

P1

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Bolita } i \text{ es blanca} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$P(X_i = 1) = \frac{m}{N}$$

Nº esperado de bolitas blancas al sacar n

$$= E(X_1 + \dots + X_n)$$

$$= E(X_1) + \dots + E(X_n)$$

↑
linealidad

$$\rightarrow E(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0)$$

$$= \frac{m}{N}$$

$$= \boxed{m \cdot \frac{m}{N}}$$

P2

(a) A extrae k_A y B extrae k_B .

Supongamos que A ya sacó sus cartas

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{La carta } i \text{ de B es una de A} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$P(X_i) = \frac{\text{CASOS FAVORABLES}}{\text{CASOS TOTALES}} = \frac{k_A}{n}$$

linealidad

$$\therefore \text{Nº ESPERADO DE CARTAS IGUALES} = E(X_1 + \dots + X_{k_B}) \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{i=1}^{k_B} E(X_i)$$

Pero $E(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0)$
 $= \frac{k_A}{m}$

$\therefore$ N° ESPERADO CARTAS IGUALES $= \frac{k_A}{m} \cdot \sum_{i=1}^{k_B} 1 = \frac{k_A k_B}{m}$

(b) N° ESPERADO CARTAS DISTINTAS $=$ N° ESPERADO TOTAL DE A $+$ N° ESPERADO TOTAL DE B $-$ 2 · N° ESPERADO DE CARTAS IGUALES

RECORDAR QUE A y B TIENEN LAS MISMAS CARTAS (se cuentan 2 veces)

$$= k_A + k_B - 2 \frac{k_A k_B}{m}$$

$$= \frac{1}{m} (k_A \cdot m + k_B \cdot m - 2 k_A k_B)$$

P31 Probar que $\Gamma(k) = (k-1)!$ $k \in \mathbb{N}$ (Verifiquen uds. en un cálculo simple de integrales, ver por inducción)

Ahora probemos por inducción que si $X_1, \dots, X_n \sim \exp(\lambda)$ i.i.d. $\Rightarrow X_1 + \dots + X_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$

Caso base $n=2$ | $X_1, X_2 \sim \exp(\lambda)$ indep.

$$f_{X_1+X_2}(t) = (f_{X_1} * f_{X_2})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t-u) f_{X_2}(u) du$$

Fórmula de convolución

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(t-u)} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t-u) \lambda e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(u) du$$

$$\begin{aligned} & \swarrow \quad t-u \geq 0 \quad \text{y} \quad u \geq 0 \rightarrow 0 \leq u \leq t \\ & = \lambda^2 \int_0^t e^{-\lambda t} du = \lambda^2 e^{-\lambda t} t \end{aligned}$$

y como $\Gamma(z) = (z-1)! = 1$,

$$\Rightarrow f_{X_1+X_2}(t) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda t} t}{\Gamma(2)} \Rightarrow X_1+X_2 \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$$

$n \Rightarrow n+1$ | Suponemos que $X_1 + \dots + X_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$

P.D.Q.: $X_1 + \dots + X_n + X_{n+1} \sim \text{Gamma}(n+1, \lambda)$

Sea $Y = X_1 + \dots + X_n$.

$$f_{X_1+\dots+X_{n+1}}(t) = f_{Y+X_{n+1}}(t) = (f_Y * f_{X_{n+1}})(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(u) f_{X_{n+1}}(t-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda u} u^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda e^{-\lambda(t-u)} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t-u) \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(u) du$$

$$\swarrow \quad 0 \leq u \leq t$$

$$= \int_0^t \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda t} u^{n-1}}{\Gamma(n)} du = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(n)} \cdot \frac{u^n}{n} \Big|_0^t$$

$$= \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda t} t^n}{\Gamma(n) \cdot n} = \frac{\lambda^{n+1} t^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad t \geq 0$$

$\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Rightarrow X_1 + \dots + X_{n+1} \sim \text{Gamma}(n+1, 1).$$

[P4]

$$f_{X,Y} = \begin{cases} 2(x+y) & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

$$= \int_0^x 2(x+y) dy = 2xy \Big|_0^x + y^2 \Big|_0^x = 3x^2 \quad \forall x \in (0,1)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$$

$0 \leq y \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_y^1 2(x+y) dx &= x^2 \Big|_y^1 + 2xy \Big|_y^1 \\ &= 1 - y^2 + 2y - 2y^2 \\ &= 1 + 2y - 3y^2 \end{aligned}$$

$$\forall y \in (0,1)$$

Claramente

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$$

$\Rightarrow X, Y$ no son independientes

P51 $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x,y > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

(a) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dy = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda x}}{-\lambda} e^{-\lambda y} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \lambda e^{-\lambda x} \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow X \sim \exp(\lambda)$$

Análogo para Y

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad y > 0 \Rightarrow Y \sim \exp(\lambda)$$

Entonces tenemos que:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda y}$$

$\Rightarrow X, Y$ son independientes.

(b) $P(X \cdot \alpha \leq Y) = P(Y \geq \alpha X)$

$\uparrow$
PROBAS
TOTALES

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P(Y \geq \alpha X | X=t) f_X(t) dt$$

$\uparrow$
Independencia

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P(Y \geq \alpha t) \lambda e^{-\lambda t} \Big|_{[0, +\infty)}^{(t)} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\alpha t}^{+\infty} f_Y(u) du \right) \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\alpha t}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du \right) \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= \lambda^2 \int_0^{+\infty} \left. -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u} \right|_{\alpha t}^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \alpha t} e^{-\lambda t} dt$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda \alpha + \lambda)t} dt = \frac{\lambda}{-\lambda(\alpha + 1)} e^{-\lambda(\alpha + 1)t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\alpha + 1}$$

(c) Como $X, Y > 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{X}{X+Y} \leq 1$

Si $t \leq 1$

$$P\left(\frac{X}{X+Y} \leq t\right) = P(X \leq t(X+Y))$$

$$= P\left(\frac{(1-t)X}{t} \leq Y\right) \stackrel{\text{Por (b)}}{=} \frac{1}{1 + \frac{1-t}{t}} = t$$

Si $t < 0$ ~~0~~

$$\Rightarrow P\left(\frac{X}{X+Y} \leq t\right) = 0$$

Si $t > 1$

$$P\left(\frac{X}{X+Y} \leq t\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{X}{X+Y} \sim \text{Uniforme } [0, 1]$$

P6 $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$ $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ independentes
 $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$f_{X_1+X_2}(t) = (f_{X_1} * f_{X_2})(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(u) f_{X_2}(t-u) du.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}^{(u)} \lambda_2 e^{-\lambda_2(t-u)} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}^{(t-u)} du.$$

$$= \int_0^t \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)u} du$$

$\nearrow$
 $0 \leq u \leq t$

$$= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \left(\frac{1}{-(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)u} \Big|_0^t \right)$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} \right)$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} \right)$$