Pauta Auxiliar 8 MA3403
Probabilidades y Estadística

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Ángel Pardo, Alfredo Torrico
9 de Diciembre de 2011

P1. Sea X variable aleatoria de *Weibull* con parámetros $\lambda > 0$ y $k > 0$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} & \text{cuando } t \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular la función de distribución acumulada $F_X(x)$.

Sol. Como X es no negativa, se tiene que para $x < 0$, $F_X(x) = 0$. Para $x \geq 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_0^x \frac{k}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} dt = -e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k}\Big|_{t=0}^{t=x} = -e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} - (-1) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$$

Donde se usó que la derivada de $-e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k}$ es exactamente el integrando. De este modo

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} & \text{cuando } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

□

b) Muestre que la f.g.m. de la variable $\ln(X)$ es la función $\lambda^t \Gamma(1 + t/k)$. Recuerde que $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty e^{-y} y^{\theta-1} dy$.

Sol. Utilizando la propiedad para calcular la esperanza de una función de una variable aleatoria, tenemos que

$$M_{\ln(X)}(t) = \mathbb{E}(e^{t\ln(X)}) = \mathbb{E}(X^t) = \int_0^\infty x^t \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} dx$$

Haciendo el cambio de variable $y = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k$, con lo cual $dy = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} dx$, y entonces

$$M_{\ln(X)}(t) = \int_0^\infty \left(\lambda y^{\frac{1}{k}}\right)^t e^{-y} dy = \lambda^t \int_0^\infty y^{\left(1+\frac{t}{k}\right)-1} e^{-y} dy = \lambda^t \Gamma\left(1 + \frac{t}{k}\right)$$

Obteniendo lo deseado □

c) Obtenga todos los momentos de X. Calcule su esperanza y varianza. Obtenga una expresión para la f.g.m. de X usando una serie de potencias (Ind.: Taylor). Para esto examine que representa $M_{\ln(X)}(t)$.

Sol. Por la parte (b), sabemos que $M_{\ln(X)}(t) = \mathbb{E}(X^t)$. Por lo tanto para $n \in \mathbb{N}$, tenemos que el momento n-ésimo de X corresponde a $\mathbb{E}(X^n) = M_{ln(X)}(n) = \lambda^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right)$. La esperanza de X es entonces

$$\mathbb{E}(X) = \lambda\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

, y la varianza es

$$var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \lambda^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right)^2 = \lambda^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2\right]$$

Encontremos una expresión para $M_X(t)$ usando la expanción en serie de Taylor en torno a 0, la propiedad fundamental de la función generadora de momentos y la parte (b). Se obtiene

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} M_X(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}(X^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^n}{n!} \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right)$$

□

d) Calcule la densidad de la variable $(X/\lambda)^k$. ¿Qué variable conocida es?

Sol. Sea $Y = \left(\frac{X}{\lambda}\right)^k$. Calculemos su distribución acumulada

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(\left(\frac{X}{\lambda}\right)^k \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \lambda y^{\frac{1}{k}}) = F_X(\lambda y^{\frac{1}{k}}) = 1 - e^{-\left(\frac{\lambda y^{1/k}}{\lambda}\right)^k} = 1 - e^{-y}$$

lo cual vale para $y \geq 0$. Derivando, obtenemos entonces $f_Y(y) = e^{-y}$, $y \geq 0$, es decir, $Y = \left(\frac{X}{\lambda}\right)^k$ es una variable exponencial de parámetro 1. □

P2. Sean X e Y variables aleatorias independientes exponenciales de parámetro $\lambda = 1$. Sean $U = X/Y$ y $V = XY$. Muestre que la función de densidad conjunta de U y V es

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\left(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\sqrt{v}}}{2u} & \text{cuando } u,v > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sol. Usaremos el método del Jacobiano. Se tiene que $UV = XY\frac{X}{Y} = X^2$ y $\frac{V}{U} = \frac{XY}{X/Y} = Y^2$, por lo cual la función inversa de la transformación es $g^{-1}(u,v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{v}{u}})$. No hay problemas con la raíz, pues X e Y son variables positivas. El módulo del determinante del Jacobiano de esta transformación es

$$|\det J_{g^{-1}}(u,v)| = \left|\det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ -\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}^3} & \frac{1}{2\sqrt{ub}} \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{4u} + \frac{1}{4u}\right| = \frac{1}{2u}$$

Por otro lado, como X e Y son exponenciales de parámetro 1 independientes, se tiene que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = e^{-x}e^{-y}$, para $x,y > 0$. Así, aplicando la fórmula que entrega el método del Jacobiano, tenemos

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u,v)) \cdot |\det J_{g^{-1}}(u,v)| = frace^{-\sqrt{uv}}e^{-\sqrt{\frac{v}{u}}}2u = \frac{e^{-\left(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\sqrt{v}}}{2u}$$

