Ingeniería Matemática

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

MA3403-3
Probabilidades y Estadística
Primavera 2011

Guía ejercicios 3

1. Se sabe que el valor esperado del puntaje que obtiene un alumno en el examen final de un ramo es de 75.

a) Dé una cota superior de la probabilidad que el puntaje sea mayor que 85.

b) Suponga de aquí en adelante que se sabe que la varianza es 25. ¿Qué puede decirse sobre la probabilidad de que el puntaje obtenido por el alumno esté entre 65 y 85?

c) ¿Cuántos alumnos tienen que dar el examen para asegurar que, con probabilidad de al menos un 99 %, el promedio de notas esté entre 70 y 80? Obtenga un resultado sin utilizar el teorema del límite central, y otro utilizándolo.

2. Un astrónomo quiere conocer la distancia d (en años luz) que hay desde la Tierra a una lejana estrella. Para medir esta distancia el astrónomo dispone un instrumento adecuado, pero debido a variaciones en las condiciones atmosféricas, el valor obtenido en cada medición no corresponde a la distancia exacta, sino a una variable aleatoria con esperanza d y varianza 4. Por esta razón, el astrónomo planea tomar n mediciones independientes, y estimar d usando el promedio. ¿Cuál es el mínimo valor de n tal que, con probabilidad de al menos un 95 %, su estimación tiene un error de a lo más $\pm 0{,}5$ años luz? Obtenga un resultado utilizando la desigualdad de Chebyshev, y otro aproximando con el TCL.

3. Se sabe que el tiempo medio de espera de la micro es de 5 minutos.

a) Entregue una cota superior para la probabilidad de que la micro demore más de 15 minutos.

b) Estudios posteriores publicados por las autoridades de transporte revelan que la raíz de la varianza del tiempo de espera es de 3 minutos. Con esta información adicional, entregue una nueva cota para la probabilidad de la parte anterior.

c) Usted espera la micro todos los días durante 36 días. Durante la espera, usted escucha la discografía de su grupo favorito, que dura exactamente 168 minutos, siempre retomándola en el instante en que la dejó el día anterior. ¿Cuál es la probabilidad que usted no alcance a terminar la discografía? Utilice el TCL.

4. Suponga que usted dispone de una mesa cuadrada, sobre la cual dibuja un círculo inscrito en ella. Luego, usted lanza n objetos al azar sobre la mesa, y denota c_n la cantidad de ellos que cae dentro del círculo. Muestre que la cantidad $4c_n/n$ converge en probabilidad y casi seguramente a π cuando $n \to \infty$.

5. Sea X variable aleatoria binomial con parámetros n y p.

a) Sean $\hat{p}_1 = X/n$ y $\hat{p}_2 = (X+1)/(n+2)$ estimadores de p. Calcule $\mathrm{ECM}(\hat{p}_1)$ y $\mathrm{ECM}(\hat{p}_2)$. ¿Para qué valores de p es mejor $\hat{p}_2$ de acuerdo al criterio del error cuadrático medio?

b) Sea $\hat{\sigma}^2 = X(1-X/n)$ un estimador de $\sigma^2 = \mathrm{var}(X)$. Muestre que $\hat{\sigma}^2$ es sesgado y modifíquelo para obtener un estimador insesgado de σ^2.

6. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de una distribución con esperanza μ y considere

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \bar{X}^2.$$

Muestre que

$$\begin{aligned} s_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right) - (\bar{X} - \mu)^2. \end{aligned}$$

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. con distribución común Poisson(λ). Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ, calcule su esperanza y varianza, y muestre que este estimador es consistente.

8. El tiempo que transcurre entre cada llamada recibida en una central de atención telefónica sigue una distribución exponencial de parámetro λ desconocido. Se toma una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ de estos tiempos.

a) Obtenga estimadores para λ usando el método de los momentos y el método de máxima verosimilitud.

b) Muestre que estos estimadores convergen casi seguramente a λ cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente.

9. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. con densidad común dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Encuentre un estimador $\hat{\theta}_1$ mediante el método de los momentos.

b) Encuentre un estimador $\hat{\theta}_2$ mediante el método de máxima verosimilitud.

c) Modifique $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ para que sean insesgados.

10. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. proveniente de una Gamma(θ, λ), donde $\theta > 1$ es conocido.

a) Muestre que los estimadores de λ del método de los momentos y el de máxima verosimilitud coinciden con $\hat{\lambda} = \theta/\overline{X}$.

b) Concluya que $\hat{\lambda}$ converge casi seguramente a λ cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente.

c) Muestre que la esperanza de $\hat{\lambda}$ es $\lambda n\theta/(n\theta-1)$ y modifíquelo para obtener un estimador insesgado $\tilde{\lambda}$. Suponiendo $\theta > 2$, calcule la varianza de $\tilde{\lambda}$ y muestre que es un estimador consistente. *Indicación:* utilice el hecho que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene distribución Gamma$(n\theta, \lambda)$.

