Pauta Auxiliar 9 MA3403
Probabilidades y Estadística

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Ángel Pardo, Alfredo Torrico

23 de Diciembre de 2011

recuperada el 3 de Enero de 2011

P1. Suponga que dispone de una mesa cuadrada, sobre la cual dibuja un círculo inscrito en ella. Luego lanza n objetos al azar sobre la mesa, y denota c_n la cantidad de ellos que cae dentro del círculo. Muestre que la cantidad $4c_n/n$ converge en probabilidad y casi seguramente a π cuando $n \to \infty$.

Sol. Sea X_i la variable aleatoria de Bernoulli asociada a si el i-ésimo objeto lanzado cae dentro del círculo, de modo que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes e idénticamente distribuidas con distribución de Bernoulli. Además

$$\mu := \mathbb{E}(X_i) = 1 \cdot \mathbb{P}(X_i = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{\text{área del círculo}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$$

Es claro además que $\mathbb{V}ar(X_i) < \infty$, y se tiene que $c_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Luego, por la Ley Débil de los Grandes Números,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu \iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| > \epsilon\right) = 0$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{c_n}{n} - \frac{\pi}{4}\right| > \epsilon\right) = 0 \qquad (\iff \frac{c_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\pi}{4})$$

y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{4c_n}{n} - \pi\right| > \epsilon\right) = 0 \qquad (\iff \frac{4c_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \pi).$$

Ahora, por Ley Fuerte de los Grandes Números,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{c.s.} \mu \iff \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \mu\right) = 1$$

i.e.,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = \frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad (\iff \frac{c_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \frac{\pi}{4}).$$

Finalmente

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{4c_n}{n} = 0\right) = 1 \qquad (\iff \frac{4c_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \pi).$$

Así $\frac{4c_n}{n}$ converge en probabilidad y casi seguramente a π cuando $n \to \infty$. □

P2. Se sabe que el tiempo medio de espera de la micro es de 5 minutos.

a) Dé una cota superior para la probabilidad de que la micro demore a lo menos 15 minutos.

Sol. Sea X la variable aleatoria que denota el tiempo de espera de la micro en minutos. Claramente X es no negativa, de modo que podemos usar la Desigualdad de Markov, i.e.,

$$\mathbb{P}(X \geq 15) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

□

b) Estudios posteriores publicados por las autoridades de transporte revelan que la desviación típica (i.e., la raíz de la varianza) del tiempo de espera es de 3 minutos. Con esta información adicional, entregue una nueva cota para la probabilidad de la parte anterior.

Sol. Sabemos que $\mathbb{E}(X) = 5$ y $\mathbb{V}ar(X) = 3^2 = 9$ son finitas y por lo tanto se puede usar la Desigualdad de Chebyshev. Para esto, se debe primero “acomodar” los valores de modo que queden en la forma de tal desigualdad. Así, se tiene que $X \geq 15$ ssi $X - 5 \geq 10$ y esto se tiene ssi $|X - 5| \geq 10$ pues $X \geq 0$. Así se obtiene que

$$\mathbb{P}(X \geq 15) = \mathbb{P}(|X-5| \geq 10) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{10^2} = \frac{9}{100}$$

Donde la desigualdad corresponde a la Desigualdad de Chebyshev. De esta manera, con la nueva información, se tiene que la probabilidad de que la micro demore más de 15 minutos es inferior al 9 %. □

c) Si espera la micro todos los días durante 36 días. Durante la espera (y solo durante la espera), usted escucha una discografía que dura exactamente 168 minutos, siempre retomándola en el instante en que la dejó el día anterior. ¿Cuál es la probabilidad de que no alcance a terminar la discografía? (Indicación: Utilizar el TLC).

