Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Ingeniería Matemática
8 de Diciembre de 2011

Auxiliar ? MA3403: Extra C2

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Angel Pardo, Alfredo Torrico.

P1. El arancel mensual de una determinada carrera universitaria asciende a \$60. Si el ingreso per cápita mensual de la familia de un estudiante es inferior a \$50, se le asigna 100% de beca; si el ingreso per cápita está entre \$50 y \$80, se le asigna 50% de beca; y si está entre \$80 y \$100, se asigna 25%. En otro caso, no se asigna beca. Calcule el valor esperado de la beca mensual asignada a un estudiante escogido al azar, suponiendo que el ingreso per cápita mensual de la familia se distribuye uniformemente en el intervalo [\$25,\$175].

P2. Suponga que un haz de luz (de una linterna) se hace girar alrededor de su centro, que se encuentra en la coordenada (0,1). Cuando la linterna ha dejado de girar, se denotará a X la variable aleatoria que describe la coordenada de la intersección del haz con el eje x. Si el haz no está apuntando hacia el eje x, se repite el experimento). El punto X está determinado por el ángulo θ que se forma entre la linterna y el eje y, que a partir de la experiencia física parece estar distribuido uniformemente entre $\pi/2$ y $-\pi/2$. Determine la función de densidad de X, y explique por qué no tiene esperanza.

P3. Sea X una variable aleatoria con distribución de Laplace de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) Muestre que la función generadora de momentos de X es $M_X(t) = e^{\mu t}/(1-b^2t^2)$ para $|t| < 1/b$.

(b) Calcule la esperanza y varianza de X.

(c) Suponiendo que $\mu = 0$, calcule la densidad de $|X|$. ¿Qué variable conocida es $|X|$?

(d) Sean $Y_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $Y_2 \sim \exp(\lambda_2)$ variables independientes. Pruebe que $\lambda_1 Y_1 - \lambda_2 Y_2$ tiene distribución de Laplace con parámetros $\mu = 0$ y $b = 1$. **Indicación:** calcule las densidades de $\lambda_1 Y_1$ y $-\lambda_2 Y_2$ y calcule la densidad de su suma utilizando una propiedad adecuada.

P4. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2y^2} & x \geq 1, y \geq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Se definen las variables aleatorias $U = XY$, $V = X/Y$.

(a) Muestre que la densidad conjunta de U y V es $f_{U,V}(u,v) = 1/(2u^2v)$ para $0 < 1/u \leq v \leq u$ y 0 en otro caso.

(b) Encuentre las densidades marginales de U y V.

P5. Suponga que la densidad conjunta de X e Y está dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & sino \end{cases}$$

Calcular $\mathbb{P}(X > 1 | Y = y)$.