

Prf Sabemos que $X_i \sim \text{Gamma}(\theta, \lambda)$, $\theta > 1$ conocido.

(a) El estimador de los momentos sale de igualar el primer momento teórico con el primer momento empírico.

$$\downarrow$$

$$\mathbb{E}(X_i) \stackrel{iid}{=} \mathbb{E}(X_n)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

$$\therefore \mathbb{E}(X_i) = \bar{X}$$

"

$$\frac{\theta}{\hat{\lambda}_{MH}}$$

, dando $\hat{\lambda}_{MH}$ el estimador de λ .
(θ es conocido)

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_{MH} = \frac{\theta}{\bar{X}}$$

Por otro lado el estimador de máxima verosimilitud sale de maximizar la función de verosimilitud dada por.

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n \left(\lambda \frac{e^{-\lambda x_i} (\lambda x_i)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} \right) \quad \forall x_i \geq 0.$$

En este caso maximizaremos c/r a λ (el cual queremos estimar)

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} (\lambda)^{n(\theta-1)} \prod_{i=1}^n (x_i)^{\theta-1}}{(\Gamma(\theta))^n}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\lambda^{m\theta} e^{-\lambda \sum_{i=1}^m x_i}}{\Gamma(\theta)} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\theta-1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\lambda^{m\theta} e^{-\lambda \sum_{i=1}^m x_i} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow m\theta \lambda^{m\theta-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^m x_i} - \lambda^{m\theta} \sum_{i=1}^m x_i e^{-\lambda \sum_{i=1}^m x_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m\theta}{\lambda} - \sum_{i=1}^m x_i = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_{MV} = \frac{\theta}{\sum_{i=1}^m x_i / m} = \frac{\theta}{\bar{x}} \quad \text{Estimador de max. verosimilitud (donde se alcanza el máximo).}$$

$$\therefore \text{los estimadores coinciden} \quad \hat{\lambda}_{MM} = \hat{\lambda}_{MV} = \frac{\theta}{\bar{x}}$$

(b) Por la ley fuerte de los grandes números se sabe que

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\text{C.S.}} \mu \quad \text{casi seguramente} \quad \text{donde } \mu = \overset{\text{iid}}{E}(x_i) = \frac{\theta}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\text{C.S.}} \frac{\theta}{\lambda}$$

$$\therefore \hat{\lambda}_{MV} = \hat{\lambda}_{MM} = \frac{\theta}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\text{C.S.}} \frac{\theta}{\theta/\lambda} = \lambda$$

(c) Muestre que $E(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda m \theta}{(m\theta - 1)}$, donde $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_{MV} = \hat{\lambda}_{MM}$

$$z = \sum_{i=1}^m x_i \sim \text{Gamma}(m\theta, 1)$$

$$E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{\theta}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i}\right) = E\left(\frac{\theta m}{z}\right)$$

$$= \theta E\left(\frac{1}{z}\right) = \theta m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z} \cdot \frac{\lambda e^{-\lambda z} (\lambda z)^{m\theta-1}}{\Gamma(m\theta)} \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(z) dz$$

$$= \theta m \int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda z} \lambda^{m\theta-1} z^{m\theta-2}}{\Gamma(m\theta)} dz$$

$$= \theta \lambda m \int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda z} \lambda^{m\theta-2} z^{m\theta-2}}{\Gamma(m\theta)} dz \quad (*)$$

Sabemos que

$$\Gamma(m\theta) = (m\theta - 1) \Gamma(m\theta - 1)$$

$$(*) = \frac{m \lambda \theta}{(m\theta - 1)} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda z} (\lambda z)^{m\theta-2}}{\Gamma(m\theta - 1)} dz}_{= 1}$$

(es la densidad de una gamma $(m\theta - 1, 1)$)

$$= \frac{m \lambda \theta}{(m\theta - 1)}$$

Sabemos que un estimador es inercial cuando

$$E(\hat{\mu}) = \mu$$

Por lo tanto si llamamos $\hat{\lambda} = \frac{(m\theta - 1) \hat{\lambda}}{m\theta}$ se tiene que

