AUX 5

P1 X: "CANTIDAD ASIGNADA DE BECA" ~~[illegible]~~

Y: "INGRESO PER CÁPITA".

ARANCEL DE CARRERA = \$60 (BARATO NO?)

100% ⇝ \$60 BECA.
50% ⇝ \$30 "
25% ⇝ \$15 "

Buscamos entonces.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\, \mathbb{P}(X = x)$$

$$= 60\, \mathbb{P}(X = 60) + 30\, \mathbb{P}(X = 30) + 15\, \mathbb{P}(X = 15) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0)$$

Pero:

$$\mathbb{P}(X = 60) = \mathbb{P}(25 \le Y \le 50)$$
$$\mathbb{P}(X = 30) = \mathbb{P}(50 < Y \le 80)$$
$$\mathbb{P}(X = 15) = \mathbb{P}(80 < Y \le 100)$$

RECORDAR QUE $Y \sim U[25, 175]$

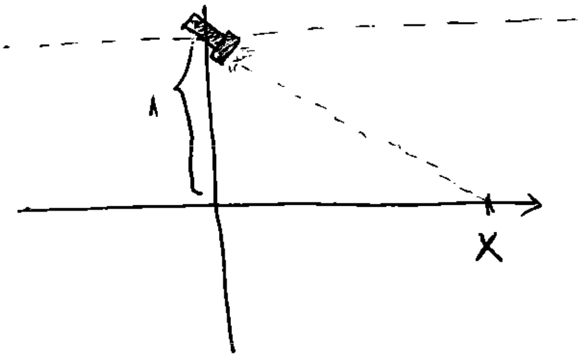
$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = 60\, \mathbb{P}(25 \le Y \le 50) + 30\, \mathbb{P}(50 < Y \le 80) + 15\, \mathbb{P}(80 < Y \le 100)$$

$$= 60 \int_{25}^{50} \frac{1}{175-25}\, dy + 30 \int_{50}^{80} \frac{1}{175-25}\, dy + 15 \int_{80}^{100} \frac{1}{175-25}\, dy$$

$$= \frac{60 \cdot 25}{150} + \frac{30 \cdot 30}{150} + \frac{15 \cdot 20}{150} = 10 + 6 + 2$$

$$= \boxed{18}$$

P2



$\Theta \sim U[-\pi/2, \pi/2]$

$tg\,\Theta = \frac{X}{1} = X$

Buscamos $f_X(x)$?

tg(·) biyectiva en $[-\pi/2, \pi/2]$

$$P(X \le t) = P(tg\,\Theta \le t) = P(\Theta \le arctg\, t)$$

$$= \int_{-\infty}^{arctg\, t} f_\Theta(u)\,du = \int_{-\pi/2}^{arctg\, t} \frac{1}{(\pi/2 - -\pi/2)}\,du = \int_{-\pi/2}^{arctg\, t} \frac{1}{\pi}\,du$$

Θ es uniforme

$$= \frac{arctg\, t + \pi/2}{\pi} = \frac{arctg\, t}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{arctg\, t}{\pi} \Rightarrow f_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$$ ⇝ DISTRIBUCIÓN DE CAUCHY

Calculemos $\mathbb{E}(X)$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2\pi} \log(1+t^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$ diverge

Por lo tanto una variable X que distribuye segun Cauchy no tiene esperanza definida.

P3 (a) Sabemos que $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$

Definamos la variable aleatoria I (sea $\varepsilon > 0$ cualquiera).

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } X \geq \varepsilon \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad I \leq \frac{X}{\varepsilon}$$

(Esto siempre se tiene ya que si $X \geq \varepsilon \Rightarrow \frac{X}{\varepsilon} \geq 1 = I$ y si $X < \varepsilon \Rightarrow \frac{X}{\varepsilon} < 1$ pero $I = 0$)

NOTAR QUE $X \geq 0$.

