Pauta Auxiliar 6 MA3403
Probabilidades y Estadística

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Ángel Pardo, Alfredo Torrico
25 de Noviembre de 2011

P1. Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos si se sabe que la distancia de la flecha al centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.

Sol. Sea X la variable aleatoria que denota el puntaje obtenido, e Y aquella que denota la distancia (en centrímetros) de la flecha al centro. La variable X es discreta con rango $R_X = \{0, 3, 5, 10\}$. Luego

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in R_X} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3) + 5 \cdot \mathbb{P}(X = 5) + 10 \cdot \mathbb{P}(X = 10)$$

Además, por definición, es claro que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 10) &= \mathbb{P}(Y < 5) \\
\mathbb{P}(X = 5) &= \mathbb{P}(5 \leq Y < 15) \\
\mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(15 \leq Y < 25) \\
\mathbb{P}(X = 0) &= \mathbb{P}(25 \leq Y)
\end{aligned}$$

Y como la variable Y es uniforme en $[0, 50]$, sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 10) &= \mathbb{P}(Y < 5) = \tfrac{5}{50} = \tfrac{1}{10} \\
\mathbb{P}(X = 5) &= \mathbb{P}(5 \leq Y < 15) = \tfrac{15-5}{50} = \tfrac{1}{5} \\
\mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(15 \leq Y < 25) = \tfrac{25-15}{50} = \tfrac{1}{5} \\
\mathbb{P}(X = 0) &= \mathbb{P}(25 \leq Y) = \mathbb{P}(25 \leq Y \leq 50) = \tfrac{50-25}{50} = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Así

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 10 \cdot \frac{1}{10} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

□

P2. Sean $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(\nu, \tau^2)$ variables aleatorias independientes. Usando la f.g.m. y sus propiedades muestre que $Z := X + Y \sim N(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$. Recuerde que si W es normal entonces su f.g.m. es $e^{tE(W) + \frac{1}{2}t^2 var(W)}$.

Sol. Como X e Y son idependientes, se tiene que

$$M_Z(t) = M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$$

Recordando que si $W \sim N(m, s^2)$, entonces $\mathbb{E}(W) = m$ y $var(W) = s^2$, por la indicación se tiene que

$$M_Z(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \cdot e^{t\nu + \frac{1}{2}t^2\tau^2} = e^{t(\mu+\nu) + \frac{1}{2}t^2(\sigma^2+\tau^2)}$$

Es decir, M_Z coincide con la f.g.m. de una $N(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$. Y como la f.g.m. caracteriza la distribución de una variable, entonces necesariamente $Z \sim N(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$. □

P3. Sea X una variable aleatoria con distribución de *Laplace* de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}$$

a) Muestre que la función generadora de momentos de X es $M_X(t) = e^{\mu t}/(1 - b^2t^2)$ para $|t| < 1/b$.

Sol.

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx = \frac{e^{\mu t}}{2b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} e^{-\frac{|y|}{b}} dy$$

donde la última igualdad se obtiene haciendo el cambio de variable $y = x - \mu$. Separando según el signo de y sigue que

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu t}}{2b} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(t+\frac{1}{b})y} dy + \int_{0}^{\infty} e^{(t-\frac{1}{b})y} dy \right) = \frac{e^{\mu t}}{2b} \left(\left. \frac{e^{(t+\frac{1}{b})y}}{t+\frac{1}{b}} \right|_{-\infty}^{0} + \left. \frac{e^{(t+\frac{1}{b})y}}{t+\frac{1}{b}} \right|_{0}^{\infty} \right)$$

La primera integral converge para $t > -\frac{1}{b}$ y la segunda, para $t < \frac{1}{b}$. Es decir, $M_X(t)$ está definida para $|t| < \frac{1}{b}$, y para tales t se tiene que

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu t}}{2b} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{b}} - \frac{1}{1-\frac{1}{b}} \right) = \frac{e^{\mu t}}{1 - b^2t^2}$$

□

b) Calcule la esperanza y varianza de X.

