Auxiliar 9 MA3403
Probabilidades y Estadística

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Ángel Pardo, Alfredo Torrico
23 de Diciembre de 2011

SE ADJUNTA UN RESUMEN CON LOS TEOREMAS LÍMITES

P1. Suponga que dispone de una mesa cuadrada, sobre la cual dibuja un círculo inscrito en ella. Luego lanza n objetos al azar sobre la mesa, y denota c_n la cantidad de ellos que cae dentro del círculo. Muestre que la cantidad $4c_n/n$ converge en probabilidad y casi seguramente a π cuando $n \to \infty$.

P2. Se sabe que el tiempo medio de espera de la micro es de 5 minutos.

a) Dé una cota superior para la probabilidad de que la micro demore a lo menos 15 minutos.

b) Estudios posteriores publicados por las autoridades de transporte revelan que la desviación típica (i.e., la raíz de la varianza) del tiempo de espera es de 3 minutos. Con esta información adicional, entregue una nueva cota para la probabilidad de la parte anterior.

c) Si espera la micro todos los días durante 36 días. Durante la espera (y solo durante la espera), usted escucha una discografía que dura exactamente 168 minutos, siempre retomándola en el instante en que la dejó el día anterior. ¿Cuál es la probabilidad de que no alcance a terminar la discografía? (Indicación: Utilizar el TLC).

P3. A menudo se necesita estimar la disperción de una variable aleatoria X cuya esperanza y varianza se saben finitas, pero son desconocidas. Para ello es usual obtener de manera independiente varios valores de la variable aleatoria (i.e., tomar una muestra aleatoria simple), digamos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, y estimar la esperanza y la varianza por

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{y} \qquad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu}_n)^2$$

respectivamente.

a) Si $\mathbb{E}(X) = \mu$, observe que $(X_i - \hat{\mu}_n)^2 = ((X_i - \mu) - (\hat{\mu}_n - \mu))^2$ y muestre que

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\mu - \hat{\mu}_n)^2$$

b) Muestre que los estimadores $\hat{\mu}_n$ y $\hat{\sigma}_n^2$ son insesgados.

c) Justifique la elección del estimador $\hat{\sigma}_n^2$ estableciendo además que $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}_n^2 = \sigma^2) = 1$

P5. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, \theta)$, donde θ es una constante positiva desconocida. Considere una muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de X.

a) Muestre que el estimador $\theta_0 := \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ del parámetro θ es insesgado y calcule su varianza.

b) Considere ahora el estimador $\theta_1 = \max\{X_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Entregue la función de distribución del estimador y calcule su sesgo. Encuentre $a \in \mathbb{R}$ tal que el estimador dado por $a\theta_1$ sea insesgado.

c) Calcule la varianza del estimador insesgado obtenido en la parte anterior. En base a esto, compare la "eficiencia" de los estimadores θ_0 y $a\theta_1$. ¿Con cuál se quedaría?

Resumen de Teoremas Límites

Desigualdad de Markov Sea X una variable aleatoria no negativa, i.e., $\mathbb{P}(X < 0) = 0$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\epsilon}$$

Desigualdad de Chebyshev Sea X una variable aleatoria de esperanza y varianza finita. Entonces, para todo $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{\epsilon^2}$$

Es más, para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^p)}{\epsilon^p}$$

Ley de los Grandes Números - versión Débil Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Digamos todas con esperanza μ y varianza σ^2. Entonces, para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \epsilon\right) = 0.$$

Anotamos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$$

y decimos que la convergencia es en *probabilidad*.

Ley de los Grandes Números - versión Fuerte Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con esperanzas $\mathbb{E}(X_n) = 0$ y varianza $\mathbb{V}ar(X_n) = \sigma_n^2$. Supongamos además que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sigma_n^2}{i^2} < \infty$. Entonces,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\right) = 1.$$

Anotamos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{c.s.} \mu$$

y decimos que la convergencia es *casi segura* (c.s.).

Teorema Central del Límite Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Digamos todas con esperanza μ y varianza σ^2. Entonces, la distribución de la variable

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)$$

converge a la distribución de una $Normal(0,1)$, i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \leq t\right) = \Phi(t)$$

donde

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

es la distribución de una $Normal(0,1)$.