A la expresión anterior sacamos esperanza, i.e,

$$\frac{X}{\varepsilon} - I \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(\frac{X}{\varepsilon} - I\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(\frac{X}{\varepsilon}\right) - \mathbb{E}(I) \geq 0$$

ESPERANZA ES LINEAL

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(\frac{X}{\varepsilon}\right) \geq \mathbb{E}(I) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon} \geq \mathbb{E}(I)$$

$$\therefore \quad \mathbb{E}(I) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

Pero $\mathbb{E}(I) = 1 \cdot \mathbb{P}(I = 1) + 0\, \mathbb{P}(I = 0) = \mathbb{P}(I = 1) = \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$

$$\mathbb{E}(I) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

(b) Usemos la desigualdad de Markov para la variable aleatoria

$$Y = (X - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0$$

Sea $\varepsilon' > 0$ cualquiera, entonces por Markov se tiene (tomando $\varepsilon' = \varepsilon^2$ para $\varepsilon > 0$ cualquiera)

$$\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon') \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon'} \iff \mathbb{P}(Y \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\varepsilon^2} \qquad (1)$$

Pero,

$$(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2 \iff |X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon.$$

y $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$

$$\therefore (1) \iff \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

(c) Sabemos que $\mathbb{E}(X) = \mu = 50$ donde X = N° productos hechos en una fábrica.

¿Qué puede decir acerca de la probabilidad de que la producción de una semana exceda a 75? (NOTAR QUE $X \geq 0$)

$$\mathbb{P}(X \geq 75) \overset{\text{MARKOV}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X)}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}.$$

¿Qué puede decir acerca de la probabilidad de que la producción de una semana esté entre 40 y 60? NOTAR QUE $\text{Var}(X) = \sigma^2 = 25$

Nos piden $40 \leq X \leq 60 \;/ -50 \Rightarrow -10 \leq X - 50 \leq 10$

P3 (c)

$$\Rightarrow |X-50| \leq 10$$

∴ nos piden calcular $\mathbb{P}(|X-50| \leq 10)$, pero calculemos

$$\mathbb{P}(|X-50| \geq 10) \overset{\text{CHEBYSHEV}}{\leq} \frac{Var(X)}{10^2} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \quad (*)$$

$$\mathbb{P}(|X-50| \leq 10) = 1 - \mathbb{P}(|X-50| \geq 10) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(|X-50| \leq 10) \geq \frac{3}{4}$$

P4 $X \sim \text{Binomial}(n, p)$

RCDO: $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in R_X} g(x)\, \mathbb{P}(X =$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k \in R_X} \frac{1}{1+k}\, \mathbb{P}(X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

N. QUITA N. PONE $\frac{n+1}{n+1}$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Se corren los índices

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}$$

SUMA Y RESTA TERMINO $k=0$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^{k-1} (1-p)^{n+1-k} - \binom{n+1}{0} p^{0-1} (1-p)^{n+1-0} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} - \frac{(1-p)^{n+1}}{p} \right)$$

BINOMIO DE NEWTON

$$= \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{p} (1-p+p)^{n+1} - \frac{(1-p)^{n+1}}{p} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\frac{1-(1-p)^{n+1}}{p} \right)$$

P5

(a) ~~Razonamos~~

Probemoslo por inducción

$X_i \sim$ geométrica $(p) \iff \mathbb{P}(X_i = k) = (1-p)^{k-1} p$

$R_{X_i} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

RCDO | Binomial Negativa

$X_i \sim BN(k,p) \iff \mathbb{P}(X_i = m) = \binom{m-1}{k-1} p^k (1-p)^{m-k}$ ← obtener último éxito en el último tiro