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{(n\theta-1)}{n\theta} \hat{\lambda}\right)$$

$$= \frac{n\theta-1}{n\theta} \cdot E(\hat{\lambda}) = \frac{n\theta-1}{n\theta} \cdot \frac{\lambda n\theta}{n\theta-1} = \lambda$$

$\Rightarrow \bar{X}$ es insesgado

$$\bar{X} = \frac{(n\theta-1)}{n\theta} \hat{\lambda} = \frac{(n\theta-1)}{n\theta} \cdot \frac{\theta}{\bar{X}} = \frac{(\theta - \frac{1}{n})}{\bar{X}}$$

Calculamos la varianza de $\bar{X}$

$$\text{Var}(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \underbrace{E^2(\bar{X})}_{=\lambda^2}$$

$$E(\bar{X}^2) = E\left(\frac{(\theta - \frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i)^2}\right) \overset{\substack{\uparrow \\ Z = \sum_{i=1}^n x_i \sim \text{Gamma}(n\theta, \lambda)}}}{=} E\left(\frac{n^2 (\theta - \frac{1}{n})^2}{Z^2}\right) = (n\theta-1)^2 E\left(\frac{1}{Z^2}\right)$$

Pero,

$$E\left(\frac{1}{Z^2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z^2} f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2} \frac{\lambda e^{-\lambda z} (\lambda z)^{n\theta-1}}{\Gamma(n\theta)} dz$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda z} (\lambda z)^{n\theta-3}}{\Gamma(n\theta)} dz \cdot \lambda^2$$

$$= \frac{\lambda^2}{(n\theta-1)(n\theta-2)} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda z} (\lambda z)^{n\theta-3}}{\Gamma(n\theta-2)} dz = \frac{\lambda^2}{(n\theta-1)(n\theta-2)}$$

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda z} (\lambda z)^{n\theta-3}}{\Gamma(n\theta-2)} dz}_{=1} \rightarrow \text{densidad de una gamma}(n\theta-2, \lambda)$$

$$\Rightarrow E(\bar{X}^2) = \frac{(n\theta - 1) \lambda^2}{(n\theta - 1)(n\theta - 2)}$$

$$\therefore \text{Var}(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - E^2(\bar{X})$$

$$= \frac{(n\theta - 1) \lambda^2}{(n\theta - 2)} - \lambda^2$$

$$= \frac{n\theta \lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^2 n\theta + 2 \lambda^2}{(n\theta - 2)} = \frac{\lambda^2}{n\theta - 2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Se sabe que un estimador es consistente cuando es
 insesgado y cumple que $\text{Var}(\bar{X}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow \bar{X}$ es consistente

P2 (a) Como la varianza es conocida y queremos un intervalo de confianza para μ entonces usamos el estadístico.

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Entonces buscamos $c > 0$ tq

$$P(-c \leq Z \leq c) = 1 - \alpha.$$

$$P(Z \leq c) - P(Z \leq -c) = 1 - \alpha. \quad (*)$$

Por simetría sabemos que $P(Z \leq -c) = P(Z \geq c) = P(Z > c)$
y además también se sabe que $P(Z \leq c) = 1 - P(Z > c)$

$$\therefore (*) \quad 1 - 2P(Z > c) = 1 - \alpha.$$

$$\Rightarrow P(Z > c) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow P(Z \leq c) = 1 - \frac{\alpha}{2} = \Phi(c)$$

$$\leftarrow \text{TCL, con } \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\Rightarrow c = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Entonces el intervalo de confianza está dado por

$$-c \leq Z \leq c$$

$$-\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \bar{x} - \sigma \frac{\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n}} \sigma$$

$\Rightarrow$ Para un nivel de $(1 - \alpha)\%$.

$$\mu \in \left[\bar{x} - \sigma \frac{\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n}} \sigma \right]$$

Notamos que cuando n es grande el intervalo se achica

Cuando la varianza σ^2 es muy grande el intervalo se agranda (lo contrario para cuando σ^2 es chico).