Sol. Derivando la f.g.m. y evaluando en 0 se tiene que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{d}{dt} M_X(0) = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{\mu t}}{1 - b^2t^2} \right) \Bigg|_{t=0} = \left. \frac{\mu e^{\mu t}(1 - b^2t^2) + 2b^2te^{\mu t}}{(1 - b^2t^2)^2} \right|_{t=0} = \frac{\mu \cdot 1 - 0}{1} = \mu$$

Derivando nuevamente se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \tfrac{d^2}{dt^2} M_X(0) \\
&= \tfrac{d}{dt} \left(\tfrac{\mu e^{\mu t}(1-b^2t^2)+2b^2te^{\mu t}}{(1-b^2t^2)^2} \right) \Big|_{t=0} \\
&= \tfrac{e^{\mu t}}{(1-b^2t^2)^4} \left[(\mu^2(1-b^2t^2) - 2b^2t + 2b^2 + 2bt\mu)(1-b^2t^2)^2 + 4(1-b^2t^2)b^2t(\mu(1-b^2t^2) + 2b^2t) \right] \Big|_{t=0} \\
&= 1 \cdot \left[(\mu^2 + 2b^2) \cdot 1 + 0 \right] \\
&= \mu^2 + 2b^2
\end{aligned}$$

Así,

$$var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mu^2 + 2b^2 - \mu^2 = 2b^2$$

□

c) Suponiendo $\mu = 0$, calcule la densidad de $|X|$. ¿Qué variable conocida es $|X|$?

Sol. Sea $Y = |X|$. Calculemos su distribución acumulada en $y \geq 0$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(|X| \leq y) = \mathbb{P}(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x|}{b}} dx = \frac{1}{b} \int_{0}^{y} e^{-\frac{x}{b}} dx$$

donde la última igualdad se obtiene por la simetría del integrando. Derivando con respecto a y, y aplicando el teorema fundamental del cálculo, se llega a que $f_Y(y) = \frac{1}{b} e^{-\frac{y}{b}}$.
Sabiendo que $f_Y(y) = 0$ para $y < 0$ (pues Y es no-negativa), se obteniene que

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b} e^{-\frac{y}{b}} & \text{cuando } y \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, $Y = |X|$ tiene distribución exponencial de parámetro $\frac{1}{b}$. □

P4. 1) Sean $X \sim geom(p)$ e $Y \sim geom(q)$ independientes. Muestre que $\text{mín}\, X, Y \sim geom(p+q-pq)$. Interprete. Indicación: trabaje con $\mathbb{P}(X > k)$ en lugar de $\mathbb{P}(X = k)$; ídem para Y.

Sol. Sea $Z = \text{mín}\{X, Y\}$. El mínimo de dos cantidades es mayor que k si y solo si ambas cantidades son mayores que k, luego

$$\mathbb{P}(Z > k) = \mathbb{P}(\text{mín}\{X, Y\} > k) = \mathbb{P}(X > k, Y > k) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y > k)$$

Donde hemos usado la independencia de X e Y. Se tiene que $\mathbb{P}(X > k)$ vale $(1-p)^k$, pues el evento $\{X > k\}$ corresponde a que las primeras k repeticiones del experimento sean fracaso. El mismo razonamiento sirve para Y (también puede calcularse usando la función distribución de una variable geométrica). Así,

$$\mathbb{P}(Z > k) = (1-p)^k(1-q)^k = [1-(p+q-pq)]^k$$

es decir, $Z \sim geom(p+q-pq)$. Esto se debe a que la variable Z corresponde a la primera vez que ocurre un éxito, ya sea en los experimentos asociados a X (evento que llamaremos E y que tiene probabilidad p) o en los asociados a Y (evento F con probabilidad q). Como E y F son independientes, la probabilidad de un exito para Z queda

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(EF) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F) = p + q - pq$$

□

2) Sean $X \sim bin(n, p)$ e $Y \sim bin(m, p)$ independientes. Muestre que $X + Y \sim bin(n+m, p)$. Interprete. Indicación: para calcular $\mathbb{P}(X + Y = k)$, particione en los posibles resultados de X y utilice la identidad

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{k-1}\binom{n}{i} = \binom{n+m}{k}$$

Sol. Sea $Z = X + Y$. Para $k \in \{0, \ldots, n+m\}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^{n+m} \mathbb{P}(X + Y = k | X = i)\mathbb{P}(X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{n+m} \mathbb{P}(Y = k - i | X = i)\mathbb{P}(X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{n+m} \mathbb{P}(Y = k - i)\mathbb{P}(X = i)
\end{aligned}$$

donde hemos usado la independencia de X e Y. Cuando $i > k$ ó $i > n$ el término de la suma vale 0, y usando la forma de la distribución binomial se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^{n+m} \binom{m}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n+m} \binom{m}{k-i}\binom{n}{i}\right) p^k (1-p)^{n+m} \\
&= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m}
\end{aligned}$$

donde hemos usado la indicación y que $\binom{m}{k-i} = 0$ para $i > k$. Esto prueba que $Z \sim bin(n+m, p)$, lo cual se debe a que Z representa la cantidad de éxitos que se obtienen al realizar $n + m$ repeticiones de un experimento con probabilidad p de éxito, correspondientes a las realizaciones asociadas a X e Y en conjunto. □