Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3
Probabilidades y Estadística
Primavera 2011

Guía ejercicios 2

Roberto Cortez
Ángel Pardo
Alfredo Torrico

1. Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos que obtiene la persona, si se sabe que la distancia de la flecha al centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.

2. El arancel mensual de una determinada carrera universitaria asciende a \$60. Si el ingreso per cápita mensual de la familia de un estudiante es inferior a \$50, se le asigna 100 % de beca; si el ingreso per cápita está entre \$50 y \$80, se le asigna 50 % de beca; y si está entre \$80 y \$100, se asigna un 25 %. En otro caso, no se asigna beca. Calcule el valor esperado de la beca mensual asignada a un estudiante escogido al azar, suponiendo que el ingreso per cápita mensual de la familia se distribuye uniformemente en el intervalo $[\$25, \$175]$.

3.

a) Sea X variable aleatoria con densidad f_X simétrica, es decir, $f_X(x) = f_X(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que la densidad de la variable aleatoria $|X|$ es $f_{|X|}(x) = 2f_X(x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.

b) Sea X variable $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Calcule $\mathbb{E}|X|$.

4.

a) Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Pruebe que $(X - \mu)/\sigma$ es una normal estándar.

b) Sea $X \sim \mathcal{N}(10, 36)$. Calcule $\mathbb{P}(X < 5)$, $\mathbb{P}(X > 16)$ y $\mathbb{P}(4 < X < 16)$. Use una tabla de la distribución normal estándar.

5. Calcule $\mathbb{E}(X)$ si X tiene densidad dada por

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 5/x^2 & x > 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

6. Se dispone de una urna con N bolitas, de las cuales m son blancas y el resto son negras, y se extraen n bolitas al azar. Calcule la cantidad esperada de bolitas blancas extraídas. *Indicación:* defina variables indicatrices adecuadas y utilice la linealidad de la esperanza.

7. Se tienen dos mazos idénticos con n cartas cada uno. La persona A extrae k_A cartas al azar del primer mazo, y la persona B extrae, independiente de A, k_B cartas al azar del segundo mazo.

a) Muestre que el número esperado de cartas que aparecen simultáneamente entre las escogidas por A y por B, es $(k_A k_B)/n$.

b) Muestre que el número esperado de cartas que aparecen entre las escogidas por uno de ellos, pero no ambos, es $(nk_A + nk_B - 2k_A k_B)/n$.

Indicación: defina variables indicatrices adecuadas para cada caso, y use linealidad de la esperanza.

8. Sea X variable aleatoria. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $s(\alpha) = \mathbb{E}[(X - \alpha)^2]$. Pruebe que para todo α se tiene que $s(\alpha) \geq \text{var}(X)$ y que se alcanza la igualdad sólo cuando $\alpha = \mathbb{E}(X)$.

9. Decimos que la variable aleatoria X tiene *distribución de Pareto* si su densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} c(x_m/x)^{\alpha+1} & x \geq x_m \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $x_m, \alpha > 0$ son parámetros.

a) ¿Cuál es el valor de c?

b) ¿Para cuáles α está bien definida la esperanza de X? Calcule $\mathbb{E}(X)$ para aquellos α que tenga sentido.

c) ¿Para cuáles α está bien definida la varianza de X? Calcule $\text{var}(X)$ para aquellos α que tenga sentido.

d) ¿Cuál es la distribución de $\log(X/x_m)$?

10. Sean $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ variables aleatorias independientes. Pruebe que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

11.

a) Sean X, Y variables aleatorias independientes, y sea $Z = \text{mín}(X, Y)$. Calcule F_Z en términos de F_X y F_Y.

b) Sean $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim \exp(\mu)$. ¿Cuál es la densidad de $Z = \text{mín}(X, Y)$?

12. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables independientes, todas con distribución uniforme en $[0, 1]$. Sea $Y = \text{máx}(X_1, \ldots, X_n)$. Pruebe que $f_Y(y) = ny^{n-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$, y calcule $\mathbb{E}(Y)$.

13. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones generadoras de momentos dadas por

$$M_X(t) = e^{2e^t - 2} \quad \text{y} \quad M_Y(t) = \frac{e^t/2}{1 - e^t/2}.$$

Pruebe que $\mathbb{P}(XY = 1) = 1/e^2$. *Indicación:* recuerde que la función generadora de momentos caracteriza la distribución de una variable aleatoria.

