

Auxiliar 10 MA3403: Estimadores e Intervalos de Confianza

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Angel Pardo, Alfredo Torrico.

P1. Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s proveniente de una $\text{gama}(\theta, \lambda)$, donde $\theta > 1$ es conocido.

- (a) Muestre que los estimadores de λ del método de los momentos y el de máxima verosimilitud coinciden con $\hat{\lambda} = \theta/\bar{X}$. Recuerde que la esperanza de una variable $\text{gama}(\theta, \lambda)$ es θ/λ , y su densidad es

$$\frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} 1_{[0, \infty)}(x).$$

- (b) Concluya que $\hat{\lambda}$ converge casi seguramente a λ cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente.
- (c) Muestre que la esperanza de $\hat{\lambda}$ es $\lambda n \theta / (n \theta - 1)$ y modifíquelo para obtener un estimador insesgado $\bar{\lambda}$. Suponiendo $\theta > 2$, calcule la varianza de $\bar{\lambda}$ y muestre que es un estimador consistente. **Indicación:** utilice el hecho que $\sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución $\text{gama}(n\theta, \lambda)$.

P2. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 conocido. Suponga que tiene una muestra X_1, \dots, X_n .

- (a) Construya un intervalo de confianza para μ a nivel $(1 - \alpha)$. Analice qué sucede frente a variaciones en los parámetros n, σ, α .
- (b) Suponga que desea estudiar el valor de la media μ . Ud. sabe que $\bar{X} = 70$. ¿Qué nivel de confianza le da el intervalo $(64, 76)$, si $n = 25$ y $\sigma = 12$?

P3. La duración de unas determinadas baterías es una variable aleatoria $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con parámetros desconocidos. Se prueban 16 baterías, obteniendo una duración promedio de 7,0 y con s_{n-1}^2 igual a 0,9.

- (a) Encontrar un intervalo de confianza al 95% para μ .
- (b) Encontrar un intervalo de confianza al 95% para σ^2 .
- (c) Suponga que se sabe que la varianza real es $\sigma^2 = 1$. ¿Cuál es el intervalo de confianza para μ en este caso?
- (d) Si se desea reducir un 20% el largo del intervalo anterior, manteniendo el nivel de confianza, ¿cuántas adicionales se deberían probar?

P4. Se desea estudiar la variabilidad de la temperatura mínima diaria (en grados Celsius) durante la primera semana de invierno. Se obtuvieron los datos descritos en la siguiente tabla:

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
5,0	2,4	-1,0	2,6	4,0	-2,0	3,0

Suponiendo que los datos conforman una m.a.s. proveniente de una normal, obtenga un intervalo de confianza para la varianza σ^2 al nivel 90%.