Por último si α es pequeño $1 - \frac{\alpha}{2} \approx 1 \approx \Phi(c)$

$\Rightarrow c$ es grande. $\Rightarrow$ el intervalo es más grande (el nivel de "exigencia" es mayor).

$\rightarrow 1 - \alpha \approx 1$
Pensarlo detenidamente!!

(b) Buscamos α tq

$$P(64 < \mu < 76) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{x} - 76 < \bar{x} - \mu < \bar{x} - 64) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\bar{x} - 76}{\sigma} \cdot \sqrt{n} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} < \frac{\bar{x} - 64}{\sigma} \cdot \sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

Por lo $\bar{x} = 70$

$n = 25$

$\sigma = 12$

$$\Rightarrow P\left(\frac{70 - 76.5}{12} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{70 - 64.5}{12}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(-2.5 \leq z \leq 2.5) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2P(z > 2.5) = 1 - \alpha$$

(simetría)

$$\Rightarrow P(z > 2.5) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \text{(TABLA)} \quad P(z > 2.5) = 0.0062 = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0.0124}$$

P3 $n=16$ $\bar{X}_{16} = 7$ $S_{n-1}^2 = 0,9$ donde

$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad \text{con } n=16$$

estimador insesgado de la varianza.

(a) Para μ desconocido y σ^2 desconocido. Trabajamos con el estadístico

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_{n-1}^2/n}} \sim t_{n-1} \quad (\text{Distribución t-Student con } n-1 \text{ grados de libertad})$$

Como esta distribución es simétrica buscamos $c > 0$ tq

$$P(-c \leq T \leq c) = 1 - \alpha = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P(T \leq c) - P(T \leq -c) = 1 - \alpha = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(T \geq c) - P(T \geq c) = 0,95$$

(Simetría)

$$\Leftrightarrow P(T \leq -c) \quad \Leftrightarrow P(T \geq c) = 0,025$$

$P(T \leq -c)$

$P(T \geq c)$

Usando la tabla obtenemos $c = 2,131$

$\Rightarrow$ Con probabilidad 0,95 $[-c, c]$ cubre a T

$$\Leftrightarrow T \in [-2,131, 2,131]$$

$$\Leftrightarrow -2,131 \leq T \leq 2,131$$

$$\Leftrightarrow -2,131 \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_{n-1}^2/n}} \leq 2,131$$

$$\Leftrightarrow \bar{X}_{16} - c \sqrt{\frac{s_{n-1}^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_{16} + c \sqrt{\frac{s_{n-1}^2}{n}}$$

$$\Leftrightarrow 7 - 2.131 \sqrt{\frac{0.9}{16}} \leq \mu \leq 7 + 2.131 \sqrt{\frac{0.9}{16}}$$

$$\Leftrightarrow \mu \in \left[7 - 2.131 \sqrt{\frac{0.9}{16}}, 7 + 2.131 \sqrt{\frac{0.9}{16}} \right]$$

(b) Para σ^2 desconocido manner el sigle estadístico.

$$S = \frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad (\text{Chi-cuadrado de } n-1 \text{ grados de libertad})$$

Como esta distribución no es simétrica buscamos $c > 0$ y $d > 0$ tq

$$P(S \in [c, d]) = 1 - \alpha = 0.95$$

Imponemos que se "repartan las probabilidades", es

$$\text{decir, } P(S \leq c) = P(S \geq d) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow P(S > c) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$\Rightarrow \text{Por tabla } c = 6.26$$

$$\text{Por otro lado } P(S > d) = 0.025$$

$$\Rightarrow d = 27.5$$

(TABLA)

$\therefore$ Con proba 0.95 $[6.26, 27.5]$ sobre a S.

