Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Ingeniería Matemática
2 de Diciembre de 2011

Auxiliar 7 MA3403: Esperanza y Vectores Aleatorios

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Angel Pardo, Alfredo Torrico.

P1. Se dispone de una urna con N bolitas, de las cuales m son blancas y el resto son negras, y se extraen n bolitas al azar. Calcule la cantidad esperada de bolitas blancas extraídas. **Indicación:** defina variables indicatrices adecuadas y utilice la linealidad de la esperanza.

P2. Se tienen dos mazos idénticos con n cartas cada uno. La persona A extrae k_A cartas al azar del primer mazo, y la persona B extrae, independiente de A, k_B cartas al azar del segundo mazo.

(a) Muestre que el número esperado de cartas que aparecen simultáneamente entre las ecogidas por A y por B es $(k_A k_B)/n$.

(b) Muestre que el número esperado de cartas que aparecen entre las escogidas por uno de ellos, pero no ambos es $(nk_A + nk_B - 2k_A k_B)/n$.

P3. $X \sim Gamma(p, \lambda)$ con $\lambda, p > 0$ si

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p)} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$. Muestre que si $k \in \mathbb{N}$ entonces $\Gamma(k) = (k-1)!$. Demuestre por inducción que si $X_1, \ldots, X_n$ iid tal que $X_i \sim exp(\lambda)$, entonces $X_1 + \cdots + X_n \sim Gamma(n, \lambda)$.

P4. Sean X, Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2(x+y) & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Calcule las densidades marginales de X e Y. ¿Son independientes? Explique.

P5. Sean X, Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x, y > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(a) ¿Son independientes?¿Qué tipo de variables son?

(b) Dado $\alpha > 0$, muestre que $\mathbb{P}(Y \geq \alpha X) = 1/(1+\alpha)$.

(c) Determine la función de distribución acumulada de la variable $X/(X+Y)$. ¿Qué tipo de variable es?

P6. Sean $X_1 \sim exp(\lambda_1)$ y $X_2 \sim exp(\lambda_2)$ variables aleatorias independientes, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Demuestre que:

$$f_{X_1+X_2}(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$$

Indicación: recuerde la fórmula de convolución.