14. Sea X una variable aleatoria con distribución de Laplace de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2b}e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Muestre que la función generadora de momentos de X es $M_X(t) = e^{\mu t}/(1 - b^2 t^2)$ para $|t| < 1/b$.

b) Calcule la esperanza y varianza de X.

c) Suponiendo $\mu = 0$, calcule la densidad de $|X|$. ¿Qué variable conocida es $|X|$?

d) Sean $Y_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $Y_2 \sim \exp(\lambda_2)$ variables independientes. Pruebe que $\lambda_1 Y_1 - \lambda_2 Y_2$ tiene distribución de Laplace con parámetros $\mu = 0$ y $b = 1$.

15. Se dice que X tiene distribución *log-normal* con parámetros μ y σ^2 si $Y = \ln(X)$ tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

a) Pruebe que la densidad de X es

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

b) Pruebe que

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \operatorname{var}(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

Indicación: utilice la función generadora de momentos de una variable $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

16. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2) & \text{si } x \in [0,1], y \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Pruebe que $c = 3/2$.

b) ¿Son X e Y independientes? Explique.

c) Calcule la densidades marginales de X e Y.

17. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{e^{-x^2}}{y^2 + 1}$$

para todo x e y.

a) ¿Son independientes? Explique.

b) Calcule las densidades marginales. ¿Qué variables conocidas son X e Y?

18. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x^2 y^2}, \quad x \geq 1, y \geq 1.$$

Se definen las variables aleatorias $U = XY$, $V = X/Y$.

a) Encuentre la función densidad conjunta para las variables U y V.

b) Encuentre las densidades marginales para U y V.

19. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ como en la figura 1, y sea (X,Y) un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre A, es decir, $f_{X,Y}(x,y) = \text{área}(A)^{-1}\mathbb{1}_A(x,y)$.

a) Muestre que $f_X(x) = \frac{2-|x|}{3}\mathbb{1}_{[-1,1](x)}$. Calcule también la densidad marginal de Y.

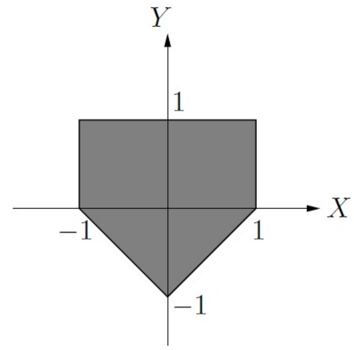

Figura 1: Conjunto A

b) Deduzca que $\mathbb{E}(X) = 0$ y muestre que $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

c) ¿Son independientes X e Y? Justifique.

20. Sean X e Y variables aleatorias independientes exponenciales de parámetro $\lambda = 1$. Sean $U = X/Y$, $V = XY$. Muestre que función de densidad conjunta de U y V es

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{e^{-(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}})\sqrt{v}}}{2u} & u > 0, v > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

21. Sean X e Y variables independientes con distribución normal estándar. Determine la función de densidad conjunta de $U = X$ y $V = X/Y$. Muestre que X/Y tiene distribución de Cauchy, es decir, su densidad es

$$\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

22. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Encuentre las densidades marginales de X e Y.

b) Encuentre las densidades condicionales $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

c) Encuentre $\mathbb{E}(X|Y = y)$.

23. Un ratoncito está al comienzo de un laberinto. Hay 3 posibles puertas: la primera lo lleva al queso de premio, luego de 3 minutos de recorrido. La segunda puerta lo lleva de vuelta al comienzo (volviendo por la tercera puerta), y se tarda 5 minutos en recorrer el camino. Si cada vez que el ratón vuelve al comienzo escoge una nueva puerta de manera independiente y al azar, ¿cuál es el tiempo esperado que tarda el ratón en encontrar su queso? *Indicación:* utilice esperanzas condicionales.

24. La cantidad de llamadas telefónicas que se reciben en una empresa durante t horas es una variable de Poisson de parámetro $20t$. Se produce una falla en el sistema telefónico, durante la cual las llamadas recibidas no pueden ser atendidas. Si la duración de la falla es una variable exponencial de parámetro $\lambda = 0{,}5$, ¿cuál es la cantidad esperada de llamadas no atendidas durante la falla? *Indicación:* utilice esperanzas condicionales.