Sol. Sea X_i la variable que denota el tiempo de espera (en minutos) del i-ésimo día, $i = 1, 2, \ldots, 36$. Como se escucha la discografía solo cuando se espera la micro, entonces se busca la probabilidad de $X_1 + X_2 + \cdots + X_{36} < 168$ (equivalentemente $X_1 + X_2 + \cdots + X_{36} \leq 168$, pues son v.a. continuas). Además sabemos que $\mathbb{E}(X_i) = 5$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{36} < 168) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{36} - 5 \cdot 36}{3\sqrt{36}} < \frac{168 - 5 \cdot 36}{3\sqrt{36}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{36} - 180}{18} < -\frac{12}{18}\right) \\
&\approx \mathbb{P}\left(\mathcal{Z} < -\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

Donde, por el Teorema Central del Límite, $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{36} - 180}{18} \approx \mathcal{Z}$, con $\mathcal{Z} \sim Normal(0,1)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_{36} < 168\right) &\approx \mathbb{P}\left(\mathcal{Z} < -\frac{2}{3}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\mathcal{Z} \leq -\frac{2}{3}\right) \\
&= \Phi\left(-\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

donde

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

es la distribución de una $Normal(0,1)$. Además, se puede usar la tabla de una normal estándar para obtener

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{Z} \leq -\frac{2}{3}\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{Z} > \frac{2}{3}\right) = 0{,}2514$$

Así, finalmente se obtiene que

$$\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_{36} < 168\right) \approx \Phi\left(-\frac{2}{3}\right) = 0{,}2514$$

de modo que existe cerca de un 25 % de probabilidad de no terminar la discografía entera en los 36 días. □

P3. A menudo se necesita estimar la disperción de una variable aleatoria X cuya esperanza y varianza se saben finitas, pero son desconocidas. Para ello es usual obtener de manera independiente varios valores de la variable aleatoria (i.e., tomar una muestra aleatoria simple), digamos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, y estimar la esperanza y la varianza por

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{y} \qquad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu}_n)^2$$

respectivamente.

a) Si $\mathbb{E}(X) = \mu$, observe que $(X_i - \hat{\mu}_n)^2 = ((X_i - \mu) - (\hat{\mu}_n - \mu))^2$ y muestre que

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\mu - \hat{\mu}_n)^2$$

Sol. Desarrollando se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu}_n)^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}((X_i - \mu) - (\hat{\mu}_n - \mu))^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\hat{\mu}_n - \mu)\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\mu}_n - \mu)^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\hat{\mu}_n - \mu)\frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + \frac{n}{n-1}(\hat{\mu}_n - \mu)^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - \frac{n}{n-1}(\mu - \hat{\mu}_n)^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i - \mu)^2 - (\mu - \hat{\mu}_n)^2\right)
\end{aligned}$$

Donde la penúltima igualdad se tiene puesto que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = \hat{\mu}_n - \mu$. □

b) Muestre que los estimadores $\hat{\mu}_n$ y $\hat{\sigma}_n^2$ son insesgados.

Sol. Para $\hat{\mu}_n$ se tiene que

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}_n) = \mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n}n \cdot \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X)$$

Donde la primera igualdad es por definición de $\hat{\mu}_n$, la segunda, por la linealidad de la esperanza, la tercera puesto que X_i son realizaciones de X de modo que tienen la misma distribución y las últimas son obvias. Así, $\mathbb{E}(\hat{\mu}_n) = \mathbb{E}(X)$ y como $\hat{\mu}_n$ es un estimador para $\mathbb{E}(X)$ se tiene entonces que $\hat{\mu}_n$ es insesgado.
Para $\hat{\sigma}_n^2$, usando la parte (a),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{\sigma}_n^2) &= \mathbb{E}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i - \mu)^2 - (\mu - \hat{\mu}_n)^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}((X_i - \mu)^2) - \mathbb{E}((\mu - \hat{\mu}_n)^2))\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}((X_i - \mu)^2) - \frac{n}{n-1}\mathbb{E}((\mu - \hat{\mu}_n)^2))
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(\hat{\mu}_n) &= \mathbb{V}ar(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(X_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(X) \\
&= \frac{n}{n^2}\mathbb{V}ar(X) = \frac{1}{n}\mathbb{V}ar(X)
\end{aligned}$$