$R_{X_i} = \{k, k+1, \dots\}$

CASO BASE $k=2$ |

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = m) \overset{\text{PROBAS TOTALES}}{=} \sum_{i \in R_{X_2}} \mathbb{P}(X_1 + X_2 = m \mid X_2 = i)\, \mathbb{P}(X_2 = i)$$

$$\underset{\text{Independencia}}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = m - i)\, \mathbb{P}(X_2 = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} (1-p)^{m-i-1} p (1-p)^{i-1} p = p^2 (1-p)^{m-2} \sum_{i=1}^{m-1} 1$$

$$= p^2 (1-p)^{m-2} \cdot (m-1) = p^2 \cdot (1-p)^{m-2} \binom{m-1}{1}$$

Esto es claramente $BN(2,p)$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = m) = \binom{m-1}{2-1} p^2 (1-p)^{m-2} = (m-1) \cdot p^2 (1-p)^{m-2}$$

PASO INDUCTIVO |

Supongamos que $X_1 + \dots + X_k \sim BN(k,p)$

y demostremos que $X_1 + \dots + X_k + X_{k+1} \sim BN(k+1, p)$

Sea $y = X_1 + \dots + X_k$

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k + X_{k+1} = m)$$

$$= \mathbb{P}(y + X_{k+1} = m) = \sum_{i \in R_{X_{k+1}}} \mathbb{P}(y + X_{k+1} = m \mid X_{k+1} = i)\,\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Independencia}}}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(y = m - i)\,\mathbb{P}(X_{k+1} = i) \qquad (*)$$

Pero $y \sim B(k, p) \Rightarrow \mathbb{P}(y = m - i) = \binom{m-i-1}{k-1} p^k (1-p)^{m-i-k}$

$R_y = \{k, k+1, \dots\}$

$\Rightarrow m - i \geq k \Rightarrow i \leq m - k$.

$$(*) = \sum_{i=1}^{m-k} \mathbb{P}(y = m - i)\,\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m-k} \binom{m-i-1}{k-1} p^k (1-p)^{m-i-k} \cdot (1-p)^{i-1} p$$

$$= p^{k+1} (1-p)^{m-(k+1)} \cdot \sum_{i=1}^{m-k} \binom{m-i-1}{k-1} \qquad (**)$$

Aquí usaremos una propiedad conocida

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$$

$$(**) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CAMBIO DE VARIABLES EN LA SUMA} \\ j = m - i}}{=} p^{k+1} (1-p)^{m-(k+1)} \sum_{j=k}^{m-1} \binom{j-1}{k-1}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{PROPIEDAD}}}{=} p^{k+1} (1-p)^{m-(k+1)} \sum_{j=k}^{m-1} \binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}$$

P8

$$(**) \underset{\uparrow}{=} p^{k+1}(1-p)^{n-(k+1)}\left(\binom{n-1}{k}-\cancel{\binom{k-1}{k}}^{\,0}\right)$$

TELESCÓPICA

$$= p^{k+1}(1-p)^{n-(k+1)}\binom{n-1}{k}$$

$$= \binom{n-1}{(k+1)-1} p^{k+1}(1-p)^{n-(k+1)}$$

$$\Rightarrow X_1 + \dots + X_{k+1} \sim BN(k+1, p)$$

(b) Sea $Y \sim BN(k, p)$ donde $\forall i \; X_i \sim geom(p)$

$Y = X_1 + \dots + X_k$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_k) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(X_i) \underset{\uparrow}{=} \boxed{\frac{k}{p}}$$

linealidad

$\mathbb{E}(X_i) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{p}$

geométrica

geométrica

$\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1-p}{p^2}$

independencia

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Var}(X_i) = \boxed{\frac{k(1-p)}{p^2}}$$

ESPERANZA GEOMÉTRICA (p)

Sea $X \sim GEOM(p)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in R_X} k \, \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \, (1-p)^{k-1} p.$$

$$= p \sum_{k=1}^{+\infty} k \, (1-p)^{k-1} = p \, \frac{d}{dp} \left(-\sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^{k} \right)$$

$$\underset{p<1}{=} p \cdot \frac{d}{dp} \frac{-1}{1-(1-p)} = p \cdot \frac{d}{dp} \left(\frac{-1}{p} \right) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \text{TAREA}.$$