Auxiliar 8 MA3403

Probabilidades y Estadística

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Ángel Pardo, Alfredo Torrico
9 de Diciembre de 2011

P1. (Control 2 Otoño 2011) Sea X variable aleatoria de *Weibull* con parámetros $\lambda > 0$ y $k > 0$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} & \text{cuando } t \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Calcular la función de distribución acumulada $F_X(x)$.
- Muestre que la f.g.m. de la variable $\ln(X)$ es la función $\lambda^t \Gamma(1 + t/k)$. Recuerde que $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty e^{-y} y^{\theta-1} dy$.
- Obtenga todos los momentos de X . Calcule su esperanza y varianza. Obtenga una expresión para la f.g.m. de X usando una serie de potencias (Ind.: Taylor). Para esto examine que representa $M_{\ln(X)}(t)$.
- Calcule la densidad de la variable $(X/\lambda)^k$. ¿Qué variable conocida es?

P2. (Control 2 Primavera 2010) Sean X e Y variables aleatorias independientes exponenciales de parámetro $\lambda = 1$. Sean $U = X/Y$ y $V = XY$. Muestre que la función de densidad conjunta de U y V es

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} \frac{e^{-(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}})\sqrt{v}}}{2u} & \text{cuando } u, v > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

P3. Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim \text{Unif}(-\pi, \pi)$. Sean $U = \sqrt{X} \cos(Y)$ y $V = \sqrt{X} \sin(Y)$.

- Calcular la función densidad conjunta de U y V . Concluya que U y V son independientes y sus distribuciones son normales de media 0 y varianza $1/2\lambda$.
- Pruebe que la función densidad de U^2 y V^2 es

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}} e^{-\lambda t} & \text{cuando } t \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Observe que $U^2 + V^2 = X$. Luego, $U^2 + V^2$ se distribuye como una exponencial de parámetro λ . Basándose en (b) de una demostración alternativa de este mismo hecho.
Indicación:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-y)y}} dy = \pi$$

P4. La cantidad de llamadas telefónicas que se reciben en una empresa durante t horas es una variable de Poisson de parámetro $20t$. Se produce una falla en el sistema telefónico, durante la cual las llamadas recibidas no pueden ser atendidas. Si la duración de la falla es una variable exponencial de parámetro $\lambda = \frac{1}{2}$, ¿cuál es la cantidad esperada de llamadas no atendidas durante la falla?

P5. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 6|x||y^3| & \text{cuando } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Encuentre las densidades marginales de X e Y .
- Encuentre las densidades condicionales $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.
- Encuentre $\mathbb{E}(X|Y = y)$.