Donde la primera igualdad es por definición de $\hat{\mu}_n$, la segunda, por independencia de la muestra y propiedades de la varianza, la tercera puesto que X_i son realizaciones de X de modo que tienen la misma distribución y las últimas son obvias. También se tiene que

$$\mathbb{V}ar(\mu - \hat{\mu}_n) = \mathbb{E}((\mu - \hat{\mu}_n)^2) - \mathbb{E}(\mu - \hat{\mu}_n)^2 = \mathbb{E}((\mu - \hat{\mu}_n)^2) - (\mathbb{E}(\mu) - \mathbb{E}(\hat{\mu}_n))^2 = \mathbb{E}((\mu - \hat{\mu}_n)^2)$$

de modo que

$$\mathbb{E}((\mu - \hat{\mu}_n)^2) = \mathbb{V}ar(\mu - \hat{\mu}_n) = \frac{1}{n}\mathbb{V}ar(X)$$

Finalmente,

$$\mathbb{V}ar(X_i - \mu) = \mathbb{E}((X_i - \mu)^2) - \mathbb{E}(X_i - \mu)^2 = \mathbb{E}((X_i - \mu)^2) - (\mathbb{E}(X_i) - \mathbb{E}(\mu))^2 = \mathbb{E}((X_i - \mu)^2)$$

y entonces

$$\mathbb{E}((X_i - \mu)^2) = \mathbb{V}ar(X_i - \mu) = \mathbb{V}ar(X_i) - \mathbb{V}ar(\mu) = \mathbb{V}ar(X_i) = \mathbb{V}ar(X)$$

Con esto, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{\sigma}_n^2) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}((X_i - \mu)^2) - \frac{n}{n-1}\mathbb{E}((\mu - \hat{\mu}_n)^2)) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}ar(X) - \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\mathbb{V}ar(X) \\
&= \frac{n}{n-1}\mathbb{V}ar(X) - \frac{1}{n-1}\mathbb{V}ar(X) = \frac{n-1}{n-1}\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{V}ar(X)
\end{aligned}$$

Así, $\mathbb{E}(\hat{\sigma}_n^2) = \mathbb{V}ar(X)$ y como $\hat{\sigma}_n^2$ es un estimador para $\mathbb{V}ar(X)$ se tiene entonces que $\hat{\sigma}_n^2$ es insesgado.
□

c) Justifique la elección del estimador $\hat{\sigma}_n^2$ estableciendo que $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}_n^2 = \sigma^2) = 1$, donde $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$.

Sol. Basta probar que

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}_n^2 \neq \sigma^2) = 0$$

Si se tiene que $\lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}_n^2 \neq \sigma^2$, entonces, por la parte (a), se tendría que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}_n^2 \neq \sigma^2 \iff & \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i - \mu)^2 - (\mu - \hat{\mu}_n)^2\right) \neq \sigma^2 \\
\implies & \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \neq \sigma^2 \\
& \quad \text{ó } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}(\mu - \hat{\mu}_n)^2 \neq 0 \\
\implies & \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \neq \sigma^2 \\
& \quad \text{ó } \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n \neq \mu
\end{aligned}$$

Y entonces

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}_n^2 \neq \sigma^2) \leq \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \neq \sigma^2 \text{ ó } \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n \neq \mu)$$
$$\leq \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \neq \sigma^2) + \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n \neq \mu)$$

Pero, en (b) se vio que $\mathbb{E}((X_i-\mu)^2) = \mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$ y se tiene que $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X) = \mu$. Así, por la Ley Fuerte de los Grandes Números se tiene que

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sigma^2) = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n = \mu) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu) = 1$$

luego

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \neq \sigma^2) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n \neq \mu) = 0$$

Finalmente

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}_n^2 \neq \sigma^2) \leq 0 + 0 = 0$$

y se concluye que

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}_n^2 = \sigma^2) = 1$$

□

P4. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0,\theta)$, donde θ es una constante positiva desconocida. Considere una muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de X.

a) Muestre que el estimador $\theta_0 := \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ del parámetro θ es insesgado y calcule su varianza.