11. El promedio de los puntajes obtenidos por 16 personas en una prueba es de 540, y la desviación estándar (i.e., la raíz del estimador insesgado de la varianza) es de 50. Asumiendo que el puntaje tiene distribución normal, construya un intervalo de confianza al 95 % para la esperanza μ.

12. Se lanza una moneda 25 veces, obteniendo la siguiente secuencia:

$$SSCCCSCCSSCSSCCSCCSCSSSCC.$$

Aproximando con el TCL, obtenga un intervalo de confianza para la probabilidad de cara p al 90 %.

13. En un laboratorio se desea estudiar la variabilidad de las mediciones tomadas en un complejo experimento. Se tomaron 6 mediciones:

$$9{,}54 \quad 9{,}61 \quad 9{,}32 \quad 9{,}48 \quad 9{,}70 \quad 9{,}26.$$

Suponiendo que ellas provienen de una distribución normal, obtenga un intervalo de confianza de la varianza σ^2 al nivel 90 %.

14. Se desea estudiar la variabilidad de la temperatura mínima diaria (en grados Celsius) durante la primera semana de invierno. Se obtuvieron los datos descritos en la siguiente tabla:

L	M	M	J	V	S	D
5,0	2,4	−1,0	2,6	4,0	−2,0	3,0

Suponiendo que los datos conforman una m.a.s. proveniente de una normal, obtenga un intervalo de confianza para la varianza σ^2 al nivel 90 %.

15. La duración de unas determinadas baterías es una variable aleatoria $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con parámetros desconocidos. Se prueban 16 baterías, obteniendo una duración promedio de 7,0 y con s^2 igual a 0,9.

a) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para σ^2.

c) Suponga que se sabe que la varianza real es $\sigma^2 = 1$. ¿Cuál es el intervalo de confianza para μ en este caso?

d) Si se desea reducir un 20 % el largo del intervalo anterior, manteniendo el nivel de confianza, ¿cuántas baterías adicionales se deberían probar?

16. Un productor afirma que al menos el 20 % del público prefiere su producto. Se toma una muestra de 100 personas para verificar su afirmación. Con $\alpha = 0{,}05$, ¿cuál es la mínima cantidad de personas que prefieren el producto de manera que no haya suficiente evidencia para rechazar la afirmación del productor?

17. Para una distribución normal con esperanza μ y varianza $\sigma^2 = 25$, se desea realizar un test de las hipótesis $H_0 : \mu = 10$ versus $H_1 : \mu = 5$. Encuentre el tamaño n de la muestra tal que el test más potente tenga $\alpha = \beta = 0{,}025$, donde α y β son la probabilidad del error de tipo I y II, respectivamente.

18. Suponga que Y representa una única observación proveniente de una distribución con densidad dada por

$$f(y) = \begin{cases} \theta y^{\theta-1}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado $\theta_1 > 1$, encuentre la región de rechazo del test más potente a nivel α para la hipótesis nula $\theta = 1$ versus la hipótesis alternativa $\theta = \theta_1$. ¿Es uniformemente más potente? Explique.

19. El voltaje de salida de un cierto circuito eléctrico debería ser 130 de acuerdo a las especificaciones técnicas. Se toma una muestra de 40 mediciones independientes del voltaje de este circuito, y se obtiene un promedio de 128,6 y una desviación estándar (es decir, la raíz del estimador insesgado de la varianza) de 2,1. Realice un test a nivel 5 % para la hipótesis de que la esperanza del voltaje es igual a 130 versus la alternativa de que es menor estricto que 130. ¿Cuál es el p-valor del test?

20. El dueño de una revista afirma que, de acuerdo a la experiencia de años anteriores, el 60 % de las personas suscritas a la revista renuevan su suscripción. En una muestra de 200 personas con suscripción, 108 de ellas la renovaron el último año. ¿Cuál es el p-valor asociado al test de que la proporción de renovaciones del último año es distinta a la que indica la experiencia?

21. Se afirma que el 2 % de los conductores olvida su licencia de conducir. Se toma una muestra de 100 conductores, y se observa que todos andan trayendo su licencia.

a) ¿Cuál es el p-valor del test que contrasta la afirmación con la hipótesis de que menos del 2 % de los conductores olvidan su licencia?

b) Para $\alpha = 2{,}28\,\%$, ¿cuál es la máxima cantidad de conductores adicionales que traen su licencia tal que la afirmación no se rechaza?