$$\Leftrightarrow S \in [6.26, 27.5]$$

$$\Leftrightarrow 6.26 \leq S \leq 27.5$$

$$\Leftrightarrow 6.26 \leq \frac{(n-1) S_{n-1}^2}{S^2} \leq 27.5$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1) S_{n-1}^2}{27.5} \leq S^2 \leq \frac{(n-1) S_{n-1}^2}{6.26}$$

$$\Leftrightarrow S^2 \in \left[\frac{15 \cdot 0.9}{27.5}, \frac{15 \cdot 0.9}{6.26} \right]$$

(c) Suponiendo que $\sigma^2 = 1$. Como la varianza ahora es conocida y queremos un intervalo para la media entonces usamos el sigto. estadístico

$$Z = \frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Como la normal es simétrica, entonces buscamos

$c > 0$ tq

$$P(-c \leq Z \leq c) = 0.95 = 1 - \alpha$$

$$P(Z > c) = 0.025$$

$\Leftrightarrow$
(SIMETRÍA)

$$1 - 2P(Z > c) = 0.95 \Leftrightarrow$$

$$c = 1.96$$

$\Rightarrow$
(TABLA)

$\Rightarrow$ con proba 0.95, el intervalo $[-1.96, 1.96]$ contiene a Z .

$$\Leftrightarrow -1.96 \leq z \leq 1.96$$

$$\Leftrightarrow -1.96 \leq \frac{\bar{X}_{16} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96$$

$$\Leftrightarrow \bar{X}_{16} - \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_{16} + \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \mu \in \left[7 - \frac{1.96}{4}, 7 + \frac{1.96}{4} \right]$$

(d) Queremos disminuir en un 20% el intervalo anterior conservando el nivel de confianza $\Rightarrow c = 1.96$

Sea $\bar{n}$ el tamaño deseado, queramos entonces

$$\underbrace{\left(7 + \frac{1.96}{4} - \left(7 - \frac{1.96}{4} \right) \right)}_{\text{TAMAÑO INTERVALO}} \cdot 0.8 = \left(7 + \frac{1.96}{\sqrt{\bar{n}}} - \left(7 - \frac{1.96}{\sqrt{\bar{n}}} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\bar{n}} = \frac{4}{0.8} = 5 \Rightarrow \boxed{\bar{n} = 25}$$

P4) Calcular.

$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

$$\text{donde } n = 7 \quad \bar{x}_n = 2,0.$$

$$\Rightarrow S_{n-1}^2 = \frac{39,52}{6}$$

Entonces hacemos el estadístico

$$S = \frac{(n-1) S_{n-1}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

y buscamos $c, d > 0$ tal que

$$P(S \in [c, d]) = 1 - \alpha = 0,90$$

Imponemos

$$P(S \leq c) = P(S \geq d) = \frac{\alpha}{2} = 0,05$$

$$\begin{aligned} \bullet P(S \leq c) &= 0,05 \Rightarrow \\ P(S > c) &= 0,95 \\ \Rightarrow c &= 1,635 \\ \text{(TABLA)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(S \geq d) &= P(S > d) = 0,05 \\ \Rightarrow d &= 12,59 \\ \text{(TABLA)} \end{aligned}$$

con probabilidad 0,9 ~~sea~~ $[c, d]$ cubra a S

$$\Leftrightarrow c \leq S \leq d \Leftrightarrow 1,635 \leq S \leq 12,59$$

$$\Leftrightarrow 1,635 \leq \frac{(n-1) S_{n-1}^2}{\sigma^2} \leq 12,59$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1) s_{n-1}^2}{12,59} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) s_{n-1}^2}{1,635}$$

$$\Leftrightarrow \frac{39,52}{12,59} \leq \sigma^2 \leq \frac{39,52}{1,635}$$

$n-1=6$

Intervalo de confianza en

$$\left[\frac{39,52}{12,59}, \frac{39,52}{1,635} \right]$$