Sol. Se tiene que

$$\mathbb{E}(\theta_0) = \mathbb{E}(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X) = 2\mathbb{E}(X)$$

Donde la primera igualdad es por definición de θ_0, la segunda, por la linealidad de la esperanza, la tercera puesto que X_i son realizaciones de X de modo que tienen la misma distribución y la última es obvia. Por otro lado, como $X \sim U(0,\theta)$, se tiene que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\theta - 0}{2} = \frac{\theta}{2}$$

y por lo tanto

$$\mathbb{E}(\theta_0) = 2\mathbb{E}(X) = 2\frac{\theta}{2} = \theta$$

y el estimador θ_0 es insesgado.

Por otro lado

$$\mathbb{V}ar(\theta_0) = \mathbb{V}ar(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}ar(X_i) = \frac{4}{n}\mathbb{V}ar(X)$$

Donde la primera igualdad es por definición de θ_0, la segunda, por independencia de la muestra y propiedades de la varianza, la tercera puesto que X_i son realizaciones de X de modo que tienen la misma distribución. Además, como $X \sim U(0,\theta)$, $\mathbb{V}ar(X) = \frac{(\theta-0)^2}{12}$ (calcular si no lo recuerda), se obtiene que

$$\mathbb{V}ar(\theta_0) = \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$$

□

b) Considere ahora el estimador $\theta_1 = \text{máx}\{X_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Entregue la función de distribución del estimador y calcule su sesgo. Encuentre $a \in \mathbb{R}$ tal que el estimador dado por $a\theta_1$ sea insesgado.

Sol. La función de distribución (acumulada) de θ_1 es

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \mathbb{P}(\theta_1 \leq t) \\ &= \mathbb{P}(\text{máx}\{X_i : i = 1, 2, \ldots, n\} \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_i \leq t,\ i = 1, 2, \ldots, n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X \leq t) \\ &= F_X(t)^n \\ &= \left(\frac{t-0}{\theta-0}\right)^n = \frac{t^n}{\theta^n} \end{aligned}$$

Esto es para $t \in [0, \theta]$; para $t < 0$, $F_1(t) = 0$ y para $t > \theta$, $F_1(t) = 1$. Entonces su densidad será $f_1(t) = n \cdot \frac{t^{n-1}}{\theta^n}$, para $t \in [0, \theta]$ y cero en otro caso.

El sesgo está dado por $|\mathbb{E}(\theta_1) - \theta|$. Calculamos la esperanza de θ_0 por definición,

$$\mathbb{E}(\theta_1) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_1(t) dt = \int_0^{\theta} tn \cdot \frac{t^{n-1}}{\theta^n} dt = \frac{n}{\theta^n} \left. \frac{t^{n+1}}{n+1} \right|_0^{\theta} = \frac{n\theta}{n+1}$$

Obteniendo que el sesgo es $|\mathbb{E}(\theta_1) - \theta| = \frac{\theta}{n+1}$.

Queremos ahora $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}(a\theta_1) = \theta$, i.e., $\theta = a\mathbb{E}(\theta_1) = a\frac{n\theta}{n+1}$. Sigue que $a = \frac{n+1}{n}$ y el estimador $\frac{n+1}{n}\theta_1$ es insesgado. □

c) Calcule la varianza del estimador insesgado obtenido en la parte anterior. En base a esto, compare la "eficiencia" de los estimadores θ_0 y $a\theta_1$. ¿Con cuál se quedaría?

Sol. La varianza del estimador insesgado de la parte (b) es

$$\mathbb{V}ar(a\theta_1) = a^2 \mathbb{V}ar(\theta_1) = a^2(\mathbb{E}(\theta_1^2) - \mathbb{E}(\theta_1)^2)$$

Como conocemos la distribución de θ_1, podemos calcular

$$\mathbb{E}(\theta_1^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_1(t) dt = \int_0^{\theta} t^2 n \cdot \frac{t^{n-1}}{\theta^n} dt = \frac{n}{\theta^n} \left. \frac{t^{n+2}}{n+2} \right|_0^{\theta} = \frac{n\theta^2}{n+2}$$

Sigue que

$$\mathbb{V}ar(a\theta_1) = a^2(\mathbb{E}(\theta_1^2) - \mathbb{E}(\theta_1)^2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2\right) = \cdots = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

□