Lo anterior vale para $u,v > 0$. Sin embargo, como X e Y son positivas, también lo serán $U = \frac{X}{Y}$ y $V = XY$, por lo tanto la densidad conjunta de U y V valdrá 0 al evaluarla en $u < 0$ ó $v < 0$, obteniendo lo deseado, i.e.,

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\left(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\sqrt{v}}}{2u} & \text{cuando } u,v > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

□

P3. Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que $X \sim exp(\lambda)$ e $Y \sim Unif(-\pi, \pi)$. Sean $U = \sqrt{X}\cos(Y)$ y $V = \sqrt{X}\sin(Y)$.

a) Calcular la función densidad conjunta de U y V. Concluya que U y V son independientes y sus distribuciones son normales de media 0 y varianza $1/2\lambda$.

Sol. Usaremos el método del Jacobiano. Se tiene que $U^2+V^2 = X\cos^2(Y)+X\operatorname{sen}^2(Y) = X$ y $\frac{V}{U} = \tan Y$, por lo cual la función inversa de la transformación es $g^{-1}(u,v) = (u^2+v^2, \arctan(\frac{v}{u}))$. Como X e Y son absolutamente continuas, $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\cos(Y)=0) = 0$, de modo que $\mathbb{P}(U=0) = 0$ y podemos dividir por U sin problemas. El módulo del determinante del Jacobiano de esta transformación es

$$|\det J_{g^{-1}}(u,v)| = \left|\det\begin{pmatrix} 2u & -\frac{v}{u^2}\frac{1}{1+\frac{v^2}{u^2}} \\ 2v & \frac{1}{u}\frac{1}{1+\frac{v^2}{u^2}} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{1+\frac{v^2}{u^2}}\left|2+2\frac{v^2}{u^2}\right| = 2$$

Por otro lado, como X e Y son independientes, se tiene que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x}\frac{1}{2\pi}$, para $x>0$ e $y \in (-pi, pi)$. Así, aplicando la fórmula que entrega el método del Jacobiano, tenemos

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u,v)) \cdot |\det J_{g^{-1}}(u,v)| = 2\lambda e^{-\lambda(u^2+v^2}\frac{1}{2\pi} = \frac{\lambda}{\pi}e^{-\lambda(u^2+v^2)}$$

Y lo anterior vale para $u,v \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Para ver que son normales independientes escribimos $f_{U,V}$ de manera conveniente, esto es,

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{\lambda}{\pi}e^{-\lambda(u^2+v^2)} = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{2\lambda}}}\cdot e^{-\frac{u^2}{2\frac{1}{2\lambda}}}\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{2\lambda}}}\cdot e^{-\frac{v^2}{2\frac{1}{2\lambda}}}\right]$$

De modo que podemos identificar

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{2\lambda}}}\cdot e^{-\frac{u^2}{2\frac{1}{2\lambda}}}$$

y

$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{2\lambda}}}\cdot e^{-\frac{v^2}{2\frac{1}{2\lambda}}}$$

Así $U,V \sim N(0,\frac{1}{2\lambda}$, y como además se tiene que $f_{U,V}(u,v) = f_U(u)f_V(v)$, se deduce que son independientes. □

b) Pruebe que la función densidad de U^2 y V^2 es

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}}e^{-\lambda t} & \text{cuando } t \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sol. $F_{U^2}(t) = \mathbb{P}(U^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq U \leq \sqrt{t}) = \mathbb{P}(U \leq \sqrt{t}) - \mathbb{P}(U < -\sqrt{t}) = \mathbb{P}(U \leq \sqrt{t}) - \mathbb{P}(U \leq -\sqrt{t}) = F_U(\sqrt{t}) - F_U(-\sqrt{t})$

Donde lo anterior vale para $t \geq 0$, y se usó que U es absolutamente continua. Derivando sigue que

$$f_{U^2}(t) = \frac{d}{dt}F_{U^2}(t) = \frac{d}{dt}(F_U(\sqrt{t}) - F_U(-\sqrt{t})) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(f_U(\sqrt{t}) + f_U(-\sqrt{t})) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}}\cdot e^{-\lambda t}$$

Obteniendo lo deseado, esto es

$$f_U(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}}e^{-\lambda t} & \text{cuando } t \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para V es exactamente lo mismo. □

c) Observe que $U^2+V^2=X$. Luego, U^2+V^2 se distribuye como una exponencial de parámetro λ. Basándose en (b) de una demostración alternativa de este mismo hecho.
Indicación:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-y)y}}dy=\pi$$

