

Auxiliar 5 MA3403: Esperanza

Profesor: Roberto Cortez M.
 Auxiliares: Angel Pardo, Alfredo Torrico.

P1. El arancel mensual de una determinada carrera universitaria asciende a \$60. Si el ingreso per cápita mensual de la familia de un estudiante es inferior a \$50, se le asigna 100% de beca; si el ingreso per cápita está entre \$50 y \$80, se le asigna 50% de beca; y si está entre \$80 y \$100, se asigna 25%. En otro caso, no se asigna beca. Calcule el valor esperado de la beca mensual asignada a un estudiante escogido al azar, suponiendo que el ingreso per cápita mensual de la familia se distribuye uniformemente en el intervalo [\$25,\$175].

P2. Suponga que un haz de luz (de una linterna) se hace girar alrededor de su centro, que se encuentra en la coordenada (0,1). Cuando la linterna ha dejado de girar, se denotará a X la variable aleatoria que describe la coordenada de la intersección del haz con el eje x . Si el haz no está apuntando hacia el eje x , se repite el experimento). El punto X está determinado por el ángulo θ que se forma entre la linterna y el eje y , que a partir de la experiencia física parece estar distribuido uniformemente entre $\pi/2$ y $-\pi/2$. Determine la función de densidad de X , y explique por qué no tiene esperanza.

P3. (a) [Desigualdad de Markov] Sea X una variable aleatoria no-negativa, i.e., $\mathbb{P}(\{X \geq 0\}) = 1$, demuestre que $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\{X \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}.$$

(b) [Desigualdad de Chebyshev] Sea X una variable aleatoria de esperanza y varianza finita, entonces para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

(c) Suponga que el número de productos producidos en una fábrica durante una semana es una variable aleatoria con media $\mu = 50$. ¿Qué puede decir acerca de la probabilidad de que la producción de una semana exceda a 75? Si la varianza de la producción semanal es $\sigma^2 = 25$, entonces ¿qué puede decir acerca de la probabilidad de que la producción de una semana esté entre 40 y 60?

P4. Sea $X \sim \text{Binomial}(n, p)$. Muestre que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$

P5. Sean $X_1, \dots, X_k$ variables aleatorias iid que distribuyen $\text{Geometrica}(p)$.

(a) Demuestre que $X_1 + \dots + X_k \sim \text{BN}(k, p)$.

(b) Calcule la esperanza y varianza de la distribución $\text{BN}(k, p)$.