)$

Por otro lado

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(F_m) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{m} E_n\right)$$

no se sabe si son disjuntos $\leq$ $\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$ //

Para concluir usemos la desigualdad para E_n^c.

$$\left(\mathbb{P}(E_n) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(E_n^c) = 0 \right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n^c) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c\right) = 0 \rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1$$

V.A.

P1) $\Omega = \{ c, sc, ssc, sssc, \dots, \underbrace{ss\dots s}_{n-1 \text{ veces}}c, \underbrace{s\dots s}_{n \text{ veces}} \}$

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{c\}) = p$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\{sc\}) = (1-p)p$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(\{ssc\}) = (1-p)^2 p$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}(X=n-1) = \mathbb{P}(\{\underbrace{s\dots s}_{n-2 \text{ veces}}c\}) = (1-p)^{n-2} p$$

$$\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(\{\underbrace{s\dots s}_{n-1 \text{ veces}}c, \underbrace{s\dots s}_{n \text{ veces}}\}) = \underbrace{(1-p)^{n-1}p}_{\text{GANO}} + \underbrace{(1-p)^n}_{\text{NO GANO}}$$

$$= (1-p)^{n-1}(p+1-p)$$

$$= (1-p)^{n-1}$$

Notar que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m}\{X=i\}\right) \overset{\text{DISJUNTOS}}{=} \sum_{i=1}^{m}\mathbb{P}(X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1}(1-p)^{i-1}p + \underbrace{(1-p)^{m-1}}_{\text{CASO } i=m}$$

$$= p\sum_{i=0}^{m-2}(1-p)^{i} + (1-p)^{m-1}$$

$$= p\left(\frac{(1-p)^{m-1}-1}{(1-p)-1}\right) + (1-p)^{m-1}$$

$$= 1-(1-p)^{m-1} + (1-p)^{m-1} = 1$$

Recordar que

$$\sum_{k=m}^{M} r^k = \frac{r^{M+1}-r^m}{r-1}$$

La función de distribución (acumulada) está dada por

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ p & 1 \le t < 2 \\ p+p(1-p) & 2 \le t < 3 \\ \vdots & \\ 1 & m \le t \end{cases}$$

$\boxed{P2}$ $X \sim Geom(p) \implies \mathbb{P}(X=i) = (1-p)^{i-1}\, p \quad \forall i \geq 1$

Calculemos para l, entero positivo cualquiera, lo sgte.

$$\mathbb{P}(X > l) = 1 - \mathbb{P}(X \leq l)$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{l} \mathbb{P}(X = k)$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{l} (1-p)^{k-1} p = 1 - p \sum_{k=1}^{l} (1-p)^{k-1}$$
$$= 1 - p \sum_{k=0}^{l-1} (1-p)^{k} \overset{\text{geométrica}}{=} 1 - p\left(\frac{(1-p)^{l} - 1}{(1-p) - 1}\right)$$
$$= 1 + (1-p)^{l} - 1 = (1-p)^{l}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(X > m+k \mid X > k) = \frac{\mathbb{P}(X > m+k \wedge X > k)}{\mathbb{P}(X > k)}$$

$$\underset{m+k \geq k}{=} \frac{\mathbb{P}(X > m+k)}{\mathbb{P}(X > k)} \underset{\text{por lo anterior}}{=} \frac{(1-p)^{m+k}}{(1-p)^{k}} = (1-p)^{m}$$

$$= \mathbb{P}(X > m).$$