



CONTROL 2

12 de diciembre de 2011

Tiempo: 3 horas

- P1.** a) (3,0 pts.) Un estudiante debe llegar a su clase de las 8:30, para lo cual espera un autobús en el paradero. El autobús que pasa a las 7:30 tarda 40 minutos en llegar a la facultad, pero el autobús de las 7:40 tarda 50 minutos. Si el estudiante no alcanza el autobús de las 7:40, debe tomar el colectivo de las 7:45, que en 35 minutos lo deja en la facultad. Si la hora de llegada del estudiante al paradero se distribuye uniformemente entre las 7:25 y las 7:45, ¿cuál es el valor esperado de la hora de llegada a su clase?
- b) (3,0 pts.) Se dispone de una urna con N bolitas numeradas de 1 a N . Se extraen bolitas con reposición de manera independiente hasta que haya salido cada bolita al menos una vez. Sea X la variable que denota la cantidad total de extracciones realizadas, y sea X_k la cantidad de extracciones desde la vez $k - 1$ que aparece una bolita que no había salido antes (excluyendo esa extracción) hasta la siguiente vez que aparece una bolita que no ha salido antes (incluyendo esa extracción), para $k = 1, \dots, N$. Deduzca la distribución de cada X_k , y obtenga una expresión para $\mathbb{E}(X)$.
- P2.** Sea X variable aleatoria con distribución *chi-cuadrado con n grados de libertad*, anotado $X \sim \chi_n^2$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

donde $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty e^{-z} z^{\theta-1} dz$ es la función Gamma.

- a) (1,5 pts.) Muestre que la f.g.m. de X es $M_X(t) = (1 - 2t)^{-n/2}$ para $t < 1/2$.
- b) (1,5 pts.) Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\text{var}(X)$.
- c) (1,5 pts.) Si Y es una variable normal estándar, muestre que $Y^2 \sim \chi_1^2$. Utilice el hecho que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- d) (1,5 pts.) Concluya que si X_1, \dots, X_n son normales estándar independientes, entonces $X_1^2 + \dots + X_n^2$ tiene distribución χ_n^2 . *Indicación:* utilice las propiedades de la f.g.m.
- P3.** a) Sean X e Y independientes con distribución normal estándar. Definimos $U = X$ y $V = X/Y$.
- 1) (1,5 pts.) Muestre que la función de densidad conjunta de U y V es
- $$f_{U,V}(u, v) = \frac{|u| e^{-u^2(1+1/v^2)/2}}{2\pi v^2}.$$
- 2) (1,5 pts.) Muestre que V tiene distribución de Cauchy, es decir, su densidad es $f_V(v) = 1/[\pi(1+v^2)]$.
- b) La cantidad de llamadas telefónicas recibidas en una empresa durante t horas es una variable Poisson(μt). Se produce una falla en el sistema telefónico, durante la cual las llamadas recibidas no pueden ser atendidas. La duración de la falla es una variable exponencial de parámetro λ . Sea X la cantidad de llamadas no atendidas durante la falla.
- 1) (2,0 pts.) Utilizando esperanzas condicionales, calcule $\mathbb{E}(X)$.
- 2) (1,0 pts.) Para $k = 0, 1, \dots$, calcule $\mathbb{P}(X = k)$. Concluya que $X + 1$ es una variable geométrica de parámetro $p = \lambda/(\lambda + \mu)$. Obtenga nuevamente $\mathbb{E}(X)$. *Indicación:* utilice la regla de probabilidades totales; para calcular la integral, construya la densidad de una variable Gamma adecuada.