Sol. Como U y V son independientes, entonces también lo son U^2 y V^2. Luego se puede usar la fórmula de la convolución

$$f_{U^2+V^2}(t)=(f_{U^2}*f_{V^2})(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{U^2}(t-x)f_{V^2}(x)dx=\int_0^t \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(t-x)x}}e^{-\lambda(t-x)}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda}{\pi}e^{-\lambda t}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-x)x}}dx$$

Donde se usó que U^2 y V^2 toman solo valores positivos. Haciendo el cambio de variable $y=\frac{1}{t}x$ y usando la indicación sigue que

$$\frac{\lambda}{\pi}e^{-\lambda t}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-x)x}}dx=\frac{\lambda}{\pi}e^{-\lambda t}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-y)y}}dy=\lambda e^{-\lambda t}$$

Obteniendo lo deseado, i.e., $U^2+V^2\sim \exp(\lambda)$ □

P4. La cantidad de llamadas telefónicas que se reciben en una empresa durante t horas es una variable de Poisson de parámetro $20t$. Se produce una falla en el sistema telefónico, durante la cual las llamadas recibidas no pueden ser atendidas. Si la duración de la falla es una variable exponencial de parámetro $\lambda=\frac{1}{2}$, ¿cuál es la cantidad esperada de llamadas no atendidas durante la falla?

Sol. Definamos las siguientes variables:

$$\begin{array}{lcll} F & = & \text{“\textit{tiempo (en horas) que dura la falla}”}; & F\sim \exp(\frac{1}{2}) \\ R_t & = & \text{“\textit{llamadas recibidas durante t horas}”}; & R_t\sim Poisson(20t) \\ X & = & \text{“\textit{llamadas no atendidas durante la falla}”}; & X=R_{(t=F)} \end{array}$$

Luego, estamos buscando $\mathbb{E}(X)$. Para esto, calculamos primero la esperanza condicional de X dado que $F=t$, esto es,

$$\mathbb{E}(X|F=t)=\mathbb{E}(R_F|F=t)=\mathbb{E}(R_t|F=t)=\mathbb{E}(R_t)=\mathbb{E}(Poisson(20t))=20\cdot t=20\cdot F$$

Luego usamos la propiedad de la esperanza condicional que dice que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|F=t))=\mathbb{E}(X)$, como sigue

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|F=t))=\mathbb{E}(20\cdot F)=20\cdot\mathbb{E}(F)=20\cdot\mathbb{E}(\exp(\frac{1}{2}))=20\cdot 2=40$$

□

→ Una forma de “deducir” y/o entender por qué se tiene la propiedad $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|F=t))=\mathbb{E}(X)$.

Por definición se tiene que $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot p_X(k)$. Además $p_X(k)=\mathbb{P}(X=k)=\int_0^{\infty}\mathbb{P}(X=k|F=t)f_F(t)dt$.

Así,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\int_0^{\infty}\mathbb{P}(X=k|F=t)f_F(t)dt \\ &\overset{*}{=} \int_0^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\mathbb{P}(X=k|F=t)\right]f_F(t)dt \\ &= \int_0^{\infty}\mathbb{E}(X|F=t)f_F(t)dt \\ &= \mathbb{E}_F(\mathbb{E}(X|F=t))\end{aligned}$$

Donde el paso $*$ no es del todo riguroso, puesto que no es llegar y cambiar sumas con integrales infinitas.
La notación $\mathbb{E}_F$ es para recalcar el hecho de que $\mathbb{E}(X|F=t)$ es una variable aleatoria que es una función de F, y por lo tanto para calcular $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|F=t))$ hay que integrar con respecto a F (i.e., $\int_0^{\infty}\mathbb{E}(X|F=t)f_F(t)dt$).

P5. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6|x||y^3| & \text{cuando } x^2+y^2<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre las densidades marginales de X e Y.

Sol. Claramente X e Y toman valores solo en $(-1,1)$.
Luego, para $x \in (-1,1)$ se tiene que

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 6|x||y^3|dy = 12|x| \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^3 dy = 12|x| \left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} = 3|x|(1-x^2)^2$$

Similarmente, para $y \in (-1,1)$

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 6|x||y^3|dx = 12|y^3| \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xdx = 12|xy^3| \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} = 6|y^3|(1-y^2)$$

□

b) Encuentre las densidades condicionales $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

Sol. Para $(x,y) \in B(0,1)$, i.e., $x^2+y^2<1$ se tiene que

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{6|xy^3|}{6|y^3|(1-y^2)} = \frac{|x|}{1-y^2}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{6|xy^3|}{3|x|(1-x^2)^2} = \frac{|y^3|}{(1-x^2)^2}$$

□

c) Encuentre $\mathbb{E}(X|Y=y)$.

Sol.

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x|x|}{1-y^2}dx = 0$$

Puesto que el integrando es impar (en la variable de integración x) y los límites de integración son simétricos.

□